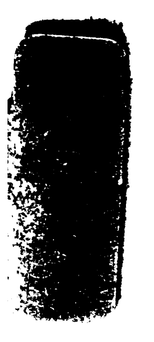
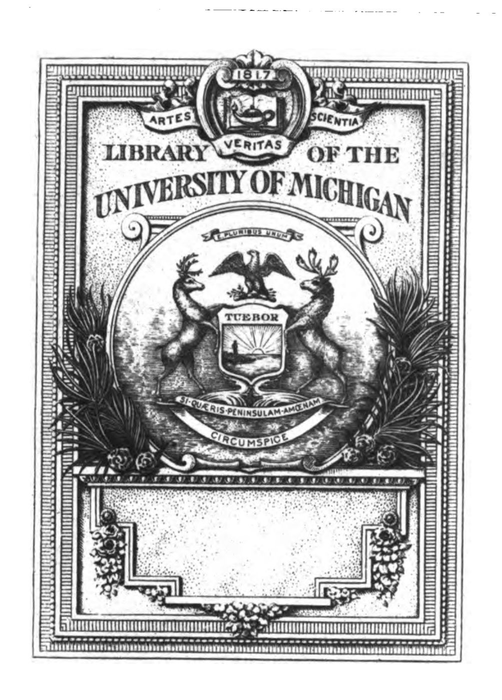





1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Raumlehre

für

höhere Schulen.

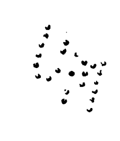
Von

Prof. H. C. E. Martus,
Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

---

1. Teil:

Ebene Figuren.





Bielefeld und Leipzig.
Verlag von Velhagen & Klasing.
1890.

Vorwort.

Die Mathematik mufs als Wissenschaft zu völkerumfassender Verständlichkeit für die Fachgenossen Zeichen und Kunstausdrücke haben, welche in den Sprachen der gebildeten Völker möglichst übereinstimmen; so dafs der Mathematikstudierende imstande ist, z. B. ein in portugiesischer Sprache geschriebenes Lehrbuch der analytischen Geometrie durchzuarbeiten, ohne portugiesisch zu verstehen.*)

Die Mathematik wird aber auch als Bildungsmittel in den Schulen benutzt. Da hat der Lehrer dem Schüler die neuen Vorstellungen und Begriffe zu bringen rein in seiner Muttersprache ausgedrückt, nicht eingehüllt in ein auch erst noch zu erklärendes und zu lernendes Fremdwort. Wer beim mathematischen Unterrichte in den Volksschulen und in den mittleren Klassen der höheren Schulen fremdsprachliche Kunstausdrücke braucht, erschwert sich unnötigerweise das Einführen in das Verständnis des dem Schüler neuen Lehrgegenstandes und erweckt in vielen Anfängern, weil sie die eigenartige Kunstsprache nicht sogleich unmittelbar auffassen, eine Abneigung, die gerade bei diesem Lehrfache von folgenschwerster Bedeutung ist. Die Zeit zur Gewöhnung an solche Kunstsprache ist von Übel.

Es setzt die Volkssprache der Aufnahme von Fremdlauten Widerstand entgegen. Dieses Widerstreben spricht sich in der Umwandlung aus, welche die wirklich unter das Volk gebrachten Fremdwörter erlitten haben. Aus *quadratum* ist deutsch Quadrat, englisch *square*, französisch *carré* geworden; nur Spuren des Stammwortes sind gerade in den beiden Sprachen, welche dem Lateinischen nahe stehen. Wiewohl die Franzosen *subtrahere* als *soustraire* sich schon mundgerecht gemacht haben, brauchen sie bei weitem häufiger *retrancher*, und ähnlich verfahren sie in vielen Fällen. Auch wir haben so manches mathematische Fremdwort schon längst verdeutscht: Triangel, Rectangel, Perpendikel, Diameter, Chorde sind seit langer Zeit verschwunden, und für Hypothesis, Thesis, Parenthese, Polygon sind Voraussetzung, Behauptung, Klammer und Vieleck in Gebrauch genommen. Wir sagen: Kegel, trotz der Übereinstimmung im Englischen *cone*, Französischen *cône*, Italienischen *cono*, — Halbkugel, trotz *hemisphere*, *hémisphère*, *emisfero*,

*) Solches Buch ist in der Universitäts-Bibliothek in Göttingen.

— lieber Würfel, als Kubus, trotz *cube, cube, cubo,* — und, auf einem höheren Gebiete, nicht mehr Focus, sondern Brennpunkt, trotz *focus, foyer, fuoco.* Dies mögen genug Beispiele sein für das längst sich vollziehende Aufgeben der Fremdausdrücke für den Unterricht. Wir haben nur noch einige Schritte auf dieser Bahn weiter zu gehen, namentlich zur Hebung des grundlegenden Anfangsunterrichts. — Die Mathematiker können unter sich die Weltausdrücke weiter brauchen; das unterrichtete Volk zwingt, einheimische Wörter anzuwenden. In den oberen Klassen der höheren Schulen aber, wo die Schüler die mathematischen Begriffe aus jahrelanger Übung kennen, wird man, zumal dort die Schüler Sprachkenntnisse besitzen, auch der fremdsprachlichen Fachausdrücke sich bedienen, um den höher zu bildenden Schülern neben den mit der Mathematik sich weiter beschäftigenden die Kunstausdrücke der Wissenschaft geläufig zu machen.

Die deutschen Ersatzwörter sollen den Fremdausdrücken begrifflich mindestens gleichwertig sein. Schon vor Jahren hat man für Cylinder „Säule“, für Prisma „Kantensäule“ in Vorschlag gebracht. Es sind aber die Säulen der Baukunst keine Cylinder. Eine Säule hat etwa in der Höhe unserer Augen den gröfsten Querschnitt; sie wird nach unten ein wenig, nach oben recht erheblich schmaler. Ich sah einmal mäfsighohe Säulen aus Thon, die wirklich Cylinder waren. Sie machten schon den dickköpfigen Eindruck, wie eine umgekehrt aufgestellte Leiter (die längste Sprosse oben). Auch „Walze“ ist für Cylinder ungeeignet. Eine Walze wird stets liegend, der mathematische Cylinder gewöhnlich stehend gedacht; auch pafst Walze und Säule nicht für den schiefen Cylinder, dessen Schnitte, rechtwinklig zur Achse, Ellipsen sind. Es kann Cylinder als eingebürgert betrachtet werden. (Lampencylinder.) — Bei Anwendung von „Kant“ für Prisma kommt der Widerspruch: ein „Dreikant“ hat 9 Kanten, ein „Vierkant“ 12 Kanten. Prisma und Pyramide sind beizubehalten. — Das stets von den Schülern beim ersten Hören belächelte Wort „Parallelepipedon“ ist gewifs schon manchem Lehrer lästig geworden. Es kann, aus der Gesteinkunde, „Spat“ nicht dafür gesetzt werden; weil „Spat“ nicht eine bestimmte Gestalt bezeichnet, sondern auf Spaltbarkeit sich bezieht: „Spat, spätig ist deutlich spaltbar, blätterig“. — Die Verkürzung des siebensilbigen Wortes in „Parallelflach“ macht offenbarer das Unbestimmte des ursprünglichen Namens: viele Körper haben paarweis parallele Gegenflächen, z. B. die regelmäfsigen Körper (aufser dem Tetraeder) und die durch Abstumpfen aus ihnen hervorgehenden. Mit „Spat“ fällt auch der Vorschlag „Spateck“ für Parallelogramm, und „Gleichlaufsviereck“ ist eine verunglückte Verdeutschung. Fast alle geometrischen Lehrbücher geben an „Rhombus oder Raute“, brauchen dann aber immer nur „Rhombus“, einzig ausgenommen (soweit mir bekannt) das Lehrbuch von Ziegler (Landshut, 1870), welches jetzt kaum noch im Buchhandel ist. Sollten

wir da nicht R. Grafsmann beitreten, welcher in „Weltleben" 1881 (S. 272 u. f.) Parallelogramm durch das fast vergessene, daher in seiner früheren Bedeutung erloschene altdeutsche kurze Wort „Raute" ersetzt? Das gleichseitige Viereck braucht wie das gleichseitige Dreieck keinen besonderen Namen. Für „Parallelepipedon" ist dann das mühelos auszusprechende, begriffsstrenge Wort „Rautenprisma" gewonnen.

An das „gleichseitige Viereck" anschliefsend, weise ich hin auf die in vorliegendem Buche vollzogene Einführung des (durch je zwei anstofsende gleiche Seiten) „gleichschenkligen Vierecks". Dies bringt mehrere Vorteile. Der Lehrsatz: „Im gleichschenkligen Viereck halbiert die Mittellinie die beiden Winkel und die andere Eckenlinie und schneidet diese rechtwinklig" — giebt sofort die Lösung der Aufgaben: eine Strecke und einen Winkel zu halbieren, eine Senkrechte auf eine Gerade zu fällen, ferner den Satz über die Berührungslinien von einem Punkte an einen Kreis und den von der Stellung der gemeinsamen Sehne zweier sich schneidenden Kreise.

Die Forderung, aus Unterrichtsgründen die Weltausdrücke der Wissenschaft einstweilen beiseite zu lassen, trifft zusammen mit dem jetzt endlich allgemein gewordenen Streben, die deutsche Sprache von unnötigen Fremdwörtern zu säubern. Wie hierbei die Macht der Gewohnheit die Besserung hemmt, wird es auch manchem Lehrer schwer fallen, für die ihm geläufigen Bezeichnungen neue Ausdrücke sich einzuüben und sie anzuwenden. Aber sollten wir Lehrer aufgehört haben, etwas lernen zu wollen, und unsern Schülern zuliebe zur Förderung des Unterrichts uns der Mühe zu unterziehen nicht bereit sein? — Durch die Verfügung vom 4. Januar 1889, abgedruckt im Centralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preufsen (1889, Seite 226), macht das Königl. Provinzial-Schulkollegium von Posen allen Lehrern seines Amtsbezirks zur Pflicht, die von der Posener Direktorenversammlung gefafsten Beschlüsse (Verhandlungen von 1888, Seite 220 u. f.) in Betreff der Gewöhnung der Schüler an den Gebrauch eines reinen Deutsch zu befolgen, strenge Aufmerksamkeit auf Sprachreinheit in allen mündlichen und schriftlichen Leistungen der Schüler zu üben, sich selbst aller entbehrlichen Fremdwörter im Unterrichte, in den Jahresberichten der Anstalt und in den Beilagen zu denselben zu enthalten und so ihren Schülern ein gutes Beispiel zu geben.

Wie weit der Gebrauch eines reinen Deutsch in der Raumlehre möglich ist, zeigt das vorliegende Lehrbuch. Nicht alle Fremdwörter sind ausgemerzt; nur die, für welche ein guter deutscher Ausdruck sich darbot. Die Fremdausdrücke sind unten auf der betreffenden Seite angegeben.

Die niederländische Sprache hat für „Paragraph" Lid, d. i. Glied. Da dies Wort in „zergliedern" schon in dem Sinne gebraucht wird, erschien es einführbar.

Die jedem Gliede des Lehrbuches beigefügten „Übungen“ sind zur Auswahl vorgelegt. Der Vorrat wird hinreichend sein, daſs der Lehrer, auch an Anstalten, in welchen der mathematische Unterricht eingehender behandelt wird, in einigen Jahren mit den Aufgaben wechseln kann. Das groſs Gedruckte ist an jeder Art der höheren Lehranstalten durchzunehmen und gut einzuüben.

Ein Nachschlage-Verzeichnis in Buchstabenordnung am Ende des Buches erleichtert das Aufsuchen wichtiger Sätze und Aufgaben, sowie der Erklärungen.

Das Buch ist hervorgegangen aus dem Streben, unsern Schülern die Behandlung eines der wirksamsten Bildungsmittel des Geistes zu erleichtern, — auch diesem Unterrichte etwas von der „entsetzlichen Dürre und entsprechenden Erfolglosigkeit“ zu nehmen, — den Schülern schon auf niederen Stufen des Lernens zu dem Wohl- und Kraft-Gefühl zu verhelfen, welches die Freude an eigenem Schaffen gewährt. Möge das Buch bei den Lehrern williges Entgegenkommen finden und sich ihnen als ein brauchbares Lehrmittel erweisen!

Berlin, im Juni 1890.

Hermann Martus.

Inhaltsangabe vom ersten Teile.

Die Lehre von den ebenen Figuren.

Erste Abteilung.

Gleichheit der ebenen Raumgröfsen.

1. Abschnitt. Gleichheit der Linien und Winkel.

A. Strecken und Winkel für sich.

B. Linien und Winkel an geradlinigen Figuren.

C. Linien und Winkel am Kreise.

2. Abschnitt. Gleichheit der Figuren.

Zweite Abteilung.

Verhältnisgleichheit der ebenen Raumgröfsen.

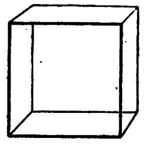
1. Abschnitt. Verhältnisgleichheit begrenzter geraden Linien. Ähnlichkeit der Figuren.

2. Abschnitt. Verhältnisgleichheit begrenzter Flächen. Inhaltsbestimmung.

Raumlehre.

1. Glied. Einleitung.

1. Denke dir einen Würfel. Aus welchem Stoffe derselbe bestand, ist uns gleichgültig. Wir betrachten nur seine Gestalt, die er durch seine Grenzen in unserer Vorstellung hat. Er wird begrenzt von 6 Flächen: unten die Grundfläche, an den Seiten herum 4 Seitenflächen und oben die Deckfläche. Die gesamte Begrenzung eines Körpers heifst seine Oberfläche. Je zwei benachbarte Flächen treffen sich in einer Kante; je drei benachbarte Flächen bilden eine Ecke. Der Würfel hat zweimal 4 Ecken und dreimal 4 Kanten.



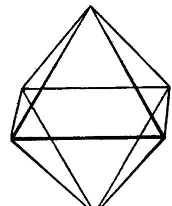
Figur 1.

Betrachten wir eine der Grenzflächen für sich. Sie wird begrenzt von 4 Linien, die am Körper Kanten hiefsen. Je zwei benachbarte Linien treffen sich in einer Ecke. Die Grenzflächen des Würfels sind Vierecke. Die Grenzlinien heifsen die Seiten des Vierecks und die gesamte Umgrenzung sein Umfang.

Jetzt denken wir nur eine der Grenzlinien allein. Die Linie wird begrenzt durch einen Punkt. Sie hat zwei Endpunkte.

Bei den Seiten des Vierecks begrenzt derselbe Punkt die beiden sich dort treffenden Linien. Also ist die Zahl der Eckpunkte der Fläche die Hälfte von viermal 2 Endpunkten. Am Würfel ist jede Viereckseite auch Grenzlinie der nächsten Fläche. Daher ist die Zahl der Kanten die Hälfte von sechsmal 4 Seiten, das sind $3 \cdot 4$, also 12. Die 6 Vierecke einzeln würden sechsmal 4 Eckpunkte haben. Die Spitze jeder Würfelecke ist Eckpunkt in drei Grenzflächen. Folglich ist die Zahl der Würfeleckpunkte der dritte Teil von sechsmal 4 Eckpunkten, das sind $2 \cdot 4$, also 8.

2. Der hierneben dargestellte Körper wird oben von 4 Flächen und unten auch von 4, also von 8 Flächen begrenzt und heifst danach Achtflächner. Der Würfel ist ein Sechsflächner. Der Achtflächner hat oben 4 Kanten, in der Mitte herum 4 und auch unten 4, also dreimal 4 Kanten, wie der Würfel. Er hat aber nur 6 Ecken. Jede Ecke dieses Körpers wird von vier Flächen umschlossen. Der Würfel hat dreiseitige Ecken. Die Grenzen des Achtflächners sind Dreiecke. Die 8 Dreiecke für sich würden achtmal 3 Seiten und $8 \cdot 3$ Eckpunkte haben; die Zahl der Kanten des Körpers ist daher $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3$, das sind $4 \cdot 3$, also 12; und die Zahl seiner Ecken $\frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 3$, also 6. Bei diesen beiden Körpern ist die Zahl der Ecken des einen gleich der Zahl der Flächen des andern; die Anzahl der Kanten stimmt überein.



Figur 2.

3. Die vier Gröfsen, welche wir eben behandelten, Körper, Flächen, Linien, Punkte, sollen nun mit einander verglichen werden. Die obere Fläche des Würfels erstreckt sich ebenso weit nach hinten, wie der Würfel; sie ist auch ebenso breit wie dieser. Während aber der Würfel noch eine gewisse Höhe oder Dicke hat, besitzt die Fläche keine Dicke; denn sie ist ja nur eine Grenze des Körpers. Die rechte Seitenfläche geht ebenso weit nach hinten, wie der Würfel, sie hat mit ihm gleiche Höhe, aber als Grenze des Körpers fehlt ihr die Breite. Der Würfel erstreckt sich nach den drei Hauptrichtungen, nach hinten, in die Breite und in die Höhe. Dasselbe gilt vom Achtflächner. Eine Fläche aber hat nur zwei Ausdehnungen, die wir nach der Lage oder Stellung der Fläche verschieden angeben (z. B. beim Fufsboden und den Wänden des Zimmers): Länge und Breite, oder Länge und Höhe, oder Breite und Höhe. Der Fläche fehlt die dritte Ausdehnung, die Dicke.*)

Da die Linie nur eine Grenze der Fläche ist, kann sie keine Breite haben; auch keine Dicke, da diese schon der Fläche fehlt. Sie besitzt nur eine Ausdehnung, die Länge.

Nachdem beim Übergehen zu den folgenden Gröfsen schon 2 Ausdehnungen fortgefallen sind, geht nun auch die letzte verloren. Der Punkt hat als Grenze der Linie gar keine Ausdehnung. (Wenn wir die Stelle, an welcher wir uns einen Punkt denken sollen, mit Kreide oder Bleistift anzeichnen, so ist die hingesetzte Marke stets ein Körper: Kreide- oder Graphit-Teilchen, welche, wenn sie auch sehr klein sind, doch noch ihre drei Ausdehnungen haben, die man mit einer Lupe deutlich sehen könnte.)

4. Jetzt betrachten wir die vier Gröfsen in umgekehrter Ordnung: Punkt, Linie, Fläche, Körper.

Denken wir uns einen Punkt fortbewegt, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie. (Die auf dem Papiere fortbewegte Bleistiftspitze liefert das Bild ihres Weges.) Wenn der Punkt bei dieser Bewegung die ursprüngliche Richtung fortwährend beibehält, so ist die Linie eine gerade; ändert er fortwährend seine Richtung, so beschreibt er eine krumme Linie; ändert er nur von Zeit zu Zeit die Richtung, so entsteht eine gebrochene Linie (ein Zickzack); auch kann er in wechselnder Folge einen aus geradlinigen und krummen Teilen gemischt zusammengesetzten Zug liefern.

Bewegt man eine Linie so, dafs jeder ihrer Punkte einen neuen Weg zurücklegt, so beschreibt die Linie eine Fläche. Ist die Bewegung eine Drehung, so kann bei einer geraden Linie 1 Punkt stehen bleiben, bei krummen Linien 2 (und wenn die krumme Linie mehrmals durch eine gerade Linie hindurch geht, bei Umdrehung um diese auch mehrere Punkte). Ist die Linie eine gerade (z. B. die Kante eines Lineals) und bewegt man sie so, dafs jeder ihrer Punkte eine gerade Linie beschreibt, so entsteht eine ebene Fläche, eine Ebene. Verschiebt man aber die Linie so, dafs ihre Punkte auf demselben Wege hinter einander hergehen, so liefert die Linie nur ihre eigene Verlängerung, also keine Fläche.

---

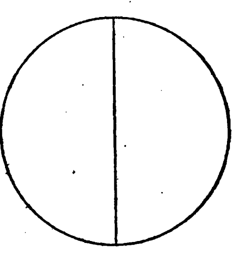
*) „Wie tief darf man mit einer Nadel in einen Körper hineinstechen, damit ihre Spitze nicht aus der Grenzfläche heraus und in das Innere des Körpers hinein gelange?" [Prof. Reidt.]

Wird eine begrenzte Fläche fortbewegt, so dafs jeder ihrer Punkte seinen eigenen Weg geht, so ist der von der Fläche zurückgelegte Weg ein körperliches Raumstück, ein Körper. Verschiebt man aber die Fläche in einer Richtung, nach welcher sie Ausdehnung hat, so zieht sie nur in ihrer eigenen Erweiterung hin und liefert keinen Körper.

Wird endlich ein Körper fortbewegt, so ist der zurückgelegte Weg immer ein Körper.

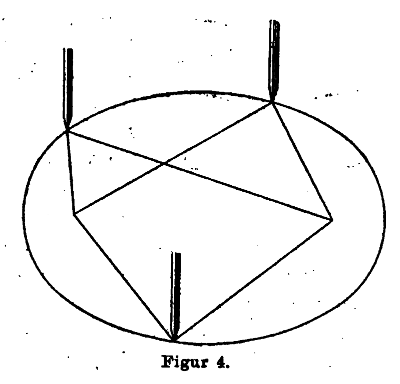
5. Führt man die Bewegung nicht willkürlich aus, sondern nach gegebenem Gesetze, so entstehen besondere Figuren.

1) Ein Punkt soll in einer Ebene um einen Punkt derselben so herumlaufen, dafs er immer gleiche Entfernung von ihm behält (wie ein Pferd, das an einer langen Leine um den Diener herumläuft). Dieser Punkt beschreibt eine Kreislinie, einen Kreis. Eine Figur für diese Aufgabe läfst sich mittels eines Papierstreifens ausführen, durch den man mit einer Stecknadel einen Stich für die Bleistiftspitze gemacht hat und den man mit der Nadel am festen Punkte auf dem Zeichenblatte festhält. (Das Herumführen des Bleistiftes wird durch die die Nadel haltende linke Hand nicht behindert, wenn man weit genug herum ausholt.) — Der feste Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises; denn die Entfernung von ihm bis zu Punkten des Kreises ist überall gleich gemacht. Zieht man von einem Punkte der Kreislinie aus eine gerade Linie durch den Mittelpunkt bis wieder an die Kreislinie, so hat der die Gerade beschreibende Punkt die Kreisfläche ganz durchlaufen und der Kreis wird von der Geraden durchmessen. Solche durch den Mittelpunkt gehende Gerade heifst ein Durchmesser, seine Hälfte, vom Mittelpunkte bis zum Kreise, ein Halbmesser des Kreises.*)



Figur 3.

2) Durch einen steifen Heftdeckel steche man mit eingefädelter Nähnadel von der Rückseite her nicht zu weit von der Mitte durch, ziehe den Faden nur wenig aus der Öffnung hervor, steche dann in einiger Entfernung wieder nach hinten durch und knote die Fadenenden auf der Rückseite nicht weit von den beiden Stichen zusammen, dafs der Faden noch ziemlich lose ist. Nun spanne man ihn auf der Vorderseite mit der Bleistiftspitze straff und führe den Bleistift rings um die beiden Nadellöcher herum, so weit es der stets gespannte Faden zuläfst; dann zieht die Spitze eine länglich runde Figur, welche eine Ellipse genannt wird. Das Gesetz, nach welchem die Spitze die krumme Linie beschrieb, ist, dafs an jeder Stelle die Entfernungen des Punktes von den beiden Stichen zusammen so grofs sind, wie die Länge des auf dem Blatte befindlichen Fadens. — Macht man den zweiten Nadelstich zu nahe bei dem ersten, so wird die Ellipse fast

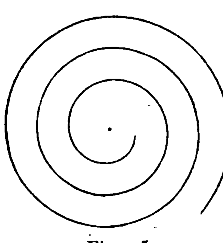


Figur 4.

*) „Radius" ist Halbmesser.

kreisrund; und wollte man den zweiten Stich in den ersten versetzen, so mufs die Ellipse zu einem Kreise werden. Warum?

3) Läuft ein Punkt in der Ebene um einen Punkt so herum, dafs er dabei sich von ihm gleichmäfsig weiter entfernt, so beschreibt er eine Spirale. In Figur 5 kommt der herumlaufende Punkt bei jedem Viertel-Umlaufe immer um 1 Millimeter weiter von dem in der Mitte stehenden Punkte ab. Solche Gestalt hat die feine Feder von Stahl in einer Taschenuhr unter der Unruhe. Sie wird in enge Windungen zusammengezogen und dehnt sich wieder aus und läfst dadurch die Unruhe hin und her schwingen.

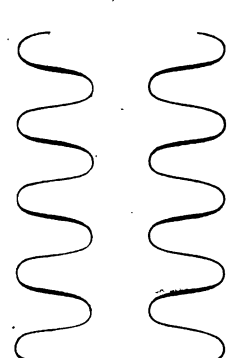


Figur 5.

4) Statt der beiden Punkte denke dir jetzt zwei gerade Linien, die frei vor dir schweben, als ob sie senkrecht herabhingen, und führe die eine um die still stehende andere immer senkrecht so herum, dafs sie von ihr stets gleich weit entfernt bleibt. Dann beschreibt die fortbewegte Linie eine Cylinderfläche (Lampencylinder).

5) Eine Cylinderfläche entsteht auch, wenn man eine Kreislinie aus ihrer Zeichenebene emporschweben denkt, so dafs ihre Punkte gleich lange gerade Linien beschreiben. Geht die Bewegung aus der Grundebene in schräger Richtung vor sich, so wird es eine schiefe Cylinderfläche.

6) Bewegt man eine Fingerspitze so herum, dafs sie, so lange man still steht, immer wieder denselben Kreis durchläuft, und geht man nun, während der Finger im Rundlaufen fortfährt, eine Strecke gerade aus, so beschreibt die Fingerspitze im Raume eine Schraubenlinie. Führt man die rundlaufende Bewegung rechtsherum aus, wie die Uhrzeiger gehen, so entsteht eine rechtsgewundene Schraubenlinie (wie am Korkzieher), bei der in entgegengesetztem Sinne (die man bequemer mit der linken Hand macht) eine linksgewundene. Wie das Entstehen der Schraubenlinie durch eine vorschreitende Bewegung angegeben wurde, betrachte man die beiden Figuren bei wagerecht liegendem Buche von dem dem Auge nächsten Punkte, dem Anfangspunkte an und verfolge ihren Lauf vom Auge fort. Dann erkennt man (indem man den Zeigefinger der rechten und der linken Hand ebenso bewegt), dafs die rechts gezeichnete rechts-, die linke linksgedreht ist. Auch wenn man die Figur von der entgegengesetzten Seite aus ansieht (wende das Buch um, so dafs die Schrift auf dem Kopfe steht), ist die Linie 7 rechts-, die Linie 6 linksgedreht. — Diese krumme Linie befindet sich auf einer Cylinderfläche. Warum? — [Lies 5) noch einmal.]



Figur 6. Figur 7.

7) Dreht man eine Kreisscheibe um einen ihrer Durchmesser als Achse, so beschreibt sie eine Kugel. Dies kann man durch eine Münze zeigen, die man mit schneller Umdrehung auf dem Tische tanzen läfst.

8) Liegt die gerade Linie, um welche die Bewegung der Kreisscheibe rund herum vor sich gehen soll, in der Ebene aufserhalb des Kreises, so liefert die Scheibe einen Ring.

6. Nach diesen Betrachtungen wird Folgendes verständlich sein.

Das, worin wir uns mit allen Dingen befinden, mit der Erde, mit dem Monde, der Sonne, den Sternen und ohne Aufhören weiter — nennen wir den Raum. Da der Raum stetig (lückenlos) ist, so ist er überall teilbar. Ein ringsum begrenzter Teil des Raumes heifst ein Körper. Eine Fläche ist die Grenze eines Körpers; eine Linie ist die Grenze einer Fläche; ein Punkt ist die Grenze einer Linie.

Ein Punkt hat keine Ausdehnung. Ein Punkt ist nur eine gedachte Stelle im Raume.

Eine begrenzte Linie kann beliebig oft geteilt werden. Dabei können die Teilchen sehr klein werden. Jedes auch noch so kleine Teilchen hat 2 Endpunkte und eine wenn auch aufserordentlich geringe Länge. Eine Linie hat unzählig viele Punkte. Man darf aber nicht sagen: eine Linie bestehe aus Punkten. Viele Punkte zusammensetzen, wäre ebenso, wie Nullen zusammenzählen.

Eine Fläche kann überall durch Linien begrenzt werden. Sie hat also unzählig viele Linien. Aber sie besteht nicht aus lauter Linien. Durch Nebeneinanderlegen von Linien, die keine Breite haben, kann nie eine Breitenausdehnung, also keine Fläche, entstehen. Ebenso wenig ist ein Körper eine Zusammensetzung von lauter Flächen. Die Blätter eines Buches geben ihm die Dicke, weil sie Körper sind.*) Die kleinsten Teilchen eines Körpers sind immer Körper.

7. Eine gerade Linie (die Kante eines Lineals) kann man um einen ihrer Punkte drehen, so dafs sie verschiedene Lagen im Raume einnimmt. In jeder Lage stellt sie eine gerade Linie dar, die wir schon vorher uns dort denken konnten. Daher:

1) **Durch einen Punkt sind unzählig viele gerade Linien möglich.** Von diesen geraden Linien sagt man: sie schneiden sich. Der gemeinsame Punkt ist ihr Schnittpunkt.

Wenn aber noch ein zweiter Punkt im Raume gegeben ist, so kann die um den ersten Punkt gedrehte gerade Linie, die wir unbegrenzt verlängert denken, nur in einer einzigen Lage durch diesen Punkt gehen. Eine krumme Linie (zu veranschaulichen durch einen gebogenen Draht) würde, ebenso behandelt, durch Drehen um die beiden Punkte sich noch in andere Lagen bringen lassen. Also gehen durch 2 Punkte viele krumme Linien derselben Art. Als ein Grundsatz ist demnach hinzustellen:

2) **Durch zwei Punkte ist nur eine einzige gerade Linie möglich.** Man kann mit scharf gespitztem Bleistift prüfen, ob die Kante eines Lineals eine gerade Linie ist. Wende nach dem Ziehen der Linie das Zeichenblatt, so dafs der ferne Blattrand nahe vor dir kommt, und ziehe an derselben Linealkante die Linie noch einmal.

Aus 2) folgt, dafs zwei gerade Linien nicht zwei Punkte gemeinsam haben können; sie würden in die einzige gerade Linie, die zwischen den beiden Punkten allein möglich ist, zusammenfallen. Mithin:

---

*) Mifst man am zusammengedrückten Schnitte eines gebundenen Buches die Dicke von 100 Blättern (200 Seiten), so findet man, dafs ein Blatt Druckpapier 0,07 oder 0,03 Millimeter dick ist.

3) **Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden.** Die zwischen zwei gegebenen Punkten einzig mögliche gerade Linie giebt die Richtung von dem einen Punkte zum andern an. Dies sagt mit andern Worten der Grundsatz:

4) **Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.** Sie bestimmt durch ihre Länge die Entfernung der beiden Punkte.

8. Eine Ebene (die vordere Fläche eines Heftdeckels) kann man um einen ihrer Punkte bewegen, dafs sie unzählige Lagen im Raume annimmt. Auch dann, wenn ein zweiter Punkt der Ebene festgehalten wird, kann man sie durch Drehen noch bewegen. Erst wenn ein dritter Punkt, der aber nicht in der durch die beiden ersten Punkte bestimmten geraden Linie liegen darf, im Raume gegeben ist, kann die Ebene nur in einer einzigen Lage durch diesen Punkt gehen.*) Also:

1) **Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte ist nur eine Ebene möglich.**

Zwei Ebenen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, haben aufser diesem noch viele Punkte gemein, nämlich alle Punkte ihrer Schnittlinie. Diese mufs eine gerade Linie sein. Denn wäre sie eine krumme, so müfsten die Ebenen in eine zusammenfallen, da sie sogar mehr als 3 Punkte gemeinsam hätten, welche „nicht in gerader Linie liegen". Demnach:

2) **Zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie.**

3) **Liegt eine gerade Linie mit zweien ihrer Punkte in einer Ebene, so liegt sie ganz darin.**

Denn man könnte durch die beiden Punkte eine Ebene legen, welche die erste Ebene in einer geraden Linie schneidet, die als Schnittlinie ganz in ihr liegt. Mit dieser fällt aber die gegebene gerade Linie zusammen, weil sie zwei Punkte mit ihr gemein hat. Sie liegt also ganz in der Ebene. Daraus folgt:

4) **Eine Ebene ist eine Fläche, in welcher man von jedem Punkte nach allen Richtungen, die in ihr möglich sind, gerade Linien ziehen kann.**

Auf einer Kugelfläche sind keine geraden Linien zu ziehen, auf einer Cylinderfläche nur in der Richtung der Länge. Wie kann man mit einem guten Kantel prüfen, ob eine Tischplatte noch eben ist, oder ob sie durch ungleiches Eintrocknen des Holzes sich gewölbt oder eingebogen hat?

5) **Zwei sich schneidende gerade Linien liegen in einer Ebene.** Nimmt man nämlich in jeder der beiden Linien einen Punkt an und legt durch diese 2 Punkte und den Schnittpunkt der beiden Linien als dritten Punkt die durch sie einzig mögliche Ebene, so liegt jede der beiden geraden Linien ganz in dieser Ebene, weil sie zwei Punkte mit ihr gemein hat.

9. Die Wissenschaft, welche die Raumgröfsen [Körper (ohne Rücksicht auf den Stoff), Flächen, Linien, Punkte] behandelt, ist die Raumlehre (Geometrie). Sie ist der eine Teil der Mathematik (Gröfsenlehre), deren anderer Teil die Zahlenlehre (Arithmetik) ist.

*) Eine Thür ist beweglich, solange sie nur an 2 Stellen, ihren Angeln, gehalten wird. Macht man aber eine dritte Stelle, die nicht in der Verbindungslinie der beiden ersten liegt, sondern am Schlofs, auch fest, so ist sie unbeweglich. Durch 3 Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, wird die Lage der Thürebene bestimmt.



Die erste Unterabteilung der Raumlehre, die Lehre von den ebenen Figuren (Planimetrie), stellt Betrachtungen nur über Gröfsen an, welche in einer Ebene liegen; die zweite handelt von den Gebilden im Raume und wird Körperlehre (Stereometrie) benannt.

10. Grundsätze dieser Wissenschaft sind ferner:

1) **Jede Gröfse ist sich selbst gleich.**
2) **Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile.**
3) **Das Ganze ist gröfser als jeder seiner Teile.**
4) **Zwei Gröfsen, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich.**
5) **Gleiches, zu Gleichem hinzugefügt, giebt Gleiches.**
6) **Gleiches, um Gleiches vermindert, giebt Gleiches.**
7) **Gleiches, gleich oft genommen, giebt Gleiches.**
8) **Gleiches, gleich geteilt, giebt Gleiches.**

11. Erklärung der Zeichen für Gleichheit und Ungleichheit.

Zur Angabe, dafs zwei Gröfsen gleich grofs sind, setzt man zwischen ihre hingeschriebene Bezeichnung das Zeichen = und liest es: „ist so grofs wie“ oder „ist so viel wie“ oder „ist gleich“.

Beispiele: 1 Meter = 100 Centimeter. $1 = {}^{10}/_{10}$. 4 Viertelbogen = 1 Bogen, auch 8 Achtelbogen = 1 Bogen; folglich sind 8 Achtelbogen = 4 Viertelbogen.

Das Zeichen $>$ bedeutet: „ist gröfser als“ oder „ist mehr als“; dagegen $<$ „ist kleiner als“ oder „ist weniger als“. Die kleinere Gröfse steht an der Spitze des Zeichens, die gröfsere an seiner Öffnung.

$1 > {}^{1}/_{10}$. 1 Centimeter $>$ 9 Millimeter.

$8 > 3$; $3 < 8$; ${}^{3}/_{8} < 1$.

99 Pfennige $<$ 1 Mark.

Die Lehre von den ebenen Figuren.

Erste Abteilung.

Gleichheit der ebenen Raumgröfsen.

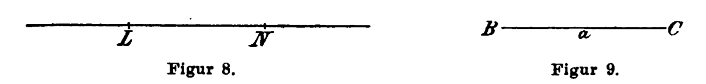
I. Abschnitt. Gleichheit der Linien und Winkel.

A. Strecken und Winkel für sich.

2. Glied. Gleiche Strecken. Kreishalbmesser.

1. Bezeichnung. Punkte werden mit grofsen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Man setzt den Buchstaben neben die markierte Stelle, an welcher man sich den Punkt denken soll.

Da eine gerade Linie durch zwei von ihren Punkten bestimmt ist, so giebt man zu ihrer Bezeichnung die Namen der beiden Punkte an: die gerade Linie, oder kurz die Gerade *LN*. Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade heifst eine Strecke. Zur Bezeichnung der Gröfse einer Strecke *BC* bedient man sich eines kleinen lateinischen Buchstabens, den man mitten an die Strecke setzt.

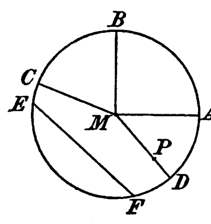


Figur 8. Figur 9.

2. Zwei Strecken sind gleich (sie haben gleiche Länge), wenn sie sich so aufeinander legen lassen, dafs ihre Endpunkte paarweise zusammenfallen. Denn dann decken sich die Strecken, weil zwischen den zusammengefallenen Endpunkten nur eine einzige Gerade möglich ist.

A———B
C———D
Figur 10.

3. Lehrsatz. **Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich.**



Figur 11.

Beweis. Der Kreis entstand dadurch (Glied 1, 5, 1), dafs eine Gerade *MA*, in einer Ebene bleibend, um einen ihrer Punkte, *M*, sich rings herum dreht, bis sie wieder in die Anfangslage zurückkehrt. Es ist also *MB* der Halbmesser *MA*, als der die Kreislinie beschreibende Punkt *A* in *B* sich befand. Dasselbe gilt von *MC*, von *MD* und von jedem Halbmesser dieses Kreises. Sie sind alle gleich.

Zusatz. Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich. Denn jeder besteht aus 2 Halbmessern.

4. Man kann den Lehrsatz in Nr. 3 auch so aussprechen: Alle Punkte des Kreises*) sind gleich weit vom Mittelpunkte entfernt, und zwar beträgt diese Entfernung die Länge des Halbmessers.

*) Unter Kreis soll stets die Kreislinie verstanden werden.

Jeder Punkt, wie P, innerhalb des Kreises, hat eine Entfernung vom Mittelpunkte, die kleiner ist, als der Halbmesser. Denn als AM den Kreis beschrieb, mufste diese Linie auch einmal in die Richtung MP kommen. Da war PM nur ein Teil von DM. Also ist $PM < AM$.

Jeder Punkt aufserhalb eines Kreises hat eine Entfernung vom Mittelpunkte, die gröfser ist, als der Halbmesser.

Hat in der Ebene eines Kreises ein Punkt eine Entfernung vom Mittelpunkte, die gleich dem Halbmesser ist, so liegt er in der Kreislinie. Ist seine Entfernung kleiner oder gröfser, als der Halbmesser, so liegt er bezüglich innerhalb oder aufserhalb des Kreises.

Da es also in der Ebene anderswo, als auf der Kreislinie, keinen Punkt giebt, welcher vom gegebenen Punkte die vorgeschriebene Entfernung hat, so weifs man:

5. Der Ort aller Punkte der Ebene, welche von einem Punkte eine gegebene Entfernung haben, ist der Kreis, welcher in der Ebene um den Punkt mit dieser Entfernung als Halbmesser zu beschreiben ist.

(Die Darstellung erfolgt mittels eines Zirkels, dessen Spitzen man in die vorgeschriebene Entfernung bringt.)

6. Erklärung. Ein durch zwei Punkte abgegrenzter Teil der Kreislinie heifst ein Bogen; die Gerade, welche seine Endpunkte E und F verbindet, seine Sehne. Geht eine Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist sie ein Durchmesser.

7. Übungen.

1) Es sind zwei Strecken a und b gegeben, und zwar $a > b$. Zeichne eine Strecke, gleich der Summe $a + b$, und eine, gleich dem Unterschiede $a - b$.*)

2) Eine Strecke zu zeichnen, welche dreimal so grofs ist, als eine gegebene.

3) Denjenigen Halbmesser eines gegebenen Kreises zu ziehen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht. (Für die Lage des Punktes sind 3 Fälle zu unterscheiden.)

4) Um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen andern gegebenen Punkt geht.

5) Die Sehne eines Kreises zu zeichnen, von welcher zwei Punkte gegeben sind.

6) In einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge einzutragen. Die gegebene Strecke darf nicht gröfser als der Durchmesser des Kreises sein.

7) Mit gegebenem Halbmesser r einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht. Gieb den Ort der Mittelpunkte aller Kreise von gleichem Halbmesser r an, welche durch den gegebenen Punkt gehen.

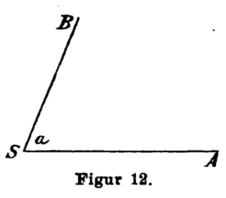
8) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte geht. Wieviel solche Kreise giebt es? Wie weit dürfen die beiden gegebenen Punkte höchstens von einander abstehen?

---

*) Man zeichnet eine Strecke zwischen zwei markierten Punkten mit dem Bleistift in der Weise gut, dafs man an dem von Punkt zu Punkt gelegten Lineale hin vom linken Punkte an nur bis in die Nähe des andern den Bleistift führt und dann von diesem aus die Linie vervollständigt.

3. Glied. Winkel.

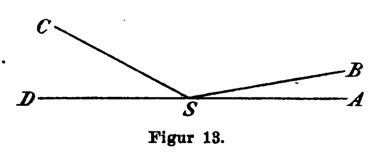
1. Zieht man von einem Punkte aus zwei gerade Linien nach verschiedenen Richtungen, so entsteht ein Winkel. Der Punkt heifst der Scheitel, die beiden Geraden die Schenkel des Winkels.



Figur 12.

Man bezeichnet einen Winkel mit den an seinen Schenkeln und am Scheitel stehenden Buchstaben, so dafs der am Scheitel in die Mitte kommt: $\angle ASB$;*) oder, wenn kein Mifsverständnis entstehen kann, nur mit dem Buchstaben am Scheitel, $\angle S$; oder auch mit einem innerhalb des Winkels nahe dem Scheitel geschriebenen kleinen griech. Buchstaben, $\angle \alpha$ (Alpha).

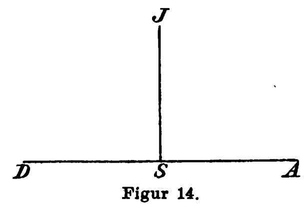
Von der Verschiedenheit der Richtung des zweiten Schenkels gegen die des ersten, SA, hängt die Gröfse des Winkels ab, nicht von der gezeichneten Länge der Schenkel: $\angle ASB$ ist spitz, $\angle ASC$ ist stumpf. Ein Zirkel, den man immer weiter öffnet, zeigt uns das Wachsen des Winkels mit zunehmender Richtungsänderung. Auch unsere lang ausgestreckten Arme zeigen es. Hat man den linken Arm so weit herumgedreht, dafs der rechte und der linke Arm nach gerade entgegengesetzten Richtungen weisen, so stellen die ganz ausgestreckten Arme einen gestreckten Winkel dar. Ein gestreckter Winkel, ASD, ist ein solcher, dessen Schenkel, SA und SD, nach gerade entgegengesetzter Richtung sich erstrecken und so eine gerade Linie bilden.



Figur 13.

Bei dem in der Ebene ausgeführten**) Drehen des zweiten Schenkels SB in die Lage SC, und schliefslich in die Richtung SD, war zuerst der rechts liegende Winkel ASB kleiner, als der andere Teil DSB des gestreckten Winkels ASD; bei der Lage SC ist der erste Winkel ASC gröfser als der linke Teil DSC. Dazwischen mufs es eine Stellung des zweiten Schenkels geben, in welcher beide Teile des gestreckten Winkels gleich sind.

$$\angle ASJ = DSJ.$$



Figur 14.

Die Hälfte eines gestreckten Winkels heifst ein rechter Winkel oder kurz ein Rechter. Man bezeichnet ihn mit R.

$$\angle ASJ = R, \quad \angle DSJ = R.$$

2. Lehrsatz. **Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.**

(Den mit der Marke 1 versehenen Buchstaben A liest man „A Eins“.)

D S A

D_1 S_1 A_1

Figur 15.

Voraussetzung: ASD und $A_1S_1D_1$ sind gestreckte Winkel.

Behauptung: $\angle ASD = A_1S_1D_1$.

---

*) Das Winkelzeichen $\angle$ ist durch die wagerechte Lage des unteren Schenkels mit dem Zeichen $<$ (kleiner als) gar nicht zu verwechseln, und bedarf daher nicht eines den Winkel entstellenden bogenförmigen Hakens.

**) Siehe 1, 8, 5.

Beweis. Legt man den zweiten gestreckten Winkel so auf den ersten, dafs S_1 in S und S_1A_1 in die Richtung SA kommt, so fallen die geraden Linien ganz zusammen; es decken sich also auch ihre Verlängerungen S_1D_1 und SD. Die gestreckten Winkel sind daher einander gleich.

Anmerkung. Überhaupt sind Winkel gleich, wenn man sie so aufeinanderlegen kann, dafs sie sich decken.

3. Lehrsatz. **Alle rechten Winkel sind einander gleich.**

Beweis. Sie sind gleich als Hälften gleicher Ganzen.

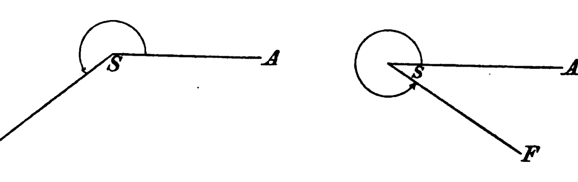
Anmerkung. Knifft man ein Blatt Papier zusammen und legt es dann quer gegen die erste Faltung noch einmal zusammen, dafs die Ränder des Kniffs genau aufeinander liegen, so laufen die Kniffe rechtwinklig zu einander.

4. Winkelmesser. In den Reifszeugen befindet sich ein Werkzeug, auf welchem ein gestreckter Winkel in 180 gleiche Teile zerlegt ist. Es besteht aus einem Halbkreisbogen und einem ihn haltenden linealartigen Teile. An letzterem bezeichnet eine in der Mitte angebrachte Ecke den Scheitel des gestreckten Winkels. Um dieses Werkzeug mit dem linealen Teile an eine gezeichnete gerade Linie in einem ihrer Punkte, welcher der Scheitel eines Winkels werden soll, scharf anlegen zu können, ist der mittlere Teil der Platte herausgeschnitten; und so sind von den vom Scheitel des gestreckten Winkels auslaufenden Teilungslinien nur die Strecken auf dem Bogenrande sichtbar. Zieht man zwei benachbarte Teilungslinien, deren Endpunkte man sich angiebt, auf dem Zeichenpapiere vollständig bis zum Scheitel, so schliefsen sie einen schmalen Winkel ein, welcher der 180ste Teil des gestreckten Winkels ist und ein Grad (1^0) genannt wird.*)

Dieses Werkzeug dient zum Messen der Winkel. Der rechte Winkel hat, als die Hälfte des gestreckten Winkels, neunzig Grade.

5. Die Arten der Winkel. Ein Winkel, welcher kleiner ist, als ein Rechter oder 90^0, heifst ein spitzer Winkel. Ein Winkel, welcher gröfser ist, als ein Rechter und kleiner als ein gestreckter Winkel oder 2 Rechte oder 180^0, heifst ein stumpfer Winkel.

Mit dem Drehen des zweiten Winkelschenkels (des zweiten Zirkelfufses) (Nr. 1) kann man über den gestreckten Winkel hinaus noch fortfahren, so dafs Winkel entstehen, deren übermäfsige Drehungsgröfse in der Figur durch den runden Pfeil angegeben ist, $\angle ASE$ und $\angle ASF$. Ja der bewegliche Schenkel kann ganz herumgehen bis wieder in die Richtung SA; dann hat er 360^0 durchlaufen.



Figur 16.

Ein Winkel, welcher (wie $\angle ASE$) gröfser ist als 2 Rechte (180^0) und kleiner als 3 Rechte (270^0), heifst überstumpf. Ein Winkel, welcher (wie ASF) gröfser ist als 3 R (270^0) und kleiner als 4 R (360^0), (welchem an

*) Als ein billiges Werkzeug von starkem Papier ist zu empfehlen: „Transporteur und Mafsstab". Verlag der Riemannschen Hofbuchhandlung in Koburg.

4 Rechten nur noch ein spitzer Winkel, *FSA*, fehlt) wird überspitz genannt.

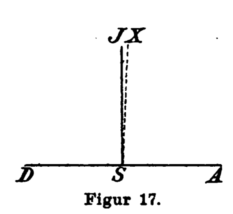
Unter der Angabe „$\angle$ *ASE*" ist der stumpfe Winkel zu verstehen, wenn nicht ausdrücklich hinzugesetzt ist, dafs der überstumpfe gemeint sei.

6. Die Senkrechte. Läfst man einen schweren Körper (einen Schlüssel) an einem Faden herabhängen, so stellt sich der Faden zum wagerechten Fufsboden senkrecht und bildet in der Ruhelage mit jeder Geraden, welche man von der durch die Verlängerung des Fadens bezeichneten Treffstelle aus im Fufsboden ziehen kann, einen rechten Winkel. Dem entsprechend nennt man eine Gerade, welche mit einer andern einen rechten Winkel bildet, eine Senkrechte oder ein Lot (wie *JS* in **3,** 1). Der Treffpunkt *S* ist der Fufspunkt der Senkrechten.

Man merke! Liegt der Ausgangspunkt der Senkrechten **in** der Geraden, so sagt man: es soll die Senkrechte in dem Punkte auf der Geraden **errichtet** werden. Liegt der Ausgangspunkt **aufserhalb** der Geraden, so sagt man: es soll die Senkrechte von dem Punkte auf die Gerade **gefällt** werden. Auf die Lage der Geraden, ob schräg, unten oder oben, kommt es dabei gar nicht an.

Dafs *JS* auf *AD* senkrecht steht, schreibt man in Zeichen: $JS \perp AD$.

7. Lehrsatz. **In einem Punkte einer Geraden läfst sich auf ihr nur eine Senkrechte errichten.**

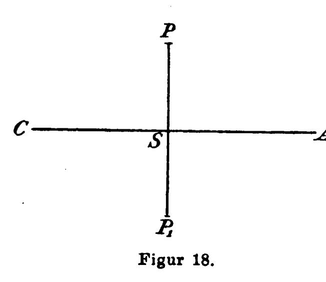


Figur 17.

Beweis. Könnte man in *S* auf *AD* aufser *SJ* noch eine zweite Senkrechte, *SX*, errichten, so wären die Winkel *ASJ* und *ASX*, von denen der eine ein Teil des andern ist, als Rechte einander gleich. (Nr. 3.) Es kann aber ein Teil nicht gleich dem Ganzen sein. Daher ist nur eine Senkrechte möglich.

Anmerkung. Eine in *S* auf *AD* schief stehende gerade Linie bildet mit *SA* und *SD* einen spitzen und einen stumpfen Winkel. Daher nennt man spitze und stumpfe Winkel, im Gegensatze zum rechten, auch schiefe Winkel.

8. Lehrsatz. **Von einem Punkte aufserhalb einer Geraden läfst sich nur eine Senkrechte auf sie fällen.**



Figur 18.

Beweis. Man denke den über der Geraden *AC* liegenden Teil der Ebene auf den unteren niedergeklappt. Dann trifft der gegebene Punkt *P* unten auf einen Punkt, der mit P_1 bezeichnet werden möge. Nun bringe man den oberen Teil der Ebene wieder an seinen ersten Platz zurück und verbinde *P* mit P_1 durch eine Gerade, welche *AC* in *S* schneidet. Dann ist PSP_1 ein gestreckter Winkel, dessen Teile *ASP* und ASP_1 beim Zusammenfalten (der Punkt *S* bleibt an seiner Stelle, und *P* fällt wieder auf P_1) sich decken, also gleich sind. Daher ist $\angle$ *ASP* ein Rechter, also $PS \perp AC$. Da es nun zwischen zwei Punkten, *P* und P_1, nur eine Gerade giebt, so ist *PS* die einzige Senkrechte.

9. Erklärung. Verlängert man einen Schenkel eines Winkels, der kleiner ist als ein gestreckter, über den Scheitel hinaus, so bildet die Verlängerung mit dem andern Schenkel einen Winkel, welcher der Nebenwinkel des ersten genannt wird.

Nebenwinkel sind also zwei Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, und deren andere Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen eine gerade Linie bilden.

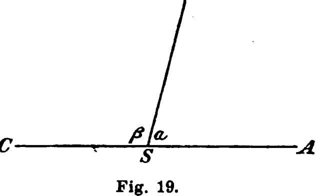


Fig. 19.



10. Lehrsatz. **Zwei Nebenwinkel sind zusammen gleich zwei Rechten.**

Voraussetzung: ASC ist eine Gerade.

Behauptung: $\angle \alpha + \angle \beta$ (Beta) $= 2$ R.

Beweis. Da SC die Verlängerung von AS ist, so ist ASC ein gestreckter Winkel; $\angle ASB$ und CSB sind seine Teile. Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile. Also ist $\angle \alpha + \beta = 2$ R.

Zusätze. 1) Gleiche Nebenwinkel sind Rechte.

2) Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist ein Rechter, der eines spitzen Winkels ist stumpf, der eines stumpfen ist spitz.

3) Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel.

4) Alle Winkel an einem Punkte auf derselben Seite einer Geraden sind zusammen gleich zwei Rechten.

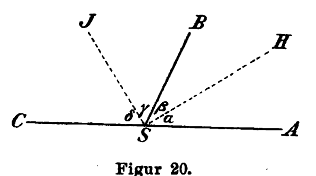
5) Alle Winkel um einen Punkt herum sind zusammen gleich vier Rechten. Zum Beweise verlängere man einen Schenkel über den gemeinsamen Scheitel hinaus, oder ziehe durch den Scheitel eine beliebige Gerade.

6) Diejenige vom Scheitel aus durch einen Winkel gehende Gerade, welche mit seinen Schenkeln gleiche Winkel bildet, also ihn halbiert, heifst seine Halbierungslinie.

Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen senkrecht auf einander.

Voraussetzung: $\angle ASB$ und CSB sind Nebenwinkel
$\angle \alpha = \beta$ und $\angle \gamma$ (Gamma) $= \delta$ (Delta).

Behauptung: $JS \perp SH$.



Figur 20.

Beweis: $\angle \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2$ R. Dafür kann man, da $\alpha = \beta$ und $\delta = \gamma$ ist, schreiben

$$\beta + \beta + \gamma + \gamma = 2 \text{ R}$$

oder

$$2\beta + 2\gamma = 2 \text{ R}$$

also (naeh **1,** 10, 8) $\beta + \gamma = $ R.

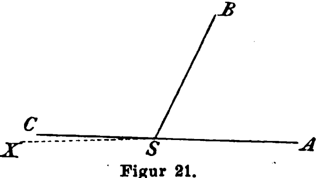
Daher ist $JS \perp SH$.

11. Umkehrung des Lehrsatzes in Nr. 10. Wenn zwei Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben und auf verschiedenen Seiten dieses Schenkels liegen, zusammen 2 Rechte betragen, so sind sie Nebenwinkel.

Voraussetzung: $\angle ASB + BSC = 2$ R.

Behauptung: ASC ist eine Gerade.

Beweis. Wäre SC nicht die Fortsetzung von AS, so könnte man AS verlängern. Es sei SX diese Verlängerung. Dann wären $\angle ASB$



Figur 21.

und BSX Nebenwinkel, also $\angle ASB + BSX = 2$ R. Dies gäbe mit der Voraussetzung $\angle ASB + BSX = \angle ASB + BSC$ und, wenn man von beiden Seiten der Gleichung $\angle ASB$ fortnimmt, bliebe

$$BSX = BSC.$$

Es kann aber das Ganze nicht gleich einem seiner Teile sein. Daher ist die Annahme, eine andere Linie als SC sei die Verlängerung von AS, unmöglich und die Behauptung richtig.

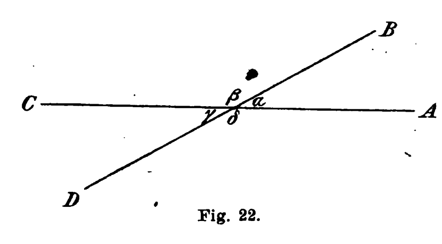


Fig. 22.

12. Erklärung. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so wird der von den Verlängerungen gebildete Winkel der Scheitelwinkel des ersten Winkels genannt.

Scheitelwinkel sind also zwei Winkel, die den Scheitel gemein haben und deren Schenkel paarweise gerade Linien bilden.

13. Lehrsatz. **Scheitelwinkel sind gleich.**

Voraussetzung: AC und BD sind gerade Linien.

Behauptung: $\angle \gamma = \alpha$.

Beweis. Als Nebenwinkel sind $\alpha + \beta = 2$ R

und auch $\gamma + \beta = 2$ R

folglich ist (nach 1, 10, 4 und 6) $\gamma + \beta = \alpha + \beta$. Zieht man von beiden Seiten der Gleichung β ab, so bleibt Gleiches: $\gamma = \alpha$.

Bemerkungen. Als Scheitelwinkel sind auch β und δ gleich.

Ein Winkel hat zwei Nebenwinkel.

14. Umkehrung. Ist einer von zwei gleichen Winkeln neben dem Nebenwinkel des andern an dessen Schenkel so angefügt, dafs sie den Scheitel gemein haben, so sind die gleichen Winkel Scheitelwinkel.

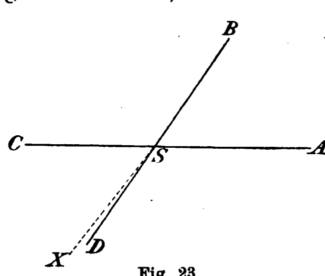


Fig. 23.

Voraussetzung: $\angle CSD = ASB$ und ASC ist eine gerade Linie.

Behauptung: Auch BSD ist eine gerade Linie.

Beweis. Wäre nicht SD, sondern etwa SX die Verlängerung von BS, so wäre

$\angle CSX = ASB$ als Scheitelwinkel;

dies gäbe mit der Voraussetzung

$\angle CSX = CSD$, was nicht möglich ist.

Folglich mufs SD die Verlängerung von BS sein.

15. Nach diesen Beispielen geben wir folgende Erklärungen.

Wir haben im Vorstehenden einige Sätze als Lehrsätze, andere als Zusätze und zwei als Umkehrung eines Lehrsatzes bezeichnet.

Ein Lehrsatz ist eine in Worten angegebene Wahrheit, welche durch Gründe bewiesen werden mufs. Ein beigefügter Zusatz ist ein Lehrsatz, dessen Begründung aus dem Hauptsatze leicht abzuleiten ist.

Ein Lehrsatz (abgekürzt Ls.) besteht aus zwei Teilen:

1) aus der Voraussetzung (abgekürzt Vs.), welche die Bedingungen angiebt, unter denen im Lehrsatze etwas ausgesagt wird; und

2) aus der Behauptung (Bh.), welche die zu beweisende Wahrheit ausspricht.

Dann mufs folgen der Beweis (Bw.), welcher die Gründe für die Richtigkeit der Behauptung darlegt.

Beim Begründen kann man auf zwei Weisen verfahren. Entweder geht man von der Voraussetzung aus, verbindet mit ihr früher bewiesene Sätze durch Schlüsse, bis die Behauptung als Folgerung sich ergiebt; oder man betrachtet alles, was in Bezug auf die Behauptung stattfinden könnte, und zeigt, dafs es nicht anders möglich ist, weil man mit der Voraussetzung oder mit früheren Sätzen in Widerspruch kommt. (Siehe Nr. 7, 11 und 14.) Das erstere Verfahren ist das bestätigende, das letztere das abweisende. Man kann sie nach dieser Erklärung kurz bezeichnen mit Beweis und Abweis.*)

Aus einem Lehrsatze läfst sich durch Vertauschen ein neuer Satz bilden. indem man die Behauptung als Voraussetzung hinstellt und die Voraussetzung (oder einen Teil derselben) zur Behauptung macht. Der neue Lehrsatz heifst dann die Umkehrung des vorigen. (Vergl. Nr. 11 und 14.) Zu beachten ist, dafs nicht jede Umkehrung auf einen richtigen Satz führt.**) Deshalb mufs die Umkehrung als Lehrsatz bewiesen werden, was meist durch das abweisende Verfahren am leichtesten geschieht.

16. Übungen.

a) Aufgaben.

1) Zeichne zu jeder Art von Winkeln ein Beispiel, den rechten Winkel mittels des rechtwinkligen Lineals oder des Winkelmessers.

2) Zeichne mittels des Winkelmessers Winkel von 60^0, 135^0, 210^0 und 300^0.

3) Wieviel Grade hat der Nebenwinkel eines Winkels von 45^0? Wieviel Rechte beträgt derselbe?

4) Zeichne dasjenige Paar von Nebenwinkeln, von deren der eine doppelt so grofs ist, wie der andere.

5) Ziehe 4 gerade Linien, welche sich in demselben Punkte unter lauter gleichen Winkeln schneiden.

6) Errichte mit Hilfe des rechtwinkligen Lineals im Scheitel eines spitzen Winkels auf beiden Schenkeln die Senkrechten und fälle von einem innerhalb des gegebenen Winkels angenommenen Punkte auf beide Schenkel die Senkrechten.

b) Lehrsätze.

7) Die Halbierungslinie eines Winkels halbiert, über den Scheitel hinaus verlängert, den Scheitelwinkel. (Bezeichne die Teile des gegebenen Winkels mit $^1/_2\,\alpha$.)

8) Die auf der Halbierungslinie eines Winkels im Scheitel errichtete Senkrechte halbiert den Nebenwinkel.

9) Wenn man auf der Halbierungslinie eines Winkels die Senkrechte durch den Scheitel zieht, so bilden die Schenkel mit ihr gleiche Winkel.

10) Wenn man im Scheitel eines Winkels auf beiden Schenkeln die Senkrechten errichtet nach derselben Seite (z. B. beide nach links), so schliefsen dieselben einen Winkel gleich dem gegebenen ein.

---

*) „Hypothesis" ist Voraussetzung. „Thesis" ist Behauptung. Ein Beweis wird „direkt" oder „indirekt" geführt.

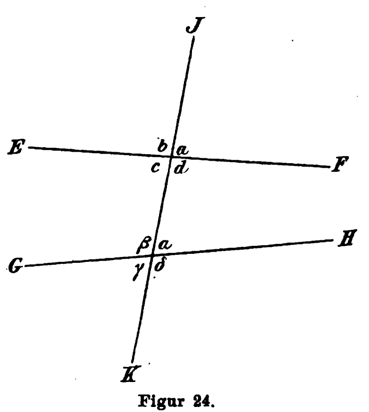
**) Satz: Wenn es Winter ist, friert der See zu. Umkehrung: Wenn der See zufriert, ist es Winter. — Satz: Wenn es regnet, ist die Strafse nafs. Umkehrung?

11) Wenn man im Scheitel eines Winkels (der kleiner als ein gestreckter ist) auf beiden Schenkeln aufserhalb nach entgegengesetzten Seiten die Senkrechten errichtet, so ergänzt ihr Winkel den gegebenen zu 2 Rechten.

---

4. Glied. Winkel an zwei von einer dritten geschnittenen Geraden. Gleichlaufende gerade Linien.

1. Erklärungen. Wenn zwei Gerade EF und GH von einer dritten Geraden JK geschnitten werden, so entstehen dadurch zweimal 4 Winkel, von denen jeder Winkel der einen Gruppe mit jedem Winkel der andern durch einen Namen verbunden wird.



Figur 24.

Zunächst scheidet man die 8 Winkel in 4 innere, zwischen den beiden Geraden befindliche, $\angle c, d, \alpha, \beta$, und 4 äufsere a, b, γ, δ.

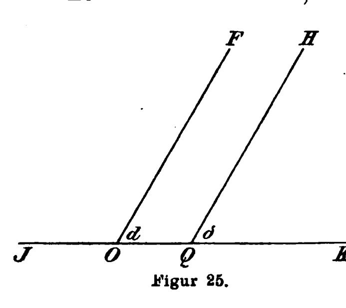
1) a und α. Gleichliegende Winkel sind diejenigen, welche auf derselben Seite, sowohl bei der schneidenden, als auch bei den geschnittenen Linien, liegen. Es sind a und α beide rechts von der schneidenden und beide oberhalb der geschnittenen Geraden. Die übrigen gleichliegenden Winkel sind b und β, c und γ, d und δ.

2) a und γ. Wechselwinkel sind solche, deren Lage wechselt, sowohl bei der schneidenden, als auch bei den geschnittenen Linien. Es liegt a rechts von der schneidenden, γ links; a liegt oberhalb der einen, γ unterhalb der andern geschnittenen Linie. Die andern äufseren Wechselwinkel sind b und δ, und die inneren c und α, d und β.

3) a und δ. Entgegengesetzte Winkel liegen auf derselben Seite der schneidenden und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien. Es sind die inneren Winkel d und α beide rechts von der schneidenden, d unterhalb der einen, α oberhalb der andern geschnittenen Geraden. Entgegengesetzte Winkel sind ferner c und β, und die äufseren b und γ, a und δ.

4) a und β. Abgewandte Winkel liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden und auf derselben Seite bei den geschnittenen Linien. Von einander abgewandt sind die Winkel a und β, b und α, c und δ, d und γ.

2. In der Ebene, in welcher die Gerade JK in der Richtung von J nach K weiter gehen soll, denken wir uns zwei gerade Linien, OF und QH, nach derselben Seite unter gleichen Winkeln, $d = \delta$, von der Richtung JK ablaufen. Wegen der gleichen Richtungsabweichung sind die beiden geraden Linien gleichgerichtet. Man kann aber jede gerade Linie, z. B. QH, auch in der Richtung von H nach Q, also in der gerade entgegengesetzten Richtung verfolgen, so dafs sie, wie in der nächsten Figur, als HQG weiter-

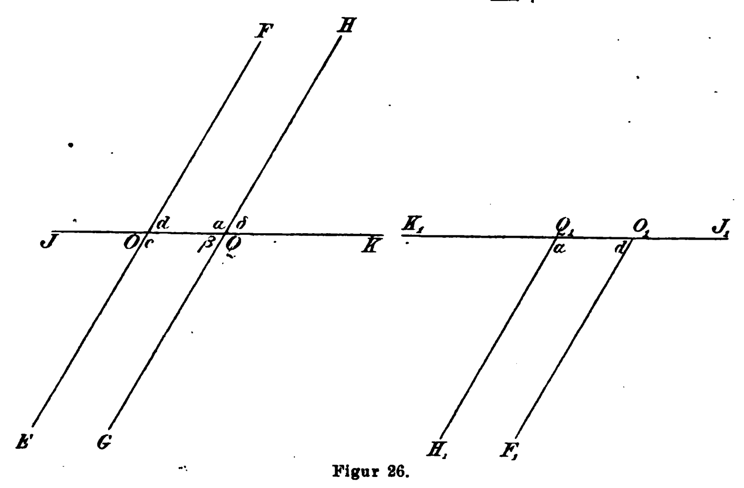


Figur 25.

läuft. Hat man dabei für die erste Gerade OF die Richtung von O nach F in der Vorstellung beibehalten, so sind dieselben Geraden, OF und HQG, entgegengesetzt gerichtete gerade Linien. So wird sie auch derjenige nennen, welcher die Richtung der ersten, OF, in der Vorstellung gewechselt hat und sie, wie in der nächsten Figur, als FOE denkt, während er die Richtung QH beibehielt. Um die Auffassung der Richtung jedem zu überlassen, nennt man gerade Linien, welche wie diese immer weiter so neben einander herlaufen, gleichlaufende Gerade. Gleichlaufende Gerade können also als gleichgerichtete oder als entgegengesetzt gerichtete gerade Linien gedacht werden. Will man aber über die Auffassung der Richtung Bestimmung treffen, so sagt man statt „gleichlaufende Gerade" „gleichgerichtete" oder „entgegengesetzt gerichtete Gerade".*)

Gleichlaufende gerade Linien haben keinen Punkt mit einander gemeinsam; auch wenn man sie beliebig weit verlängert denkt.

Beweis. Wir verlängern die beiden Geraden auch über O und Q hinaus in den andern Teil der Ebene. Es wird $\angle\ \beta = \delta$ als Scheitelwinkel,



Figur 26.

und da $\angle\ d = \delta$ sein soll, so ist $\angle\ d = \beta$. Auch ist $\angle\ \alpha = c$; sie sind Nebenwinkel gleicher Winkel. Wenn man nun den zuerst für sich gezeichneten oberen Teil der Ebene herumdreht, dadurch dafs man das Buch umkehrt, so dafs die Schrift auf dem Kopfe steht, so läfst sich die Figur mit der im unteren Teile der Ebene zur Deckung bringen. Dies zu zeigen, ist jene obere Hälfte in der umgekehrten Lage hierneben gezeichnet und mit markierten Buchstaben versehen. Legt man O_1Q_1 auf QO, so müssen diese Strecken auf einander passen, weil sie zwei Darstellungen derselben ersten Linie sind; und es kommt O_1F_1 auf QG und Q_1H_1 auf OE, weil $\angle\ d = \beta$ und $\angle\ \alpha = c$ ist; so dafs diese Geraden paarweise ihrer ganzen Richtung nach zusammenfallen. Hätten nun die beiden Geraden OF und QH in sehr grofser Ferne doch einen Punkt gemein, so müfste dies auch mit QG und OE der Fall sein, weil sie mit jenen ganz zusammengefallen sind. Es würden also

*) Unter „parallelen" Linien sind gleichlaufende Linien zu verstehen. (In dem Worte „parallel" ist die letzte Silbe lang und betont.)

die beiden Geraden EF und GH zwei gemeinsame Punkte besitzen, was bei zwei geraden Linien unmöglich ist. (**1**, 7, 2, Folgerung.) Mithin können gleichgerichtete Gerade keinen Punkt gemeinsam haben.

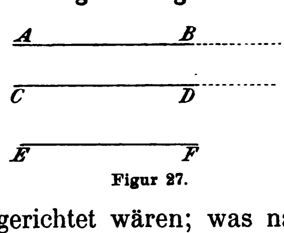
3. Jede andere durch den Punkt O gezogene Gerade, wenn sie auch der Geraden EF aufserordentlich nahe ist, verkleinert oder vergröfsert den Winkel d, so dafs ihr Winkel mit OK nicht mehr gleich δ ist. Sie sind also mit HG nicht gleich gerichtet. Demnach:

Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist nur eine einzige ihr gleichgerichtete Gerade möglich.

Zusatz. Die Lage einer Geraden ist bestimmt 1) durch zwei ihrer Punkte (**1**, 7, 2.) oder 2) durch einen ihrer Punkte und eine Gerade gleicher Richtung.

Anmerkung. Man schreibt EF „ist gleichlaufend (gleichgerichtet) mit" GH in Zeichen: $EF \parallel GH$. Sind diese Linien gleiche begrenzte Strecken, so vereinigt man die Zeichen $=$ und $\parallel$ in $\#$ „gleich und gleichlaufend".

4. Ls. **Sind zwei Gerade einer dritten gleich gerichtet, so sind sie selbst gleich gerichtet.**



Figur 27.

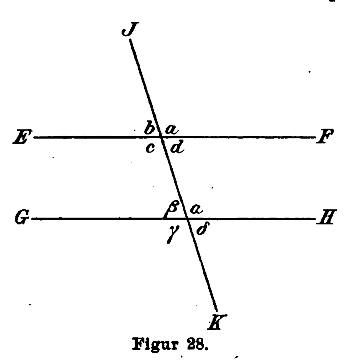
Vs. $AB \parallel EF$
$CD \parallel EF$.

Bh. $AB \parallel CD$.

Bw. Wären AB und CD nicht gleichgerichtet, so müfsten sie bei gehöriger Verlängerung sich schneiden. Dann gingen aber durch ihren Schnittpunkt X zwei Gerade, die der Linie EF gleichgerichtet wären; was nach Nr. 3 nicht möglich ist. Also müssen AB und CD selbst gleichgerichtet sein.

5. Ls. **Schneidet eine Gerade die eine von zwei Gleichlaufenden, so schneidet sie auch die andere.**

Bw. Nimmt man an, dafs die Gerade der zweiten gleichgerichtet sei, so kommt man in Widerspruch mit **4**, 3.



Figur 28.

6. Ls. **Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und sind dabei zwei gleichliegende Winkel oder zwei Wechselwinkel gleich, so sind sie gleichlaufend.**

Bw. Für den ersten Fall, dafs ein Paar gleichliegender Winkel gleich sein soll, ist der Satz schon in **4**, 2 mit $d = \delta$ behandelt. Ist ein Paar der Wechselwinkel gleich gegeben, z. B. $\angle c = \alpha$, so folgt sofort, dafs dann auch $\angle d = \delta$ ist. Deshalb sind die Geraden EF und GH gleichlaufend.

7. Ls. **Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und sind dabei zwei entgegengesetzte oder zwei abgewandte Winkel zusammen gleich zwei Rechten, so sind die Geraden gleichlaufend.**

Vs. $\angle b + \gamma = 2$ R.

Bh. $EF \parallel GH$.

Bw. Da $\angle b = d$ ist, so giebt die Voraussetzung $\angle d + \gamma = 2$ R;
es ist aber auch $\angle \delta + \gamma = 2$ R;
daraus folgt $d + \gamma = \delta + \gamma$, also $d = \delta$. Deshalb ist $EF \parallel GH$.

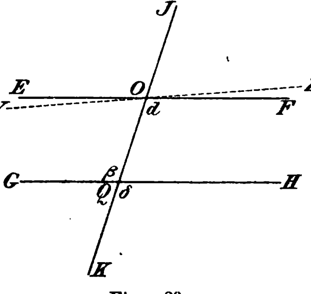
Ist $\angle b + \alpha = 2$ R gegeben, so hat man auch $b + \gamma = 2$ R, also den ersten Fall.

8. Umkehrung der beiden Lehrsätze in 6 und 7.

Werden zwei gleichlaufende Gerade von einer geraden Linie geschnitten, so sind

1) **je zwei gleichliegende Winkel und je zwei Wechselwinkel gleich, und es sind**

2) **je zwei entgegengesetzte und je zwei abgewandte Winkel zusammen gleich zwei Rechten.**



Figur 29.

Vs. $EF \parallel GH$.

Bh. $\angle d = \delta$.

Bw. Wäre der Winkel d nicht gleich δ, so müfste er entweder kleiner oder gröfser als δ sein. Wäre $\angle d$ zu klein, so könnte man durch O eine Gerade YZ legen und sie so weit von OF fortdrehen, bis nun $\angle KOZ = \delta$ wäre. Dann müfste nach **4**, 2 $YZ \parallel GH$ sein.

Nach Voraussetzung ist aber auch $EF \parallel GH$. Mithin gingen durch den Punkt O zwei mit GH gleichlaufende Gerade, was nach **4**, 3 nicht möglich ist. Wäre $\angle d$ zu grofs, so würde man YZ nach der andern Seite von OF gehörig weit drehen und käme auf denselben Widerspruch. Mithin mufs $\angle d$ gleich δ sein.

Hieraus folgt nun leicht die Richtigkeit der übrigen Behauptungen.

9. Ls. **Wenn bei zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden, zwei innere entgegengesetzte Winkel zusammen weniger als 2 Rechte betragen, so schneiden sich die Geraden in dem Teile der Ebene, in welchem die inneren Winkel liegen.**

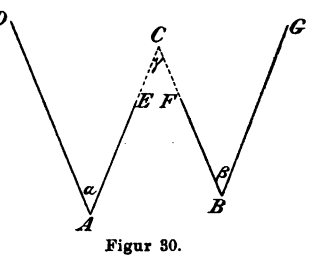
Vs. $\angle YOQ + \beta < 2$ R.

Bw. Denkt man durch O die der GH gleichgerichtete Gerade EF, so ist nach Nr. 8 $\angle EOQ + \beta = 2$ R,
folglich mufs, da nach Vs. $\angle YOQ + \beta < 2$ R ist,
$\angle YOQ < EOQ$ sein. Es liegt also OY zwischen OE und QG. Das Durchschneiden von OY und GH, welches nach Nr. 5 stattfinden mufs, erfolgt also auf der Seite von JK, auf welcher jene Winkel liegen.

10. Zusätze. 1) **Alle Senkrechten auf einer Geraden sind gleichlaufend.** (Bei einseitiger Begrenzung können auch entgegengesetzt gerichtete darunter sein.) (**4**, 6 oder 7.)

2) Steht eine Gerade auf einer von zwei Gleichlaufenden senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

11. Ls. **Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln sind gleich.**

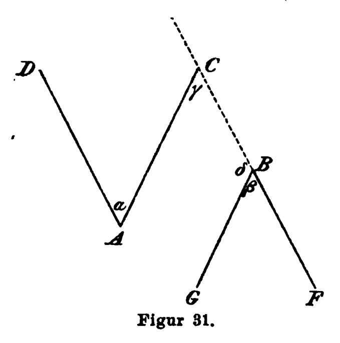


Figur 30.

Vs. $AD \parallel BF$
$AE \parallel BG$.

Bh. $\angle \alpha = \beta$.

Bw. Man verlängere zwei der nicht gleichgerichteten Schenkel bis zum Treffpunkte, welcher mit C bezeichnet werden möge, und wende **4**, 8, 1) zweimal an. [Die Figur sieht aus wie W.]



Figur 31.

Zusätze. 1) Auch Winkel mit entgegengesetzt gerichteten Schenkeln sind gleich.

2) Zwei Winkel, von deren Schenkeln das eine Paar in gleicher, das andere Paar in entgegengesetzter Richtung läuft, betragen zusammen 2 Rechte.

Bh. $\angle \alpha + \delta = 2$ R.

12. Übungen.

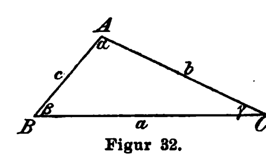
1) Die Halbierungslinien zweier Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln sind gleichgerichtet.

2) Eine Senkrechte zwischen zwei Gleichlaufenden heifst ihr Abstand. Man soll eine gegebene Strecke, die gröfser ist, als dieser Abstand, irgendwo so zwischen die beiden Gleichlaufenden legen, dafs sie in jeder von beiden endet.

B. Linien und Winkel an geradlinigen Figuren.

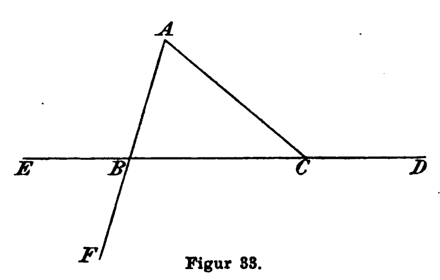
5. Glied. Das Dreieck.

1. Erklärungen. Verbindet man 3 nicht in einer Geraden liegende Punkte durch gerade Linien, so umschliefsen diese ein geradliniges Dreieck. Die Verbindungslinien heifsen die Seiten des Dreiecks, die Punkte seine Ecken oder Spitzen. Man bezeichnet das Dreieck mit den an seinen Eckpunkten stehenden Buchstaben: $\triangle ABC$, den Winkel bei A mit α, bei B mit β, bei C mit γ und die Seiten mit den den gegenüberliegenden Ecken oder Winkeln entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben: dem A oder α gegenüber liegt a; AC, B gegenüber, ist b, und AB heifst c. Statt „gegenüberliegende Seite" sagt man kurz: Gegenseite.



Figur 32.

Verlängert man eine Dreiecksseite über einen Eckpunkt hinaus, so bildet die Verlängerung mit der Nebenseite einen Winkel, welcher Aufsenwinkel des Dreiecks genannt wird. $\angle ACD$ ist ein Aufsenwinkel des Dreiecks ABC. Da jede Dreiecksseite über ihre beiden Endpunkte verlängert werden kann, so hat ein Dreieck 6 Aufsenwinkel, von denen je 2 als Scheitelwinkel gleich sind.



Figur 33.

2. Ls. **Die Summe zweier Dreiecksseiten ist gröfser als die dritte Seite.**

Bh. $a + b > c$.

Bw. Der gerade Weg von A nach B ist der kürzeste. (1, 7, 4.) Der Umweg von A über C nach B ist länger als AB.

3. Ls. **Der Unterschied zweier Dreiecksseiten ist kleiner als die dritte Seite.**

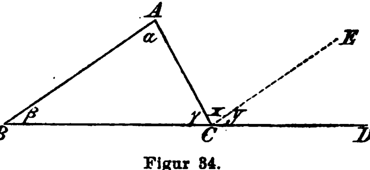
Bh. $a - b < c$.

Bw. Da $a < b + c$ ist, so folgt, wenn man von beiden Seiten dieser Ungleichung b abzieht, $a - b < c$. Dasselbe gilt von je zwei Dreiecksseiten.

4. Ls. **Jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel.**

Bh. $\angle ACD = \alpha + \beta$.

Bw. Denkt man durch den Scheitel C des Aufsenwinkels die Gerade CE in gleicher Richtung mit der Gegenseite BA gezogen, so wird bei den gleichgerichteten, von einer dritten geschnittenen Geraden



Figur 34.

$\angle x = \alpha$ als Wechselwinkel

und $\angle y = \beta$ als gleichliegende Winkel (4, 8, 1.)

folglich $\angle x + y = \alpha + \beta$ oder $\angle ACD = \alpha + \beta$.

5. Ls. **Die Summe der Winkel jedes Dreiecks beträgt 2 Rechte.**

Bh. $\angle \alpha + \beta + \gamma = 2$ R.

Bw. Fügt man zu beiden Seiten der eben bewiesenen Gleichung $\angle \alpha + \beta = x + y$ den Winkel γ hinzu, so erhält man in $\angle \alpha + \beta + \gamma = \gamma + x + y$ auf der rechten Seite den gestreckten Winkel BCD; also ist $\angle \alpha + \beta + \gamma = 2$ R.

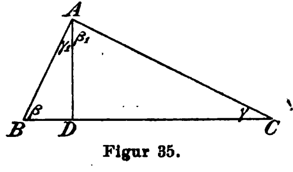
Zusätze. 1) Zwei Winkel eines Dreiecks sind zusammen kleiner als 2 Rechte.

2) Ein Dreieck kann nicht mehr als einen rechten oder einen stumpfen Winkel haben.

3) Jedes Dreieck hat wenigstens zwei spitze Winkel. Auch der dritte Winkel kann spitz sein.

4) Sind für ein Dreieck zwei seiner Winkel gegeben, so findet man den dritten, indem man ihre Summe von 2 Rechten oder 180° abzieht.

5) Haben zwei Dreiecke zwei Paar Winkel gleich, so sind auch die dritten Winkel gleich.



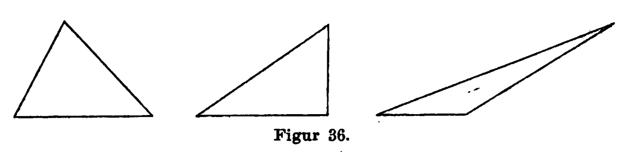
Figur 35.

6) Im rechtwinkligen Dreieck teilt die Senkrechte, welche vom Scheitel des rechten Winkels auf die Gegenseite gefällt wird, den rechten Winkel in zwei spitze, welche den spitzen Winkeln des Dreiecks, kreuzweis genommen, gleich sind.

Zum Beweise vergleicht man die Winkel eines Teildreiecks (wie ACD) mit denen des ganzen Dreiecks.

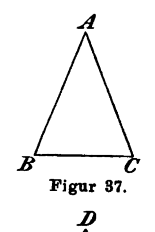
6. Einteilung der Dreiecke nach Winkeln und Seiten.

1) Man unterscheidet spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke, je nachdem alle 3 Winkel spitze sind, oder ein rechter oder ein stumpfer Winkel im Dreieck vorkommt.



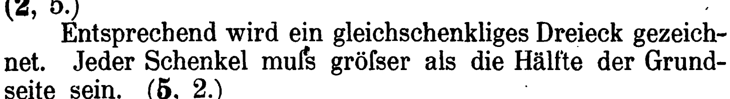
Figur 36.

2) Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich, so wird es ein gleichschenkliges Dreieck genannt. Die gleichen Seiten AB und AC heiſsen seine Schenkel, ihr Treffpunkt A die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks, die dritte Seite BC seine Grundseite; die an ihr liegenden Winkel B und C sind die Grundwinkel, $\angle A$ der an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks.



Figur 37.

Sind alle drei Seiten eines Dreiecks gleich, so heiſst es ein gleichseitiges Dreieck. Man zeichnet über der Strecke EF ein gleichseitiges Dreieck, indem man mit EF als Halbmesser um E, dann um F bei D Kreuzbogen beschreibt und ihren Schnittpunkt D mit E und F verbindet. (**2**, 5.)

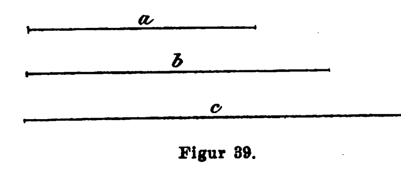


Figur 38.

Entsprechend wird ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet. Jeder Schenkel muſs gröſser als die Hälfte der Grundseite sein. (**5**, 2.)

Haben die drei Seiten eines Dreiecks verschiedene Längen, so wird es als ungleichseitiges Dreieck bezeichnet.

7. Aufgabe. **Stelle ein Dreieck her, dessen Seiten gleich den gegebenen Strecken a, b und c sind.**



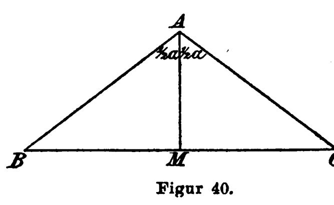
Figur 39.

Bei ihrer Wahl ist Nr. 2 zu beachten. Daſs die Bogen sich schneiden müssen, folgt aus **2**, 4, am Ende.

8. Ls. **Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.**

Vs. $AC = AB$.

Bh. $\angle B = C$.



Figur 40.

Bw. Man denke die Halbierungslinie AM des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks bis zur Grundseite BC verlängert, welche sie in M trifft, und wende das Dreieck AMC um AM um; dann fällt AC auf AB, weil $\angle MAC$ gleich $\angle MAB$ ist, und C kommt in B, da nach Voraussetzung $AC = AB$ sein soll. Von diesem Punkte B, in welchem nun C liegt, ist aber nach M nur eine gerade Linie möglich; mithin fällt auch der Schenkel CM auf BM. $\angle C$ und B decken sich also und sind deshalb gleich.

Anmerkung. Man kann diesen Lehrsatz auch so aussprechen:

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Grundwinkel gleich.

Zusätze. 1) Die Grundwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind spitz.

2) Im gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel gleich. Jeder beträgt $^2/_3$ R oder 60^0.

3) Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert auch die Grundseite und steht auf ihr senkrecht.

Bw. Weil die Dreiecke *AMC* und *AMB* sich deckten, sind $\angle$ *AMC* und *AMB* gleiche Nebenwinkel, also Rechte, und $CM = BM$.

4) 1. Umkehrung. Die Linie, welche die Mitte der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Spitze verbindet, halbiert den Winkel an der Spitze und steht auf der Grundseite senkrecht.

Bw. entsprechend durch Deckung, indem man die gleichen Winkel *C* und *B* zusammenlegt.

5) 2. Umkehrung. Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundseite gefällte Senkrechte halbiert die Grundseite und den Winkel an der Spitze.

Bw. Träfe die Senkrechte statt des Mittelpunktes *M* einen andern Punkt *X* auf *BC*, so könnte man die Mitte *M* mit der Spitze *A* verbinden und hätte nach 4) nun eine zweite Senkrechte, *AM*, von *A* auf *BC*, was nicht möglich ist. Daher mufs *AX* mit *AM* zusammenfallen, welche den Winkel *BAC* halbiert.

6) 3. Umkehrung. Errichtet man mitten auf der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks die Senkrechte, so geht sie durch die Spitze und halbiert dort den Winkel.

Bw. Ginge die Senkrechte bei der Spitze *A* vorbei, so würde man ebenso verfahren, wie in 5).

Da es also in der Ebene anderswo, als in der Senkrechten, keinen Punkt giebt, welcher die Spitze eines auf der Grundseite stehenden gleichschenkligen Dreiecks sein kann, so weifs man:

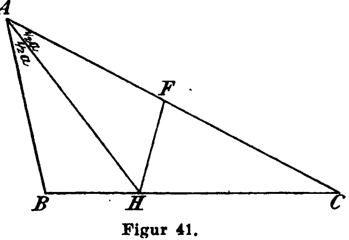
7) Der Ort der Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche dieselbe Grundseite haben, ist die mitten auf der Grundseite stehende Senkrechte (die Mittelsenkrechte). [Sie ist auch über die Grundseite hinaus verlängert zu denken.] Oder mit andern Worten:

Der Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen haben, ist die mitten auf ihrer Verbindungslinie stehende Senkrechte.

9. Ls. **Die gröfsere von zwei Seiten eines Dreiecks hat den gröfseren Gegenwinkel.**

Vs. $AC > AB$.

Bh. $\angle B > C$.



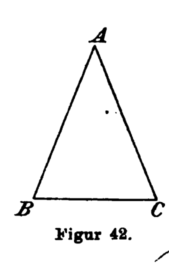
Figur 41.

Bw. In dem Winkel *BAC*, welchen die beiden ungleichen Seiten einschliefsen, denke man seine Halbierungslinie *AH* bis zur Gegenseite gezogen und das abgeschnittene Dreieck *BAH* um *AH* gedreht; dann fällt *AB* in die Richtung *AC*, weil $\angle HAB = HAC$ ist, und der Endpunkt *B* kommt in einen Punkt *F* zwischen *A* und *C*,

da $AC > AB$ ist. Die Strecke BH liegt jetzt als FH da, und der $\angle B$ ist als AFH Aufsenwinkel eines Dreiecks CFH geworden und darum gröfser als $\angle C$

Zusatz. Der gröfsten Seite eines Dreiecks liegt der gröfste Winkel gegenüber.

10. Umkehrung von **5**, 8. **Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber.**



Figur 42.

Vs. $\angle B = C$.

Bh. $AC = AB$.

Bw. Wäre $AC > AB$, so müfste nach Nr. 9 $\angle B > C$ sein, was gegen die Voraussetzung ist; und wenn $AC < AB$ wäre, müfste nach demselben Satze $\angle B < C$ sein, was nicht sein soll. Daher kann nur AC gleich AB sein.

Zusatz. Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist ein gleichschenkliges. Sind alle drei Winkel gleich, so ist es gleichseitig.

11. Umkehrung von Nr. 9. **Der gröfsere von zwei Winkeln eines Dreiecks hat die gröfsere Gegenseite.**

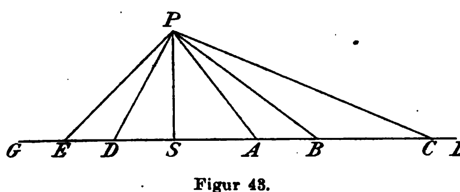
Der Beweis wird entsprechend dem in Nr. 10 geführt durch abweisendes Verfahren.

Zusatz. Dem gröfsten Winkel eines Dreiecks liegt die gröfste Seite desselben gegenüber.

Im rechtwinkligen Dreiecke ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die gröfste.*)

Die gröfste Seite eines stumpfwinkligen Dreiecks ist die Gegenseite des stumpfen Winkels.

12. Anhang. Ls. **Unter allen geraden Linien, welche man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste.** Sie werden um so gröfser, je weiter ihre Fufspunkte vom Fufspunkte der Senkrechten sich entfernen.



Figur 43.

Der Beweis ist sehr leicht.

Anm. Die Senkrechte heifst der Abstand des Punktes von der Geraden. Der Abstand der Spitze eines Dreiecks von der Gegenseite ist die Höhe des Dreiecks über dieser Grundseite.

13. Umkehrung. **Die kürzeste von allen Geraden, welche man von einem Punkte aufserhalb einer Geraden nach dieser ziehen kann, steht senkrecht auf ihr.**

Bw. Stände die kürzeste Linie PS nicht senkrecht auf der Geraden GL, so könnte man von P die Senkrechte auf GL fällen. Dann wäre sie nach Nr. 12 kürzer als die kürzeste Linie PS. was unmöglich ist. Daher mufs PS auf GL senkrecht stehen.

---

*) Derselben einen besonderen Namen, Hypotenuse, zu geben, ist nicht nötig. Die kleinen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nannte man Katheten.

14. Übungen.

1) Der Aufsenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so grofs, wie ein Grundwinkel.

2) Die Halbierungslinien der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks schneiden sich unter einem halben rechten Winkel. (Die beiden andern Winkel sind $1\frac{1}{2}$ R.)

3) Wie grofs sind die Winkel eines Dreiecks, in welchem der zweite das Doppelte, der dritte das Dreifache des ersten Winkels ist? — Kann man ein solches Dreieck durch ein gleichseitiges sich verschaffen?

4) Im gleichschenkligen Dreiecke bestimmt ein Winkel die beiden andern. Er sei z. B. 60^0, oder 90^0. Wie grofs sind die beiden andern Winkel?

5) Verbindet man die Endpunkte eines Kreisdurchmessers mit dem Endpunkte des auf ihm senkrechten Halbmessers, so werden die Sehnen die Schenkel eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks.

6) Man fälle in einem gleichseitigen Dreiecke von 2 Spitzen auf die Gegenseiten die Senkrechten und berechne die Winkel, unter welchen sich beide schneiden. (Nr. 8, Zs. 5.)

7) Legt man durch ein gleichschenkliges Dreieck eine Gerade in gleicher Richtung mit einer Seite, so wird das abgeschnittene Dreieck auch gleichschenklig. (Hierbei sind 2 Fälle zu unterscheiden.)

8) Schneidet man auf den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks von den Endpunkten der Grundseite aus gleiche Strecken ab, so läuft die Verbindungslinie der Endpunkte in gleicher Richtung mit der Grundseite. (4, 6.)

9) Die Senkrechten, welche irgendwo auf den Schenkeln eines Winkels stehen, schneiden sich unter Winkeln, welche dem gegebenen oder seinem Nebenwinkel gleich sind. (Die Senkrechten können sich aufserhalb oder innerhalb des gegebenen Winkels schneiden. Man beachte den Durchschnitt einer Senkrechten mit dem andern Schenkel.)

10) In einer gegebenen Geraden einen Punkt zu finden, welcher von einem aufserhalb derselben gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat. — Unter welche Länge darf die gegebene Entfernung nicht hinabgehen?

---

6. Glied. Ganz übereinstimmende Dreiecke.

Nach der Zahl der Seiten sind die drei ersten Sätze geordnet; der vierte Satz, der mit besonderer Bestimmung, erhält auch eine besondere Stellung. Da also die Nummer den Satz erkennen läfst, so werden später die 4 Sätze nur durch ihre Nummer bezeichnet.

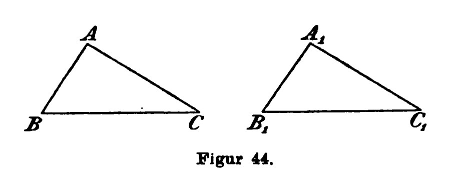
Die Seiten und Winkel einer Figur werden ihre Stücke genannt.

1. Erster Satz. **Haben Dreiecke eine Seite und zwei gleichliegende Winkel entsprechend gleich, so stimmen sie in allen Stücken überein.**

Das Zeichen für völlige Übereinstimmung ist $\cong$ und wird gelesen „stimmt überein mit“.*)

*) „Kongruent“ ist ganz übereinstimmend.

Erster Fall. Die Winkel liegen beide an der Seite.



Figur 44.

Vs. $B_1C_1 = BC$
$\angle B_1 = B$
$\angle C_1 = C.$

Bh. $\triangle A_1B_1C_1 \cong ABC.$

Bw. Denkt man das zweite Dreieck $A_1B_1C_1$ so auf das erste gelegt, dafs die gleichen Seiten B_1C_1 und BC mit den gleichbenannten Eckpunkten sich decken, so fällt B_1A_1 in die Richtung BA, weil, wenn sie rechts abwiche, der Winkel B_1 kleiner als B wäre, und fiele sie links daneben, so erwiese sich $\angle B_1$ gröfser als B. Wegen Gleichheit der Winkel C_1 und C gilt dasselbe von C_1A_1 und CA. Da zwei Gerade sich nur in einem Punkte schneiden, so liegt nun auch der Eckpunkt A_1 auf dem Schnittpunkte A. Mithin decken sich alle Grenzen der beiden Dreiecke. Sie stimmen also in den gleichliegenden Seiten und Winkeln völlig überein.

Zweiter Fall. Der eine Winkel liegt an der Seite, der andere ihr gegenüber.

Bw. Da $\angle B_1 = B$ und $\angle A_1 = A$ sein soll, so sind auch die dritten Winkel, C_1 und C, einander gleich. (**5**, 5, Zs. 5.) Die Dreiecke erfüllen also die Bedingungen des ersten Falles und stimmen deshalb ganz überein.*)

Anmerk. Von den 6 Stücken, den 3 Seiten und den 3 Winkeln, in jedem der beiden Dreiecke, kannten wir die Gleichheit von nur drei Paaren. Jetzt wissen wir, dafs auch die übrigen drei Paare gleich sind: Seite $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$ und die dritten Winkel. Bei diesem Gleichsetzen sind die gleichliegenden Stücke zusammenzustellen. Gleichliegende Seiten sind die Gegenseiten gleicher Winkel. $\angle B_1 = B$ bringt $A_1C_1 = AC$. Und gleichliegende Winkel sind die Gegenwinkel gleicher Seiten. Dies ist genau zu beachten, besonders wenn die Dreiecke nicht, wie hier, in entsprechender Lage vor Augen stehen.

Die Gleichheit von Strecken oder Winkeln wird am leichtesten dadurch nachgewiesen, dafs man zeigt: sie sind gleichliegende Stücke in übereinstimmenden Dreiecken.

2. Zweiter Satz. **Haben Dreiecke zwei Seiten und den Zwischenwinkel entsprechend gleich, so stimmen sie ganz überein.**

Vs. $A_1B_1 = AB$
$B_1C_1 = BC$
$\angle B_1 = B.$

Bh. $\triangle A_1B_1C_1 \cong ABC.$

Bw. Denkt man, wie vorher, $\triangle A_1B_1C_1$ so auf ABC gelegt, dafs B_1C_1 die Seite BC deckt, so fällt aus demselben Grunde B_1A_1 auf BA und ihr Endpunkt A_1 kommt in A, weil $A_1B_1 = AB$ ist. Da nun zwischen den Punkten A und C nur eine Gerade möglich ist, so fällt A_1C_1 mit AC zusammen und alle Grenzen der beiden Dreiecke decken sich.

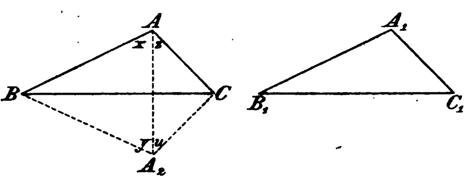
*) Weil die Dreiecke bei gehörigem Aufeinanderlegen sich deckten, sagt man auch: sie sind deckbar. Man kann das Zeichen $\cong$ auch lesen „ist deckbar mit".

Daher sind die gleichliegenden drei andern Stücke auch gleich: $\angle A_1 = A$, als Gegenwinkel der gleichen Seiten B_1C_1 und BC, $\angle C_1 = C$ und Seite $A_1C_1 = AC$.

3. Dritter Satz. **Haben Dreiecke die drei Seiten entsprechend gleich, so stimmen sie überein.**

Vs. $A_1B_1 = AB$
$B_1C_1 = BC$
$C_1A_1 = CA$.

Bh. $\triangle A_1B_1C_1 \cong ABC$.



Figur 45.

Bw. Hier wenden wir in unserer Vorstellung das zweite Dreieck $A_1B_1C_1$ um (A_1 nach unten) und denken es an das erste gelegt, so daſs es neben der gröſsten Seite BC als BA_2C sich befindet mit B_1 in B und C_1 in C. Dann verbinden wir die freien Eckpunkte A und A_2 durch die Gerade AA_2. Nun haben wir auf jeder Seite derselben ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundwinkel gleich sind:

$$\angle y = x$$
$$\angle u = z$$

deren Summe giebt $\angle BA_2C = \angle BAC$,

also wissen wir nun, daſs $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ ist. Die sie einschlieſsenden Seiten sind nach Voraussetzung gleich; mithin stimmt nach dem 2. Satze

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong ABC.$$

Demnach sind in diesen Dreiecken die Gegenwinkel gleicher Seiten gleich.

Anmerk. Wir setzten die Dreiecke mit den gröſsten Seiten an einander, damit die Verbindungslinie die Seite BC selbst schneide. Legt man zwei stumpfwinklige Dreiecke mit einem Schenkel der stumpfen Winkel an einander, so wird diese Seite erst in ihrer Verlängerung von der Hilfslinie geschnitten (wie man an den beiden Dreiecken der Figur leicht erkennt), und man muſs das kleine Winkelpaar vom groſsen abziehen. Obiges Verfahren paſst auf alle Dreiecke.

4. Vierter Satz. **Haben Dreiecke zwei Seiten und den Gegenwinkel der gröſseren entsprechend gleich, so stimmen sie überein.**

Vs. $A_1B_1 = AB$
$A_1C_1 = AC$
$AC > AB$
$A_1C_1 > A_1B_1$
$\angle B_1 = B$.

Bh. $\triangle A_1B_1C_1 \cong ABC$.

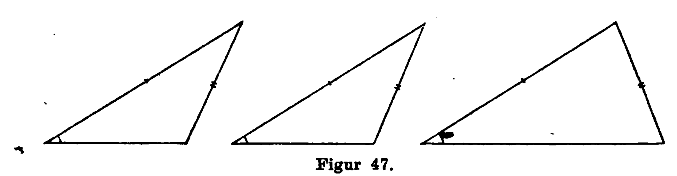
Figur 46.

Bw. Wir denken das zweite Dreieck so auf das erste gelegt, daſs die gleichen Winkel B_1 und B mit ihren gleichbenannten Schenkeln zusammenfallen. $A_1B_1 = AB$ bewirkt, daſs A_1 in A trifft. Wäre die Seite B_1C_1 kürzer als BC, so endigte sie vor C etwa in C_2 und A_1C_1 käme als AC_2 zu liegen. Diese Seite AC_2 wäre (als A_1C_1) gleich AC, also das Dreieck AC_2C gleichschenklig und $\angle AC_2C = \angle ACC_2$. Der Winkel AC_2C ist aber als Auſsenwinkel des Dreiecks ABC_2 gröſser als $\angle B$, also wäre auch $\angle ACC_2$ (oder ACB) gröſser als $\angle B$ und darum müſste Seite AB gröſser als AC sein, was gegen die Voraussetzung ist. Wäre aber die Seite B_1C_1

länger als BC, so fiele ihr Endpunkt C_1 hinter C und A_1C_1 befände sich in der Lage AC_3. Dann gäbe $AC_3 = AC$ den Winkel AC_3C gleich $\angle ACC_3$, der als Aufsenwinkel gröfser als Winkel B ist, also wäre $\angle AC_3C > \angle B$ oder für das zweite Dreieck $\angle C_1 > \angle B_1$ und damit Seite $A_1B_1 > A_1C_1$, was auch der Voraussetzung widerspricht. Demnach kann der Punkt C_1 nur auf C fallen. Die Grenzen der Dreiecke decken sich vollständig.

Deshalb sind die gleichliegenden drei andern Stücke auch gleich.

Anmerkung. Wenn in Dreiecken zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren gleich sind, können die Dreiecke übereinstimmen, sie müssen es aber nicht, wie folgende Dreiecke mit den markierten 3 gleichen Stücken zeigen



Figur 47.

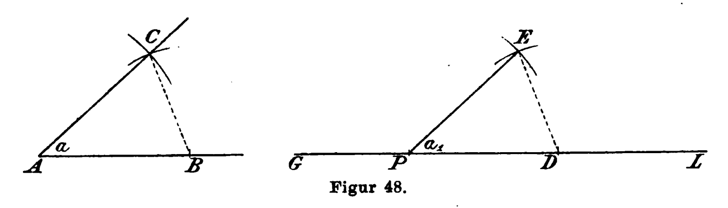
Solche Dreiecke erhält man dadurch, dafs man die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit irgend einem Punkte der Grundseite oder ihrer Verlängerung verbindet (den Mittelpunkt der Grundseite ausgenommen) und die Dreiecke getrennt hinzeichnet.

Ein solcher Lehrsatz mit dem kleineren Gegenwinkel darf also nicht aufgestellt werden; man müfste denn hinzufügen, dafs die Gegenwinkel der gröfseren Seiten gleichartige Winkel sind, d. h. beide stumpf, oder beide spitz.

Schlufsbemerkung. Mit dem vierten Satze sind die möglichen Verbindungen von je 3 dieser Bestimmungsstücke des Dreiecks erschöpft. Denn die als vorderste zu denkende Zusammenstellung „keine Seite und 3 Winkel“ ist unzulässig, weil durch zwei Dreieckswinkel der dritte schon bestimmt ist, so dafs hierbei nur zwei Bestimmungsstücke gegeben wären, die in der That in sehr verschieden grofsen Dreiecken vorkommen können. In jedem der durch die obigen 4 Sätze angegebenen Fälle sind aus den 3 Bestimmungsstücken nur Dreiecke von gleicher Gestalt und Gröfse herzustellen, die allein durch ihre Lage in der Ebene sich von einander unterscheiden. Dies wird in Nr. 6 behandelt werden.

5. Hilfsaufgaben.

1) **An eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte einen Winkel anzulegen, der einem gegebenen gleich ist.**



Figur 48.

Ausführung. Um an der geraden Linie GL im Punkte P als Scheitel einen Winkel, so grofs wie α, zu erhalten, schneidet man auf seinen Schenkeln

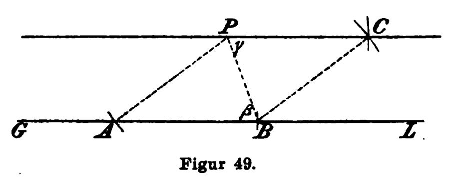
vom Scheitel A aus beliebige Strecken (am bequemsten gleiche) AB und AC (mit dem Zirkel) ab und dieselben auch von P her auf GL bis D und oberhalb durch einen Bogen in der Gegend bei E; dann schneidet man mit BC als Halbmesser von D her in diesen Bogen ein und verbindet den Schnittpunkt E mit P. $\angle EPD$ ist der verlangte Winkel.

Beweis. Nachdem BC und DE gezogen, stimmt $\triangle PDE \cong ABC$ (3. Satz), also ist $\angle \alpha_1 = \alpha$.

Bemerkung. Den Winkel α kann man an GL in P in 4 Lagen antragen, nämlich oberhalb oder unterhalb der Geraden, nach rechts oder nach links geöffnet. Soll die Aufgabe eine vollkommen bestimmte sein, so mufs die gewünschte Lage mit angegeben werden.

2) **Durch einen aufserhalb einer geraden Linie gegebenen Punkt die mit ihr gleichgerichtete Gerade zu ziehen.**

Ausführung. Vom gegebenen Punkte P aus schneidet man in die Linie GL mit hinreichender Zirkelöffnung irgendwo nach links, bei A, ein und macht rechts einen Bogen in der Gegend von C; dann trägt man denselben Halbmesser von A aus auf GL ab, bis B, und schneidet von B aus in den rechts gemachten Bogen ein. Die durch den Schnittpunkt C von P her gezogene Gerade ist die verlangte.



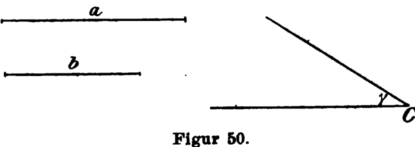
Figur 49.

Zum Beweise zieht man PA, PB und BC. Nach dem 3. Satze stimmt $\triangle ABP \cong CBP$; daraus folgt, dafs ihre Winkel bei B und P gleich sind (alle vier). Wegen der gleichen Wechselwinkel β und γ ist $PC \parallel GL$. (4, 6.)

6. Hauptaufgaben.

1) **Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel herzustellen.** Die Ausführung ist sehr leicht.

Alle Dreiecke, welche aus diesen Gröfsen, a, b und γ, hergestellt werden, stimmen überein. Es mufs $\angle \gamma < 2$ R sein; a und b können jede beliebige Länge haben.



Figur 50.

2) **Ein Dreieck herzustellen aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.**

Welcher Einschränkung ist die Gröfse der beiden Winkel unterworfen? (4, 9.)

3) **Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und ihrem Gegenwinkel.**

Zur Herstellung werde bei demselben Eckpunkte auch der andere Winkel gehörig angetragen und dann nach Nr. 5, 2) verfahren.

Die Aufgabe zum 3. Satz ist schon behandelt in 5, 7, und wurde benutzt zu den Aufgaben in Nr. 5.

4) **Ein Dreieck zu bilden aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der gröfseren.**

Man fange mit dem Winkel an. **2**, 5. Da selbstverständlich der gegebene Winkel kleiner als ein gestreckter sein mufs, so ist die Herstellung eines solchen Dreiecks immer möglich. (**2**, 4 am Ende.)

5) **Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren.**

Der gegebene Winkel mufs ein spitzer sein. Durch zu geringe Länge der kleineren Seite kann die Aufgabe unmöglich werden. (**5**, 12.) Im Grenzfalle wird das Dreieck rechtwinklig. (**5**, 13.) Bei genügender Länge der kleineren Seite entstehen 2 Dreiecke, welche der Forderung entsprechen. Vergleich die Anmerkung zu Nr. 4.

7. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke ein Winkel 30^0 oder 60^0, so ist seine kleinste Seite halb so lang, wie die gröfste. (Man zeige, dafs das rechtwinklige Dreieck die Hälfte eines gleichseitigen ist.)

2) Im gleichschenkligen Dreiecke sind die von den Endpunkten der Grundseite auf die Schenkel gefällten Senkrechten gleich, oder: die auf den Schenkeln stehenden Höhen sind gleich. (**5**, 12, Anm.)

3) Schneidet man auf jeder Seite eines gleichseitigen Dreiecks von einem Eckpunkte aus eine gegebene Strecke ab (von jedem Eckpunkte nur einmal ausgehend), so entsteht durch Verbindung der Teilpunkte ein gleichseitiges Dreieck.

4) Trägt man in einem gleichschenkligen Dreiecke von den Endpunkten der Grundseite aus auf dem einen Schenkel selbst und auf der Verlängerung des andern gleiche Strecken ab, so wird die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch die Grundseite halbiert. — Beweis mittels einer Hilfslinie, die von einem Endpunkte in Richtung des andern Schenkels zur Grundseite (oder ihrer Verlängerung) läuft.

5) Im gleichschenkligen Dreiecke schneiden sich die drei Höhen in einem Punkte. (**5**, 12, Anm.) (Die von der Spitze A des gleichschenkligen Dreiecks gefällte Senkrechte werde von der folgenden im Punkte H und von der dritten in einem Punkte geschnitten, der mit H_1 bezeichnet werden möge. Man zeige durch übereinstimmende Dreiecke, dafs $AH_1 = AH$ ist.)

b) Aufgaben.

6) Von einem gegebenen Punkte aus eine gerade Linie zu ziehen, welche eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet. Nr. 5, 1) und 2).

7) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dafs sie von den Schenkeln eines gegebenen Winkels gleiche Stücke abschneidet. Nr. 5, 2).

---

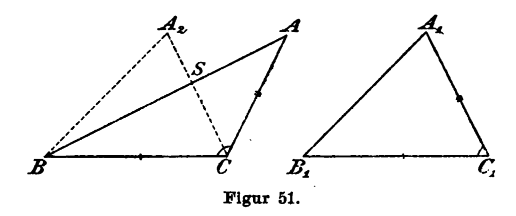
7. Glied. Nur zum Teil übereinstimmende Dreiecke.

1. Ls. **Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten entsprechend gleich, die Zwischenwinkel aber nicht gleich, so hat der gröfsere Winkel die gröfsere Gegenseite.**

Vs. $BC = B_1C_1$
$AC = A_1C_1$
$\angle C > C_1$.

Bh. $AB > A_1B_1$.

Bw. Wenn man $\angle C > C_1$
von der Gleichung $\angle A + B + C = \angle A_1 + B_1 + C_1$ abzieht, so bleibt die Ungleichung $\angle A + B < \angle A_1 + B_1$. Deshalb kann nicht zugleich $\angle A_1 < A$ und $B_1 < B$ sein; wenigstens der eine mufs gröfser sein, als der entsprechende des Dreiecks ABC. Es sei $\angle B_1 > B$. Mit den gleichen Schenkeln dieser Winkel lege man die Dreiecke auf einander, also B_1C_1 auf BC mit B_1 in B. Dann fällt B_1A_1 als BA_2 aufserhalb des Dreiecks ABC, und C_1A_1 mufs, da $\angle C_1 < C$ ist, in der Lage CA_2 die Seite AB schneiden. Der Schnittpunkt sei S. Nun ist



Figur 51.

$$AS + SC > AC$$
und
$$BS + SA_2 > A_2B$$
deren Summe giebt $AB + A_2C > AC + A_2B$, woraus die nach Voraussetzung gleichen Seiten $A_2C = AC$ sich fortheben;
daher ist $AB > A_2B$
also, wie behauptet wurde, $AB > A_1B_1$.

2. Umkehrung. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten entsprechend gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so hat die gröfsere Seite den gröfseren Gegenwinkel.

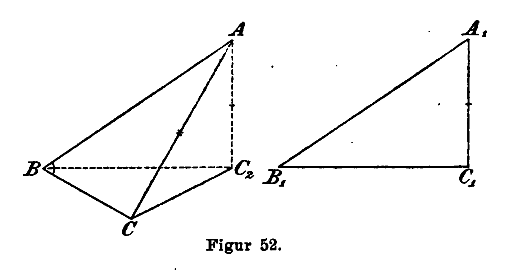
Beweis durch das abweisende Verfahren. (**6**, 2. Satz und **7**, 1.)

3. Ls. Haben zwei rechtwinklige Dreiecke die gröfsten Seiten gleich, und ist ein Winkel des einen Dreiecks gröfser als ein Winkel des andern, so hat er die gröfsere Gegenseite.

Vs. $\angle C = C_1 = R$
$AB = A_1B_1$
$\angle B > B_1$.

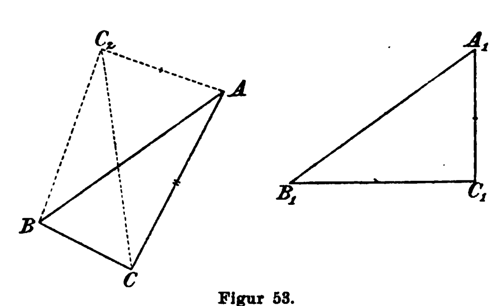
Bh. $AC > A_1C_1$.

Bw. Die Winkelsummen liefern zu $\angle B > B_1$ den Winkel $A < A_1$. Daher kommt, wenn man die gleichen Seiten A_1B_1 und AB auf einander legt mit A_1 in A, die Seite A_1C_1 als AC_2 aufserhalb des Dreiecks ABC zu liegen und BC_2 schneidet AC. Zieht man nun CC_2, so wird $\angle CC_2A$ gröfser als der rechte Winkel BC_2A, also stumpf, und daraus folgt $AC > AC_2$ oder A_1C_1.



Figur 52.

4. Haben zwei rechtwinklige Dreiecke die gröfsten Seiten gleich, ein Paar der kleineren Seiten aber ungleich, so ist auch das zweite Paar ungleich, und zwar hat dasjenige Dreieck die kürzere Seite, welches die längere andere besitzt.



Figur 53.

Vs. $\angle C = C_1 = R$
$AB = A_1B_1$
$AC > A_1C_1$.

Bh. $BC < B_1C_1$.

Bw. Hier lege man die beiden Dreiecke neben einander mit den gleichen Seiten AB und A_1B_1 so zusammen, dafs die ungleichen Seiten AC und A_1C_1 in A an einander stofsen, und ziehe die Hilfslinie C_2C. Dann ist im $\triangle\ AC_2C$ wegen $AC > AC_2$ $\angle\ AC_2C > ACC_2$ und darum bleibt von den gleichen rechten Winkeln übrig $\angle\ BC_2C < BCC_2$, folglich ist $BC < BC_2$ oder B_1C_1.

5. Übungen.

1) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke ein Paar der kleineren Seiten gleich, das andere aber ungleich, so sind auch die gröfsten Seiten ungleich, und zwar hat dasjenige Dreieck die längere, welches die längere kleinere Seite besitzt. (Siehe die Figur in 5, 12.)

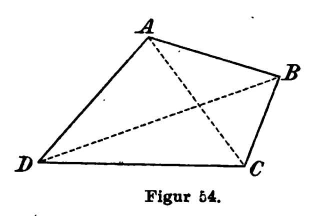
2) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke ein Paar der kleineren Seiten gleich, aber das andere oder die gröfsten Seiten ungleich, so sind die Gegenwinkel der gleichen Seiten ungleich, und zwar liegt an der gröfseren Seite der kleinere Winkel. (Figur in 5, 12.)

3) Stimmen zwei Dreiecke in den Winkeln überein, ist aber eine Seite des ersten Dreiecks gröfser als die entsprechende des zweiten, so sind auch seine andern Seiten gröfser als die entsprechenden des zweiten Dreiecks.

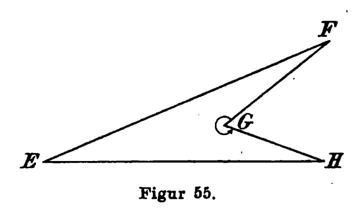
---

8. Glied. Das Viereck.

1. Erklärungen. Verbindet man 4 Punkte, von denen nicht 3 in einer Geraden liegen, der Reihe nach durch gerade Linien, so umschliefsen diese als Seiten ein Viereck.*)



Figur 54.



Figur 55.

Erhält das Viereck eine einspringende Ecke, FGH, so besitzt es dort einen Winkel, der gröfser als 2 Rechte und kleiner als 4 Rechte ist.

Die Geraden, welche zwei Eckpunkte des Vierecks verbinden, ohne Seiten zu sein, heifsen seine Eckenlinien. (Im ersten Viereck AC und BD, im andern EG und auch FH.) Ein Dreieck hat keine Eckenlinien.

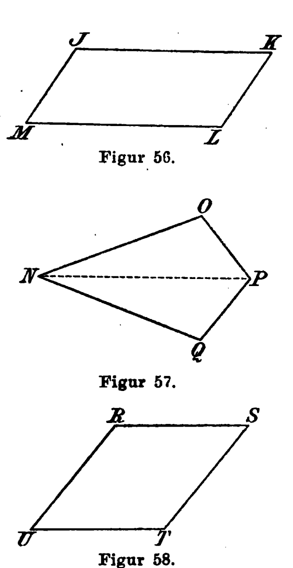
---

*) Die Schüler sollen die Figuren erheblich gröfser zeichnen, als sie in diesem Buche der Platzersparnis wegen gemacht sind.

Ein Viereck mit je zwei gleichen Gegenseiten werde eine **Raute** genannt*) (*JKLM*).

Ein Viereck mit je zwei anstofsenden gleichen Seiten ist ein gleichschenkliges Viereck (*NOPQ*). In ihm ist die Eckenlinie *NP*, welche die Ecken der gleichen Schenkel verbindet, die Mittellinie des gleichschenkligen Vierecks.

Sind in einem Viereck alle 4 Seiten gleich (*RSTU*), so genügt die Bezeichnung: gleichseitiges Viereck; denn es gehört von selbst zu den Rauten nach deren Erklärung.**)



Figur 56.

Figur 57.

Figur 58.

a) Winkelsumme.

2. Ls. **Im Vierecke ist die Winkelsumme 4 Rechte.**

Man ziehe in dem Vierecke (siehe oben *ABCD*) eine Eckenlinie, (*EG* in *EFGH*) und zähle die Winkel der beiden Dreiecke zusammen.

Zusatz. Sind für ein Viereck drei Winkel gegeben, so ist der vierte durch sie bestimmt.

b) Die Raute.

3. Ls. **Eine Raute wird durch jede ihrer beiden Eckenlinien in zwei übereinstimmende Dreiecke geteilt.** (3. Satz.)

4. Ls. **In einer Raute sind je zwei Gegenseiten gleichlaufend.*****)

Bw. Man ziehe eine Eckenlinie. Die Übereinstimmung der beiden Dreiecke liefert zwei Paar gleiche Wechselwinkel. (**4**, 6.)

Figur 59.

5. Umkehrung. **Ein Viereck mit je zwei gleichlaufenden Gegenseiten ist eine Raute.**

Vs. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Bh. $AB = DC$, $AD = BC$.

Bw. Nachdem eine Eckenlinie, *BD*, gezogen, stimmt $\triangle\, ABD \cong CBD$ nach dem 1. Satze, woraus die Behauptung sich ergiebt.

Zusätze. 1) Gleichlaufende Gerade zwischen gleichlaufenden Geraden sind gleich.

---

*) Der Lehrer lese den mittleren Teil des Vorwortes zu diesem Buche nach und beachte die hier folgende Angabe.

**) „Diagonalen" sind Eckenlinien. Ein „Parallelogramm" ist eine Raute (nach obiger Erklärung). Ein „Rhombus" ist ein gleichseitiges Viereck. Der deutsche Ausdruck „Raute" (Name einer Pflanzengattung, *ruta*, deren Blätter so gestaltet sind), wurde in vergangener Zeit nur sehr vereinzelt statt des aus dem Griechischen stammenden Wortes „Rhombus" wirklich gebraucht. Da das Wort in dieser früheren Bedeutung erloschen ist, kann ihm obige allgemeinere Bedeutung beigelegt werden, zumal die Rautenblätter nicht alle gleichförmig sich gestalten.

***) Wegen dieser Eigenschaft, je zwei „parallele" (gleichlaufende) Seiten zu haben, wird solches Viereck ein „Parallelogramm" genannt.

2) Gleichlaufende Gerade haben überall gleichen Abstand. (**5**, 12 Anm. und **4**, 10.)

6. Ls. **Ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten gleich und gleichlaufend sind, ist eine Raute.**

Vs. $AB \# DC$.

Bh. $AD = BC$.

Bw. Die durch eine Eckenlinie erhaltenen Dreiecke stimmen nach dem 2. Satze überein.

Zusätze. 1) Haben zwei Punkte einer Geraden von einer andern auf derselben Seite gleichen Abstand, so sind beide Gerade gleichgerichtet.

Bemerkung. Dieser Satz giebt das bequemste Mittel, zu einer Geraden eine gleichgerichtete zu zeichnen.

2) Alle auf derselben Seite einer Geraden liegenden Punkte, welche gleich weit von ihr abstehen, liegen auf einer ihr gleichgerichteten geraden Linie.

Man verbinde einen der Punkte mit jedem andern. Jede Verbindungslinie wird mit der Geraden gleichlaufend. Da sie aber durch denselben Punkt gehen, fallen sie alle in eine gerade Linie zusammen. (**4**, 3.)

3) Die auf der andern Seite der Geraden befindlichen Punkte, welche ebenso grofsen Abstand von ihr haben, liegen auch auf einer der gegebenen gleichgerichteten Geraden. Es giebt in der Ebene anderswo, als auf diesen beiden gleichgerichteten Geraden, keinen Punkt, welcher von der gegebenen Geraden den vorgeschriebenen Abstand hat. Daher:

Der Ort aller Punkte, welche von einer geraden Linie einen gegebenen Abstand haben, besteht aus zwei zu beiden Seiten der Linie in der gegebenen Entfernung in gleicher Richtung mit ihr laufenden Geraden.

4) **Der Ort aller Punkte, welche von zwei gleichgerichteten Geraden gleichen Abstand haben, ist die mitten zwischen ihnen in gleicher Richtung laufende Gerade.**

7. Ls. **In einer Raute betragen je zwei auf einander folgende Winkel zusammen 2 Rechte und die Gegenwinkel sind gleich.**

Bw. durch Nr. 4 und **4**, 8, 2; die Gegenwinkel werden durch denselben Winkel zu zwei Rechten ergänzt.

Zusatz. Durch einen Winkel einer Raute sind die übrigen bestimmt. Weifs man von einem ihrer Winkel, dafs er ein Rechter ist, so sind auch die andern Winkel Rechte.

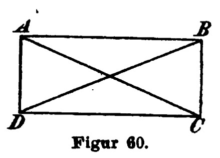
Erklärung. Eine rechtwinklige Raute wird ein Rechteck genannt. Ist es gleichseitig, so heifst es ein Quadrat. (Im Gegensatze zum Rechteck kann eine Raute mit schiefen Winkeln als eine schiefe bezeichnet werden.)

8. Umkehrung. **Ein Viereck, in welchem je zwei auf einander folgende Winkel zusammen 2 Rechte betragen oder in dem je zwei Gegenwinkel gleich sind, ist eine Raute.**

Bw. des ersten Teiles durch Nr. 5 und der zweite wird auf den ersten zurückgeführt durch Nr. 2.

Zusatz. Ein Viereck mit lauter rechten Winkeln ist eine Raute.

c) Eckenlinien.



Figur 60.

9. Ls. **Ein Rechteck hat gleiche Eckenlinien.**

Bw. $\triangle\ ADC \cong BCD$. (2. Satz.)

Zusatz. Eine schiefe Raute hat ungleiche Eckenlinien. (**7**, 1.)

10. Umkehrung. **Eine Raute mit gleichen Eckenlinien ist ein Rechteck.**

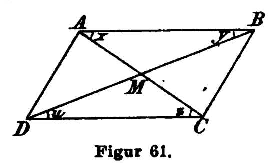
Bw. $\triangle\ ADC \cong BCD$ (3. Satz); dann Nr. 7.

11. In einer Raute halbieren sich die Eckenlinien.

Vs. $AB \# DC$ (Nr. 6).

Bh. $AM = MC$, $BM = MD$.

Bw. $\triangle\ AMB \cong CMD$ (1. Satz).



Figur 61.

Zusätze. 1) Der Schnittpunkt der Eckenlinien ist der Mittelpunkt der Raute; denn er halbiert jede durch ihn gezogene Gerade, welche von den Gegenseiten der Raute begrenzt wird. (1. Satz.)

2) Beim Rechteck haben die Eckpunkte gleichen Abstand von seinem Mittelpunkte. Ein um ihn mit dem Abstande als Halbmesser zu beschreibender Kreis geht daher durch die 4 Eckpunkte. Bei einer schiefen Raute ist dies nicht möglich.

3) Im rechtwinkligen Dreieck steht der Scheitel des rechten Winkels von der Mitte der gröfsten Seite ebenso weit ab, wie ihre Endpunkte. Deshalb geht der über der gröfsten Seite als Durchmesser beschriebene Kreis durch die Spitze des rechten Winkels.

12. Umkehrung. **Ein Viereck, in welchem sich die Eckenlinien halbieren, ist eine Raute.**

Bw. $\triangle\ AMB \cong CMD$. (2. Satz.)

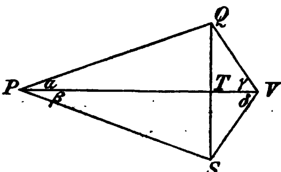
13. Ls. **Im gleichschenkligen Viereck halbiert die Mittellinie die beiden Winkel und die andere Eckenlinie und schneidet diese rechtwinklig.**

Vs. $PQ = PS$, $VQ = VS$.

Bh. $\angle\ \alpha = \beta$, $\angle\ \gamma = \delta$

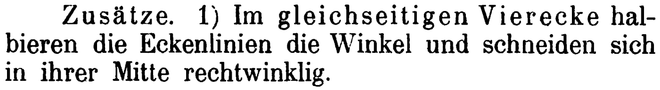
$TQ = TS$

$\angle\ PTQ = \mathrm{R}$.



Figur 62.

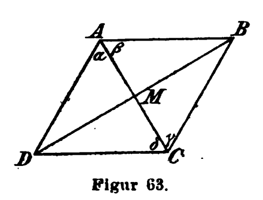
Bw. Zunächst stimmt $\triangle\ PVQ \cong PVS$ (3. Satz); daraus folgt, was noch erforderlich ist, damit $\triangle\ PTQ \cong PTS$ (2. Satz).



Zusätze. 1) Im gleichseitigen Vierecke halbieren die Eckenlinien die Winkel und schneiden sich in ihrer Mitte rechtwinklig.

2) Eine Raute ist gleichseitig, wenn einer ihrer Winkel von der Eckenlinie halbiert wird. (**5**, 10, Zs.)

3) Stehen in einer Raute die Eckenlinien senkrecht auf einander, so ist sie gleichseitig.

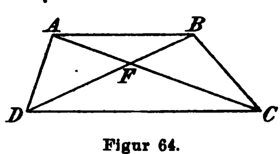


Figur 63.

d) Das Trapez.

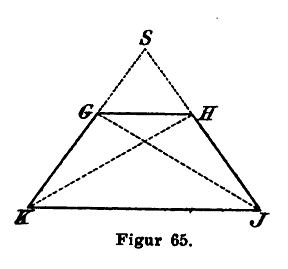
14. Erklärung. Stumpft man ein Dreieck ab durch eine einer Seite gleichgerichtete Gerade, so erhält man ein Vierek, welches Trapez*) genannt wird (*ABCD* in Nr. 15). Ein in solcher Weise an seiner Spitze abgestumpftes gleichschenkliges Dreieck ist ein gerades Trapez (*GHJK* in Nr. 16). Ein Trapez ist also ein Viereck mit zwei ungleichen gleichgerichteten Gegenseiten. Diese sind seine Hauptseiten, die nicht gleichgerichteten seine Nebenseiten. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Nebenseiten ist die Mittellinie des Trapezes.

15. Ls. Im Trapez wird keine Eckenlinie von der andern halbiert.



Figur 64.

Bw. Nimmt man an, dafs eine, *BD*, von der andern Eckenlinie halbiert werde, so stimmte $\triangle$ *AFB* $\cong$ *CFD* nach dem 1. Satze, und es würde $AB = DC$ sein. Da nun *AB* auch gleichgerichtet mit *DC* ist, so wäre das Viereck nach Nr. 6 eine Raute und kein abgestumpftes Dreieck.

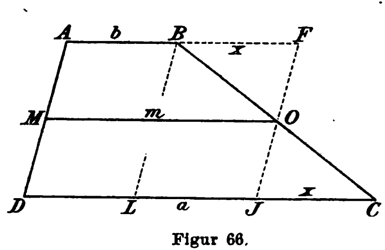


Figur 65.

16. Ls. **Ein gerades Trapez hat gleiche Winkel an jeder Hauptseite, gleiche Nebenseiten und gleiche Eckenlinien.**

Zum Beweise ergänzt man dieses Viereck wieder zum gleichschenkligen Dreiecke.

17. Ls. **Die Mittellinie eines Trapezes ist den Hauptseiten gleichgerichtet und gleich ihrer halben Summe.**



Figur 66.

Vs. $AB \parallel DC$, $AB < DC$
$AM = MD$, $BO = OC$

Bh. $AB \parallel MO \parallel DC$
$m = {}^1/_2\,(a + b)$, wenn $MO = m$, $DC = a$ und $AB = b$ gesetzt wird.

Zum Beweise lege man durch die Mitte *O* der einen Nebenseite die der andern gleichlaufende Gerade *FJ* bis zu den Hauptseiten, wozu die kleinere, *AB*, zu verlängern ist. Dann ist $FJ = AD$ (Nr. 5, Zs. 1). Ferner stimmt $\triangle$ *OBF* $\cong$ *OCJ* (1. Satz), also ist aufser $BF = CJ$ auch $OF = OJ$. Letztere sind nun gleich *MA* und *MD*, als Hälften gleicher Ganzen. Deshalb sind nach Nr. 6 *AFOM* und *DJOM* Rauten, also $AB \parallel MO \parallel DC$ und $AF = MO = DJ$. Dies giebt

$$m = b + x$$
$$\text{und } m = a - x$$
$$\text{folglich } 2m = a + b, \text{ also } m = {}^1/_2\,(a + b).$$

Zusatz. Die Gerade, welche die Mitten zweier Dreiecksseiten verbindet, ist der dritten Seite gleichgerichtet und gleich deren Hälfte.

---

*) In „Trapez“ sprechen wir e lang und betont. Das griechische Wort *Trapeza* (Tisch, verkürzt aus *Tetrapeza*, Vierfufs) hat den Ton auf der ersten Silbe und e kurz.

Legt man $BL \parallel AD$, so geht die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar aus dem vorigen Beweise hervor. Dabei wird die Mittellinie $= x$ und $LC = 2x$.

18. Ls. Zieht man mitten durch eine Nebenseite eines Trapezes in der Richtung der Hauptseiten eine Gerade bis zur andern Nebenseite, so halbiert sie diese.

Der Beweis entspricht dem zu Nr. 17.

Zusatz. Zieht man mitten durch eine Dreiecksseite in Richtung einer andern Seite eine Gerade bis zur dritten Seite, so halbiert sie dieselbe.

Schlufsbemerkung. Da ein Viereck von beliebiger Gestalt durch eine Eckenlinie in zwei Dreiecke mit gemeinsamer Seite zerlegt wird, so gehören zur Bestimmung seiner Gestalt und Gröfse $3 + 2 = 5$ Stücke. Von diesen müssen, da nur 3 Winkel des Vierecks gegeben werden dürfen, mindestens zwei Stücke Seiten sein. Lehrsätze von der Übereinstimmung der Vierecke stellen wir nicht auf, da sie nur selten gebraucht werden, und eintretenden Falls die Übereinstimmung durch Deckung leicht nachzuweisen ist. Bei den Vierecken von besonderer Gestalt vermindert sich die Zahl von 5 Bestimmungsstücken durch die Eigenschaften der Gestalt, so dafs bei dem die meisten Eigenschaften besitzenden Quadrate nur 1 Bestimmungsstück, seine Seite, erforderlich ist.

19. Hauptaufgaben.

1) **Einen gegebenen Winkel zu halbieren.**

Dies geschieht durch die Mittellinie eines gleichschenkligen Vierecks, welches man in dem gegebenen Winkel herstellt, wie $\angle QPS$ in Nr. 13 zeigt.

Bemerkung. Durch fortgesetztes Halbieren der Teile kann man den Winkel in 4, 8, 16, ... gleiche Winkel zerlegen.

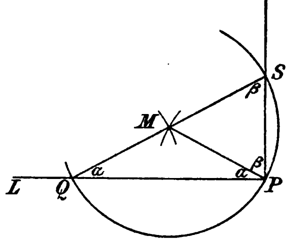
2) **Von einem Punkte aufserhalb einer Geraden die Senkrechte auf dieselbe zu fällen.**

Ebenfalls durch die Mittellinie eines gleichschenkligen Vierecks: Vom gegebenen Punkte P aus (Figur in Nr. 13) schneidet man mit hinreichender Zirkelöffnung in die gegebene Gerade (bei Q und S) ein, verschafft sich einen Punkt als vierte Ecke (V) und zieht die Mittellinie (PV) als die verlangte Senkrechte. (Nr. 13.)

3) **In einem Punkte einer Geraden die Senkrechte auf ihr zu errichten.**

Man macht den Punkt zur Mitte der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks. (5, 8, Zs. 4.)

Nach feiner Ausführung der Figur (man darf mit dem Zirkelfufs nicht zu tief einstechen!) kann man das rechtwinklige Lineal auf Richtigkeit prüfen. Man lege es in beide Nebenwinkel ein.



Figur 67.

Bemerkung. Ist der gegebene Punkt P der Endpunkt der Geraden, und hat man zu ihrer Verlängerung auf dem Zeichenpapiere keinen Platz, so kann man über einer Strecke PQ derselben ein gleichschenkliges Dreieck PQM herstellen, um seine

Spitze M mit dem Schenkel den Kreisbogen beschreiben und QM bis zu ihm ziehen. Nach dem Treffpunkte S läuft von P aus die verlangte Senkrechte.

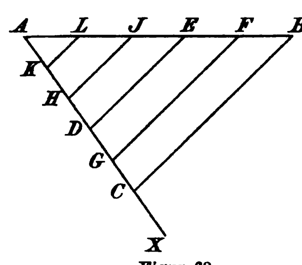
Es ist leicht zu beweisen, dafs $\angle \alpha + \beta = R$. (Vergl. Nr. 11, Zs. 3.)

4) **Eine gegebene Strecke zu halbieren.**

Man macht sie zur Eckenlinie eines gleichschenkligen Vierecks, die von seiner Mittellinie halbiert wird.

Bemerkung. Für das gewöhnliche Zeichnen reicht das vereinfachte Verfahren aus, nach welchem man den einen Zirkelfufs in den Anfangspunkt der Strecke einsetzt und mit dem andern nach dem Augenmafse die mutmafsliche Mitte markiert, dann vom Endpunkte her die eingespannte Strecke rückwärts abträgt und den nur noch kleinen Fehler aus freier Hand sorgfältig halbiert.

5) **Eine gegebene Strecke in eine beliebige Anzahl n gleicher Teile zu zerlegen.**



Figur 68.

Vom Anfangspunkte A der Strecke AB aus zieht man unter beliebigem (nicht zu spitzem) Winkel eine Gerade AX und trägt auf ihr von A an eine kleine Strecke $n$mal hinter einander ab, verbindet den letzten Punkt C mit dem Endpunkte B und zieht in dieser Richtung von jedem Teilpunkte her eine Gerade bis zur Strecke AB. Die Treffpunkte zerlegen sie in die verlangten n gleichen Teile.

Bw. Die Trapeze $BCDE$, $FGHJ$ u. s. w. zeigen, dafs jeder der n Abschnitte dem vorhergehenden gleich ist. (Nr. 18, nebst Zs.)

6) **Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu zerlegen.**

Gesucht wird $^1/_3$ R. Winkel von $^2/_3$ R erhält man durch ein gleichseitiges Dreieck. Ein in den rechten Winkel gestelltes gleichseitiges Dreieck läfst von ihm $^1/_3$ Rechten übrig. Wie kann man demnach durch 3 Zirkelschläge 2 Punkte angeben, durch welche die gesuchten Teilungslinien des rechten Winkels gehen?

Anm. Hiernach kann man den rechten Winkel auch in 6, 12, ... Teile zerlegen.

Mitteilung. Ein beliebiger Winkel läfst sich nicht durch ein Verfahren mit Zirkel und Lineal in 3 gleiche Stücke teilen. Es geht sehr einfach mit Hilfe einer krummen Linie (einer gleichseitigen Hyperbel), wie im dritten Teile dieses Buches angegeben wird. Für das Zeichnen genügt der Winkelmesser. Man mifst den Winkel, rechnet den dritten Teil der Zahl seiner Grade nebst Bruchteil aus und giebt hiernach neben dem Bogen die beiden Punkte an, nach welchen vom Scheitel her die Teilungslinien zu ziehen sind.

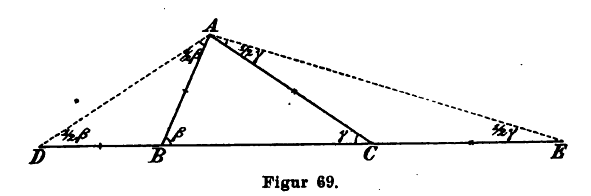
20. Vorbereitung auf Lösen einer Aufgabe.

Man nimmt eine vorläufig gezeichnete Figur als die gesuchte an, markiert in ihr die gegebenen Stücke, und, falls solche an der Figur noch nicht vorhanden sind, stellt man sie her, wie sie dieser Figur zukommen. Dann sucht man einen Zusammenhang zwischen den gegebenen Stücken und den gesuchten Gröfsen aus den Eigenschaften der Figur zu ermitteln. Die entdeckte Beziehung zwischen denselben führt dann auf eine

schon bekannte Aufgabe oder zu einem Verfahren, wodurch man zum Ziele gelangt.

1. Beispiel. **Ein Dreiek aus dem Umfange und zwei Winkeln herzustellen.**

Vorbereitung. Es sei ABC das verlangte Dreieck; seine Winkel β und γ seien die von gegebener Gröſse. Da der zu gebende Umfang des Dreiecks, die Summe seiner Seiten, noch nicht in der Figur vor Augen liegt, trägt man auf den Verlängerungen der Grundseite BC nach links BA als DB, nach rechts CA als CE ab; dann ist die Strecke DE der Umfang dieses Dreiecks. Um die freien Endpunkte D und E mit dem Dreiecke ABC in deutliche Beziehung zu bringen, wird man sie mit der Spitze A durch die Hilfslinien DA und EA verbinden. Denn dann entstehen gleichschenklige Dreiecke. Am gleichschenkligen Dreiecke ABD kennt man den Auſsenwinkel β an der Spitze B, weiſs also. daſs $\angle D = {}^1/_2\,\beta$ und $\angle BAD = {}^1/_2\,\beta$ sein muſs. (5, 14, 1.) Ebenso hat man im gleichschenkligen Dreieck ACE $\angle E = {}^1/_2\,\gamma$ und $\angle CAE = {}^1/_2\,\gamma$. Nun bemerkt man, daſs an der zu gebenden Strecke DE die Winkel an den Endpunkten bekannt sind, daſs also das Hilfsdreieck ADE aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln sich herstellen läſst; so daſs die vorliegende Aufgabe auf diese bekannte Aufgabe zurückgeführt ist. (6, 6, 2.) Von der erhaltenen Spitze A aus bekommt man AB und AC durch Anlegen der Winkel ${}^1/_2\,\beta$ und ${}^1/_2\,\gamma$, und ist damit zum Dreieck ABC gelangt. — Nach dieser Erkenntnis schreitet man zur Ausführung der Lösung der gestellten Aufgabe, die nur darin besteht, daſs man die eben vollzogenen Schlüsse rückwärts aneinander reiht, wie folgt:



Figur 69.

Gegeben sind die Strecke u, welcher der Umfang des herzustellenden Dreiecks gleich werden soll, und die Winkel β und γ. (Diese drei Stücke sind am Rande hinzuzeichnen und es ist nach den folgenden Angaben eine neue Figur mit diesen Stücken zu entwerfen.)

Ausführung. Auf einer hingelegten geraden Linie trage man die gegebene Strecke u (mit dem Zirkel) als DE ab, halbiere die gegebenen Winkel β und γ (Nr. 19, 1) und lege an DE in D einen Winkel, gleich ${}^1/_2\beta$, nach rechts geöffnet, und in E einen Winkel, gleich ${}^1/_2\gamma$, nach links geöffnet, an. (6, 5, 1.) Die freien Schenkel derselben mögen sich in A schneiden. Nun trägt man in A an AD nach unten einen Winkel $= {}^1/_2\,\beta$ an (der Schnittpunkt des Schenkels auf der Grundseite sei B) und an AE in A auch nach unten einen Winkel $= {}^1/_2\,\gamma$, dessen Schenkel auf der Grundseite den Punkt C liefert. Das erhaltene Dreieck ABC ist das verlangte.

Beweis. Da im Dreieck ABD die Grundwinkel D und BAD gleich sind, so liegen ihnen gleiche Seiten gegenüber; es ist $AB = BD$; und aus demselben Grunde wurde $AC = CE$. Demnach ist der Umfang des Dreiecks ABC gleich $DB + BC + CE = DE = u$. Der Winkel ABC ist als Auſsenwinkel des Dreiecks ABD gleich ${}^1/_2\beta + {}^1/_2\beta = \beta$ und ebenso folgt,

dafs Winkel ACB gleich dem gegebenen Winkel γ ist. Mithin erfüllt das Dreieck ABC die gestellten Bedingungen, ist also das verlangte.

Der Darlegung ist eine abschliefsende Betrachtung anzufügen, welche angiebt: 1) ob die gestellte Aufgabe immer so zu lösen ist, oder ob die gegebenen Stücke gewisse Grenzen einhalten müssen, damit die Aufgabe überhaupt möglich sei; und 2) wieviele gesuchte Figuren den gestellten Bedingungen entsprechen. Diese Betrachtung giebt also an, bei welchen Grenzen die Möglichkeit der Aufgabe abschliefst, und ist auch deshalb als Abschlufs zu bezeichnen.

Für obige Aufgabe ist der

Abschlufs. Zwei Winkel eines Dreiecks müssen zusammen kleiner als zwei Rechte sein. Daher sind die beiden Winkel so zu geben, dafs $\beta + \gamma < 2$ R ist. Hat man diese Grenzbedingung bei der Wahl der Winkel β und γ eingehalten, so müssen die bei D und E an DE in der angegebenen Richtung angelegten Schenkel sich schneiden; denn die oberhalb ihrer Schneidelinie DE liegenden inneren entgegengesetzten Winkel D und E betragen zusammen sogar weniger als **1** R. (**4**, 9.) Das Dreieck ADE kommt also unter der Grenzbedingung zustande und das innerhalb desselben entstehende Dreieck ABC auch. Dabei geht aus dem Dreieck ADE nur ein Dreieck ABC hervor. Man könnte freilich $\angle\, {}^1/_2\gamma$ links und ${}^1/_2\beta$ rechts an DE antragen, käme dann aber auf ein Dreieck, welches nur das umgelegte erste Dreieck wäre. Dies wird nicht als ein anderes Dreieck gezählt. Da die Aufgabe nur eine Lösung liefert, so ist sie eine bestimmte. Mithin lautet der Abschlufs: Sind die beiden gegebenen Winkel zusammen kleiner als 2 Rechte, so giebt es ein Dreieck, welches die gegebenen Gröfsen besitzt.

Die vollständige Behandlung einer zu lösenden Aufgabe besteht also aus vier Teilen:

1) Vorbereitung, 2) Ausführung, 3) Beweis, 4) Abschlufs.*)

2. Beispiel. **Ein Dreieck aus dem Unterschiede der Nebenseiten, dem Unterschiede ihrer Gegenwinkel und aus der Grundseite zu zeichnen.**

Vorbereitung. Nachdem in einem Dreiecke ABC, in welchem $b > c$ gemacht wurde, der Unterschied $b - c = d$ auf AC so hergestellt ist, dafs die vom Endpunkte nach B zu ziehende Hilfslinie vom angenommenen ein gleichschenkliges Dreieck abschneidet, liefern dessen Grundwinkel in dem Hilfsdreieck den Gegenwinkel von d $x = {}^1/_2 (\beta - \gamma)$, also als die Hälfte des zu gebenden Winkelunterschiedes $\beta - \gamma = \delta$. Somit kennt man im Hilfsdreieck zwei Seiten und den Gegenwinkel der kleineren, kann es also aus den gegebenen Gröfsen a, d, δ bilden. (**6**, 6, 5.) Die Gestalt des anzusetzenden Dreiecks sagt, wie man zur Spitze A des gesuchten Dreiecks gelangt.

Die Angabe der Ausführung und des Beweises ist hiernach leicht zu machen.

Abschlufs. Das Hilfsdreieck kommt nur dann zustande, wenn der mit d um C beschriebene Kreis den freien Sckenkel des angelegten Winkels

*) „Analysis“ (Zergliederung) ist das, was hier als Vorbereitung angegeben wurde. „Konstruktion“ ist Ausführung. „Determination“ (Grenzbestimmung) ist der Abschlufs der Aufgabe.



$x = {}^1/_2\,\delta$ schneidet. Es mufs also d gröfser sein, als der Abstand des Punktes C von jenem Schenkel. Diese untere Grenze von d erhält man demnach dadurch, dafs man die gewählte Strecke a auf der Halbierungslinie des angenommenen Winkels δ vom Scheitel aus abträgt und vom Endpunkte auf einen Schenkel die Senkrechte fällt. Bezeichnet man deren Länge mit s, so ist zu geben $d > s$. Doch auch eine obere Grenze hat d einzuhalten. Der Unterschied zweier Dreiecksseiten ist kleiner, als die dritte Seite; also mufs $d < a$ bleiben. Weil d gröfser als s zu nehmen ist, tritt der freie Schenkel des Winkels ${}^1/_2\,\delta$ in das Innere des mit d beschriebenen Kreises zum Fufspunkte der Senkrechten und mufs, weil diese Gerade unbegrenzt fortläuft, an einer anderen Stelle aus dem in sich geschlossenen Kreise wieder heraustreten. Jeder der beiden Schnittpunkte führt nachher zu einem Dreiecke; der von B entferntere giebt das Dreieck auf der andern Seite von a. Es werden aber die Nebenseiten der beiden gefundenen Dreiecke paarweise gleichlaufend, ihre Winkel also entsprechend gleich, und darum stimmen die Dreiecke überein. (1. Satz.) Wie bei der vorhergehenden Aufgabe wird man also das nur durch die Lage vom ersten verschiedene Dreieck nicht als ein anderes zählen. Dafs $\angle\,\delta < 2\,R$ zu nehmen ist, braucht als selbstverständlich nicht gesagt zu werden. Folglich ergiebt sich als Abschlufs: Nur wenn $a > d > s$ ist, entsteht ein Dreieck von bestimmter Gestalt.

Diese erste Weise der Aufgabenlösung ist das Verfahren mittels **Hilfsfigur.** (Die zweite, mittels Orte, kommt **10**, 18.)

21. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) In einem geraden Trapez mit 3 gleichen Seiten halbieren die Eckenlinien die Winkel an der vierten Seite.

2) Wenn in einem Trapeze die oberen oder die unteren Abschnitte der Eckenlinien gleich sind, so ist es ein gerades Trapez.

3) Verbindet man in einem Dreiecke die Mitten der drei Seiten, so wird es in 4 übereinstimmende Dreiecke geteilt.

4) Die Linie, welche die Mitten der Eckenlinien eines Trapezes verbindet, ist halb so grofs, wie der Unterschied der Hauptseiten.

5) Verbindet man in einem beliebigen Viereck die Seitenmitten der Reihe nach, so entsteht eine Raute. Sie ist bei einem gleichschenkligen Vierecke ein Rechteck. Bei welchen Vierecken wird dieselbe gleichseitig?

6) Die Mitten zweier Gegenseiten und die der beiden Eckenlinien eines Vierecks sind die Eckpunkte einer Raute.

7) Die drei Geraden, welche die Mitten der Gegenseiten und die der Eckenlinien eines beliebigen Vierecks verbinden, schneiden sich in einem Punkte und halbieren sich dort. [Nach 5) und 6).]

8) Bei einem Viereck mit gleichen Eckenlinien schneiden sich die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten rechtwinklig.

9) Verbindet man die Mitten zweier Gegenseiten einer Raute mit den Endpunkten einer Eckenlinie, so teilen diese Geraden die andere Eckenlinie in 3 gleiche Stücke.

10) Was für ein Viereck bilden die Winkelhalbierungslinien eines geraden Trapezes?

b) Aufgaben.

11) Ein gleichseitiges Viereck zu zeichnen, von dem die beiden Eckenlinien gegeben sind (als zwei Linien von vorgezeichneter Länge).

12) Eine Raute herzustellen aus einer Seite und den beiden Eckenlinien.

13) Ein Rechteck zu zeichnen aus einer Seite und dem Winkel, unter welchem die Eckenlinien sich schneiden.

14) Eine Strecke a zwischen die Schenkel des gegebenen Winkels α so einzusetzen, dafs sie die von einer Geraden angegebene Richtung hat.

15) Ein gerades Trapez zu bilden aus den beiden Hauptseiten und einem Winkel.

16) Zur Herstellung eines Trapezes sind die 4 Seiten gegeben. (Zerlegung.)

17) Ein Trapez herzustellen aus den beiden Hauptseiten, einer Nebenseite und einem der nicht eingeschlossenen Winkel.

18) Ein Trapez zu zeichnen aus einer Haupt- und einer Nebenseite und den beiden Eckenlinien.

19) Ein Viereck zu bilden aus den 4 Seiten und einem Winkel.

Hierbei kann (bei kleiner genommenem Winkel) die einspringende Ecke eines zweiten Vierecks so zu liegen kommen, dafs eine Seite über ihre Gegenseite fortgeht. Eine solche Figur wird ein „überschlagenes Viereck“ genannt.

20) Es sind zwei gleichlaufende Gerade, ein Punkt P und eine Strecke a gegeben. Man soll durch P eine Gerade so ziehen, dafs das zwischen den Gleichlaufenden liegende Stück derselben gleich a wird.

9. Glied. Das Vieleck.

1. Erklärungen. Geradlinige Figuren mit mehr als 4 Seiten heifsen Vielecke. Ist n die Anzahl der Seiten, also auch der Ecken, so wird das Vieleck als ein n-Eck bezeichnet. Die Summe der Seiten ist sein Umfang.

Ein Vieleck ist regelmäfsig, wenn die Seiten und die Winkel alle gleich sind. Das regelmäfsige Viereck ist das Quadrat, das regelmäfsige Dreieck ist das gleichseitige.

2. Ls. **Die Summe der Winkel eines n-Ecks ist $n \cdot 2R - 4R$.**

Bw. Verbindet man einen im Innern des Vielecks angenommenen Punkt mit allen Ecken, so entstehen, da zu jeder Seite ein Dreieck gehört, n Dreiecke. Von ihrer Winkelsumme sind die um den angenommenen Punkt liegenden Winkel, als nicht dem Vielecke gehörig, zusammen abzuziehen.

Anmerk. Hat das Vieleck aufeinander folgende einspringende Ecken, so kann, wenn es dort nur schmal ist, der Fall eintreten, dafs in seinem Innern kein Punkt sich findet, von dem aus es sich in Dreiecke zerlegen liefse. Auch für solchen besonderen Fall ist die Richtigkeit des Satzes leicht nachzuweisen.

Wie grofs ist die Winkelsumme im Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, Zwölfeck? Wieviel Seiten hat ein Vieleck, dessen Winkelsumme 40 R beträgt?

Ein n-Eck mit lauter rechten Winkeln mufs ein Viereck sein. Daher ist der Name „Rechteck“ ein bestimmter. „Schiefeck“ würde keine zutreffende Bezeichnung einer bestimmten Figur sein.

Zusätze. 1) Bei jedem Vielecke betragen die Aufsenwinkel, von denen an jeder Ecke nur einer liegt, zusammen 4 Rechte.

2) Jeder Winkel eines regelmäfsigen n-Ecks ist $(2 - {}^4/_n)$ Rechte. (Besser ist die Begründung durch Zusatz 1.)

Wie grofs ist jeder Winkel eines regelmäfsigen Achtecks, Sechsecks, Vierecks, Zwanzigecks, Sechzigecks? Mit zunehmender Seitenzahl wachsen die Winkel.

3. Ls. **Von einer Ecke eines n-Ecks lassen sich $(n - 3)$ Eckenlinien ziehen.**

Bw. Von dem gewählten Eckpunkte aus ist keine Eckenlinie zu ziehen nach ihm selber und nach den beiden Nachbar-Ecken rechts und links, weil diese beiden Verbindungslinien Seiten sind; aber nach allen andern Ecken. Die Zahl der Eckenlinien ist also $n - 3$.

4. Ls. **Die Anzahl aller Eckenlinien eines n-Ecks ist ${}^1/_2 n (n - 3)$.**

Bw. Es liefert jeder Eckpunkt $(n - 3)$ Eckenlinien. Würde man die Zahl aller Eckenlinien $n (n - 3)$ angeben, so hätte man jede Eckenlinie zweimal gezählt, erst von dem einen, dann von dem andern Endpunkte aus. Die Zahl der Eckenlinien ist also halb so grofs: ${}^1/_2 n (n - 3)$.

Anmerk. Die Zahl ${}^1/_2 n (n - 3)$ ist immer eine ganze Zahl. Es ist nämlich n entweder eine gerade, oder eine ungerade Zahl. In beiden Fällen hebt sich der Nenner 2 fort.

Wieviel Eckenlinien hat ein Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, Dreizehneck?

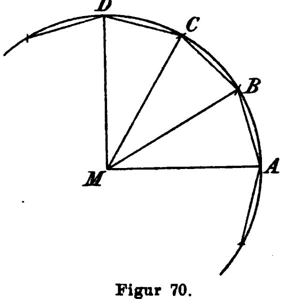
5. Ls. **Die Halbierungslinien der Winkel eines regelmäfsigen Vielecks schneiden sich in einem Punkte. Dieser ist von allen Ecken gleich weit entfernt.**

Vs. $ABCD$ ist ein Teil eines regelmäfsigen Vielecks; also $AB = BC = CD = \ldots.$

$\angle A = B = C = D = \ldots.$

Bh. Die Winkelhalbierenden schneiden sich alle im Punkte M, und es ist

$MA = MB = MC = MD = \ldots.$



Figur 70.

Bw. Die Halbierungslinie des Winkels B werde von der des Winkels A in M geschnitten und von der des Winkels C in einem Punkte, welcher mit M_1 bezeichnet werden möge. Da nach dem 1. Satze $\triangle BCM_1 \cong BAM$, so folgt $BM_1 = BM$, also ist M_1 derselbe Punkt M. Ebenso beweist man, dafs die Halbierungslinie des Winkels D die Winkelhalbierende CM in demselben Punkte trifft, weil $\triangle CDM_2 \cong CBM$. So geht es für alle Winkel weiter fort, so viel ihrer sein mögen. Auch hat man aus der Übereinstimmung der gleichschenkligen Dreiecke $MA = MB = MC = MD = \ldots.$

Zusätze. 1) Der mit MA um M zu beschreibende Kreis geht durch alle Eckpunkte.

2) Der Mittelpunkt M steht auch von allen Seiten gleich weit ab.

6. Übungen.

1) Zwei aufeinander senkrechte Kreisdurchmesser geben mit den die rechten Winkel halbierenden Durchmessern durch Verbindung der benachbarten Endpunkte ein regelmäſsiges Achteck.

2) Schneidet man von den Endpunkten eines Kreisdurchmessers aus mit der dem Halbmesser gleichen Zirkelöffnung nach beiden Seiten in den Kreis ein, so sind die vier Schnittpunkte mit den Endpunkten des Durchmessers die Ecken eines regelmäſsigen Sechsecks.

3) In einen Kreis ein regelmäſsiges Zwölfeck einzuzeichnen (so daſs die Eckpunkte auf dem Kreise liegen). [8, 19, 6.]

4) Über einer gegebenen Strecke als Seite ein regelmäſsiges Achteck zu errichten.

5) Trägt man in einem Quadrate auf den Eckenlinien vom Schnittpunkte aus dessen Abstand von den Seiten auf, und stumpft man bis zu diesen Stellen die 4 Ecken des Quadrates ab durch Gerade, welche rechtwinklig zu den Eckenlinien gelegt werden, so erhält man ein regelmäſsiges Achteck.

6) Es soll untersucht werden, wieviel aufeinander folgende Stücke zur Herstellung eines Vielecks **nicht** erforderlich sind.

Ausführung. Da die Winkelsumme des n-Ecks eine feste Zahl ist (Nr. 2), so darf über den letzten Winkel nicht verfügt werden. Er wird durch die Summe der übrigen bestimmt, die unter jener Zahl um weniger als 4 R bleiben muſs. Sind zur Herstellung eines n-Ecks gegeben a) $n - 1$ Winkel, so schneidet man auf einem Schenkel des ersten Winkels vom Scheitel aus die erste Seite ab, trägt am Endpunkte den zweiten Winkel an und macht den erhaltenen Schenkel gleich der zweiten Seite und so fort. Hat man den letzten Winkel angelegt, so liefert sein freier Schenkel die letzte Ecke im Schnitt mit dem noch unbegrenzten andern Schenkel des ersten Winkels. Es waren also die beiden Seiten nicht zu geben, welche den nicht zu gebenden letzten Winkel einschlieſsen. Es wurden hier 1 Winkel und 2 Seiten, also 3 Stücke durch die übrigen mitbestimmt. b) Werden $n - 2$ Winkel gegeben, so wird, um die Spitzen der beiden fehlenden Winkel zu erlangen, bei jeder die Seite gebraucht, welche sie mit der nächsten festgelegten Ecke verbindet. Hier darf also nur 1 Seite fehlen, nämlich die zwischen den Spitzen der beiden nicht gegebenen Winkel. Das sind wieder 3 nicht erforderliche Stücke. c) Sind nur $n - 3$ Winkel vorgeschrieben, natürlich so, daſs die fehlenden 3 die Winkelsumme voll ergänzen können, so werden alle n Seiten erfordert. Die Spitze des mittleren von den 3 fehlenden Winkeln ist dadurch zu erlangen, daſs man mit den ihn einschlieſsenden Seiten sich treffende Kreisbogen beschreibt von den Scheiteln der beiden äuſseren aus, die durch ihre Seite von der nächsten Ecke her schon festgelegt sind. Schneiden sich die beiden Kreisbogen, so kann jeder der beiden Schnittpunkte die letzte Ecke sein, so daſs also nun zwei n-Ecke der Forderung entsprechen. Auch in diesem dritten Falle waren von den $n + n$ Stücken 3 nicht gegeben. Stets waren $2n - 3$ Stücke zur Herstellung eines in seiner Gestalt und Gröſse bestimmten n-Ecks erforderlich, und nur im letzten Falle war zur Ergänzung der Bestimmtheit ein zweites n-Eck auszuschlieſsen durch die Vorschrift, daſs die Figur zuletzt keine einspringende Ecke erhalten solle. Wollte man nun aber die Zahl der Winkel noch weiter vermindern, so würde die Aufgabe **unbestimmt**; die letzten Seiten könnten in beliebigen Lagen die Figur zum Schluſs

bringen. Wir sehen also, dafs zur Herstellung eines bestimmten Vielecks von beliebig grofser Seitenzahl immer nur drei Stücke nicht erforderlich sind.

Am günstigsten ist es beim Dreieck, wo nur 3 Stücke nötig sind; beim Viereck schon 8 — 3 = 5 (vergl. **8**, 18, Schlufsbemerkung), beim Fünfeck 10 — 3 = 7, beim Sechseck 9, und so fort.

C. Linien und Winkel am Kreise.

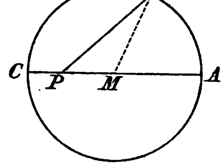
10. Glied. a) Der Kreis in Verbindung mit der geraden Linie.

Die Entstehung eines Kreises ist **1**, 5, 1) angegeben; die Gleichheit seiner Halbmesser, sowie der Durchmesser, wurde in **2**, 3 nachgewiesen, und in Nr. 4 die Lage von Punkten zur Kreislinie erörtert; auch ist in Nr. 6 die Erklärung von Bogen und Sehne gegeben.

1. Ls. Unter allen Geraden, welche man von einem innerhalb eines Kreises neben dem Mittelpunkte gegebenen Punkte aus nach der Kreislinie ziehen kann, ist die durch den Mittelpunkt gehende die längste, und diejenige die kürzeste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

Bh. $PA > PB > PC$.

Bw. Nach dem Endpunkte der beliebigen Geraden PB ziehe man den Halbmesser; dann ergiebt das $\triangle\ PMB$ mittels der Sätze über Summe und Unterschied zweier Dreiecksseiten (**5**, 2 und 3) durch Übergehen zu den beiden andern Halbmessern die Richtigkeit der Behauptung.

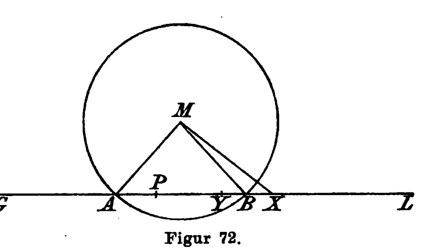


Figur 71.

Zusatz. Die Linien werden um so gröfser, je näher sie der längsten kommen, und umgekehrt. (**7**, 1.)

2. Ls. Jede unbegrenzte Gerade, welche durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt geht, mufs den Kreis zweimal schneiden.

Bw. Da der Kreis einen Teil der Ebene ringsum abgrenzt, die durch P gehende gerade Linie GL aber unbegrenzt fortläuft, so mufs sie in jeder ihrer beiden Richtungen die Grenze des Kreises einmal überschreiten. Hätte die Gerade aufser A und B noch einen dritten Punkt, X, mit dem Kreise gemein, so würden die nach diesen drei Kreispunkten gehenden Halbmesser zwei gleichschenklige Dreiecke liefern, von denen das zweite einen stumpfen Grundwinkel besäfse, was nicht möglich ist. (**5**, 8, 1 und **3**, 10, 2.) Wählt

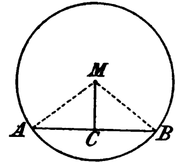


Figur 72.

man als dritten Punkt Y zwischen A und B, so ist AMY das erste gleichschenklige Dreieck.

Zusätze. 1) Drei Punkte einer Kreislinie können nicht in einer Geraden liegen.

2) Eine den Kreis schneidende Gerade hat einen Mittelpunktsabstand, der kleiner ist als der Halbmesser.



Figur 73.

3. Ls. **Die Gerade, vom Mittelpunkte des Kreises nach der Mitte einer Sehne gezogen, steht senkrecht auf ihr.**

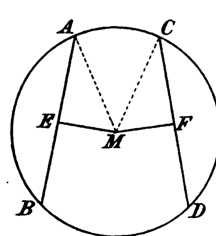
Bw. Die Halbmesser nach den Endpunkten der Sehne AB geben ein gleichschenkliges Dreieck, für welches die Behauptung aus 5, 8, 4 bekannt ist.

4. 1. Umkehrung. **Die vom Kreismittelpunkte auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbiert die Sehne.** (5, 8, 5.)

5. 2. Umkehrung. **Die in der Mitte einer Sehne errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.** (5, 8, 6.)

Zs. Die Mitten gleichlaufender Sehnen eines Kreises liegen auf einem Durchmesser.

Bw. Man verlängert die vom Kreismittelpunkte auf die erste Sehne gefällte Senkrechte und wendet **4**, 10, 2 und Nr. 4 an.



Figur 74.

6. Ls. **Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Abstände vom Mittelpunkte.**

Vs. $AB = CD$, $ME \perp AB$, $MF \perp CD$.

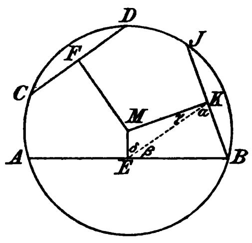
Bh. $ME = MF$.

Bw. Die nach einem der Endpunkte jeder Sehne gehenden Halbmesser liefern Dreiecke, welche nach dem 4. Satze übereinstimmen. Daher ist $ME = MF$.

7. Umkehrung. **Sehnen mit gleichen Mittelpunktsabständen sind gleich.**

Der Beweis ist ebenso.

8. Ls. **Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die gröfsere den kleineren Mittelpunktsabstand.**



Figur 75.

Vs. $AB > CD$, $ME \perp AB$, $MF \perp CD$.

Bh. $ME < MF$.

Bw. Man schneide mit CD als Halbmesser von B aus in den Kreis ein nach der Seite, auf welcher der Kreismittelpunkt liegt, ziehe die so bestimmte Sehne BJ und ihren Mittelpunktsabstand MK; endlich verbinde man die Fufspunkte E und K der Senkrechten. Die Hälften ungleicher Strecken, BE und BK, machen im Dreieck BEK $\angle\ \alpha > \beta$ (5, 9); darum ist $\gamma < \delta$ und nun $ME < MK$. Es ist aber $MK = MF$ nach Nr. 6; also $ME < MF$.

9. Umkehrung. **Von zwei Sehnen eines Kreises ist diejenige die gröfsere, welche den kleineren Mittelpunktsabstand hat.**

Bw. dem vorigen entsprechend oder kürzer durch das abweisende Verfahren mittels Nr. 6 und 8.

Zs. Die gröfsten Sehnen eines Kreises sind die Durchmesser.

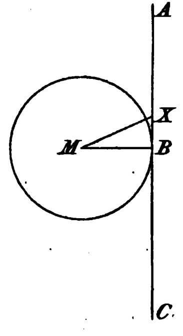
Bw. Bei ihnen ist der Mittelpunktsabstand verschwunden, also am kleinsten. (Auch durch **5**, 2 zu begründen.)

10. Erklärung. Bewegt man eine den Kreis schneidende Gerade in entsprechender Richtung mehr und mehr vom Mittelpunkte ab, so rücken die Schnittpunkte auf einander zu (Nr. 9). Weiterhin kommt die Gerade in eine Lage, wo beide Schnittpunkte in einen Punkt zusammenfliefsen. Dann sagt man von der Geraden: sie berührt den Kreis.

Eine Gerade berührt einen Kreis, wenn sie nur einen Punkt mit ihm gemein hat und sonst ganz aufserhalb des Kreises liegt. Der gemeinsame Punkt heifst ihr Berührungspunkt.*)

11. Ls. **Die Senkrechte im Endpunkte eines Halbmessers berührt den Kreis.** (Der Mittelpunkt ist der Anfangspunkt des Halbmessers.)

Bw. Von der im Endpunkte B auf MB senkrecht stehenden Geraden AC hat irgend ein anderer Punkt X eine Entfernung vom Mittelpunkte, welche gröfser als der Halbmesser MB ist (**5**, 11, Zs.); er liegt also aufserhalb des Kreises. Dies gilt von allen Punkten der Senkrechten mit einziger Ausnahme des mit dem Kreise gemeinsamen Punktes B. Die Senkrechte ist also eine Berührungslinie.



Figur 76.

Aufgabe. An einen Kreis die ihn in einem gegebenen Punkte berührende Gerade zu legen.

12. 1. Umkehrung. **Auf einer Berührungslinie des Kreises steht der nach dem Berührungspunkte gehende Halbmesser senkrecht.**

Bw. Da MB die kürzeste unter allen Linien ist, die von M nach AC gehen, so steht sie auf AC senkrecht. (**5**, 13.)

13. 2. Umkehrung. **Die vom Mittelpunkte auf eine Berührungslinie des Kreises gefällte Senkrechte trifft den Berührungspunkt.**

Bw. Das Gegenteil wird mit Nr. 12 abgewiesen.

Zs. Der Mittelpunktsabstand einer Berührenden ist gleich dem Halbmesser. Eine ganz aufserhalb des Kreises liegende Gerade hat einen Mittelpunktsabstand, der gröfser ist, als der Halbmesser.

14. 3. Umkehrung. **Die auf einer Berührungslinie des Kreises im Berührungspunkte errichtete Senkrechte trifft den Mittelpunkt.**

Der Bw. ist ebenso wie der von Nr. 13.

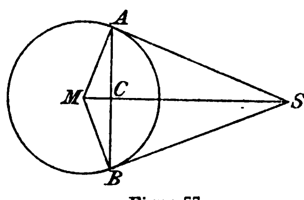
Zs. Bei gleichlaufenden Berührungslinien eines Kreises sind die Berührungspunkte die Endpunkte eines Durchmessers.

Bw. wie der zu Nr. 5 Zs.

---

*) „Tangente" ist eine Berührungslinie, „Secante" eine schneidende Gerade.

15. Ls. **Schneiden sich zwei Berührungslinien eines Kreises, so sind die Strecken vom Schnittpunkte bis zu den Berührungspunkten gleich. Der Winkel zwischen den Strecken wird durch die vom Schnittpunkte nach dem Mittelpunkte gehende Gerade halbiert, und die Sehne zwischen den Berührungspunkten wird von dieser Geraden auch halbiert und rechtwinklig geschnitten.**



Figur 77.

Bw. $SA = SB$ folgt aus der Übereinstimmung der Dreiecke AMS und BMS. Nun ist $MASB$ ein gleichschenkliges Viereck. Dieses hat die behaupteten Eigenschaften. (8, 13.)

Zs. Die Halbierungslinie des Winkels zweier Berührenden (in welchem der Kreis liegt) geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Bw. Bei Annahme des Gegenteils würde der Winkel (nach Nr. 15) noch eine Halbierungslinie haben und ungleiche Hälften besitzen.

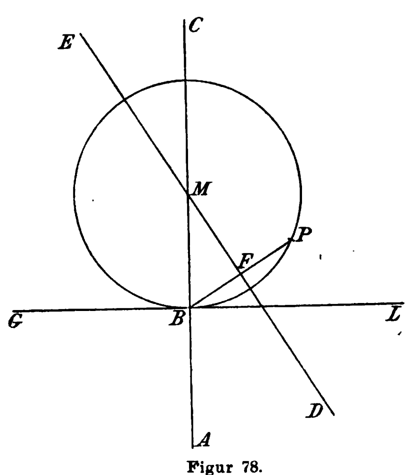
16. Ls. **Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gleichgerichtete Gerade berühren, ist die mitten zwischen ihnen in gleicher Richtung laufende Gerade.** (8, 6, 4.)

17. Ls. **Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei sich schneidende Gerade berühren, besteht aus den beiden Halbierungslinien ihrer Winkel, also aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden.** (3, 10, 6.)

18. Aufgabenlösen mittels Orte. (Zu 8, 20.)

Das zweite Verfahren, Aufgaben zu lösen, ist das mittels Orte. Es ist da anzuwenden, wo zur Herstellung des Gesuchten die Bestimmung eines Punktes erforderlich wird. Mufs dieser Punkt sowohl auf einer gewissen, als auch auf einer andern darstellbaren geraden oder krummen Linie liegen, so ist er einer ihrer Schnittpunkte.

1. Beispiel. **Einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte berührt und durch einen aufserhalb derselben gegebenen Punkt geht.**



Figur 78.

Der verlangte Kreis soll zwei Forderungen erfüllen: er soll 1) die Gerade GL im Punkte B berühren und 2) auch durch den andern Punkt P gehen. Man läfst nun zunächst eine der beiden Forderungen unbeachtet. Es sei dies die zweite: dafs er durch P gehen solle. Dadurch wird die Aufgabe unbestimmt, weil unzählig viele Kreise jener einen Bedingung entsprechen. Da die Gerade einen Kreis berührt, wenn sie im Endpunkte eines Halbmessers auf ihm senkrecht steht, so kann jeder Punkt der in B auf GL errichteten un-

endlich langen Geraden AC (nur B ausgenommen) Mittelpunkt eines Kreises sein, welcher GL in B berührt. Also ist die Gerade AC der erste Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. — Hierauf betrachtet man die zweite Forderung allein. Der vom Punkte B herkommende Kreis soll durch den zweiten Punkt P gehen. Sämtliche Punkte der Mittelsenkrechten auf ihrer Verbindungslinie BP sind Mittelpunkte von Kreisen, die durch B und P gehen. Deshalb ist die unendliche Gerade DE ein zweiter Ort für den Mittelpunkt des gewünschten Kreises. Da nun kein anderer Punkt, als der Schnittpunkt M der Geraden AC und DE in beiden Orten zugleich enthalten ist, so mufs M der Mittelpunkt des verlangten Kreises sein, der mit MB als Halbmesser zu beschreiben ist.

Demnach kann man jetzt die Lösung der Aufgabe hinschreiben:

Gegeben ist die gerade Linie GL, in ihr als Berührungspunkt B und aufserhalb der zweite Punkt P.

Ausführung. [Der Raumersparnis wegen ist die jetzt zu zeichnende neue Figur hier fortgelassen.] Man errichte in B auf GL die Senkrechte AC, verbinde B mit P und ziehe auf BP die Mittelsenkrechte DE. (**8**, 13.) Dieselbe mufs AC schneiden. Der Schnittpunkt M ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises, welcher mit MB als Halbmesser um M beschrieben wird.

Beweis. Da der Punkt P aufserhalb der Geraden GL liegen soll, so ist $\angle PBC$, als Teil des rechten Winkels LBC, kleiner als ein Rechter; mithin $\angle PBC + BFE < 2$ R. Deshalb schneiden sich AC und DE in dem Teile der Ebene oberhalb BP, also auf der Seite von GL, auf welcher der Punkt P sich befindet; so dafs der Kreis um M wirklich durch P gehen kann. [Hätte man auch den zweiten Punkt P auf der Geraden GL gewählt, so würde die Mittelsenkrechte auf BP gleiche Richtung mit der Senkrechten AC erhalten. da dann beide auf derselben Geraden GL senkrecht stehen. (**4**, 10.) In diesem Falle giebt es also keinen Schnittpunkt M, also auch keinen Kreis. In der That ist, wenn P auch auf GL angenommen wird, die Aufgabe unmöglich, weil man gefordert hätte, dafs eine Berührungslinie zwei Punkte mit dem Kreise gemein haben solle.] — Da die Gerade GL im Endpunkte B auf dem Halbmesser MB senkrecht steht, ist sie eine Berührungslinie des Kreises. (**10**, 11.) Ferner ist M als ein Punkt der Mittelsenkrechten DE die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks über der Grundseite BP; daher ist $MP = MB$. Der mit MB um M beschriebene Kreis geht also durch P. Der Kreis ist demnach der verlangte.

Abschlufs. Es giebt immer einen verlangten Kreis, aber nur einen, weil die beiden Orte als gerade Linien nur einen Schnittpunkt liefern können.

2. Beispiel. **Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gleichgerichtete und eine sie schneidende Gerade berührt.**

Nach Nr. 16 ist der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gleichgerichtete Gerade berühren, die mitten zwischen ihnen in gleicher Richtung laufende Gerade. Man kennt also den Halbmesser r des gesuchten Kreises als den halben Abstand der gegebenen Gleichlaufenden. — Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise mit diesem Halbmesser r, welche die dritte gegebene Gerade berühren, besteht aus den auf beiden Seiten im Abstande r mit ihr gleichlaufenden Geraden. — Der erste Ort mufs jede dieser beiden Geraden schneiden. (**4**, 5 zweimal anzuwenden.) Jeder Schnittpunkt ist

Mittelpunkt eines verlangten Kreises, den man mit dem Halbmesser r um ihn beschreibt.

Ausführung und Beweis sind sehr leicht.

Abschlufs. Den gestellten Forderungen entsprechen stets zwei Kreise.

Zur Handhabung des Lösungsverfahrens mittels Orte hat man hauptsächlich sich gegenwärtig zu halten:

Es ist der Ort aller Punkte

1) bei gegebenem Abstande von einem Punkte der Kreis um diesen Punkt mit dem Abstande als Halbmesser; (2, 5.)
2) bei gleichem Abstande von zwei Punkten die Mittelsenkrechte auf ihrer Verbindungslinie; (5, 8, 7.)
3) bei gegebenem Abstande von einer Geraden zwei gerade Linien, welche zu beiden Seiten derselben in diesem Abstande in gleicher Richtung mit ihr laufen; (8, 6, 2.)
4) bei gleichem Abstande von zwei gleichgerichteten Geraden die mitten zwischen ihnen in gleicher Richtung laufende Gerade (8, 6, 4) und
5) bei gleichem Abstande von zwei sich schneidenden Geraden die deren Winkel halbierenden Geraden, also zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade. (10, 17.)

[Das dritte Verfahren, Aufgaben zu lösen, das mittels ähnlicher Figur, folgt 19, 16.]

19. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) Eine Gerade, welche zwei um denselben Mittelpunkt beschriebene Kreise schneidet, hat zwischen den Kreisen gleiche Strecken.

2) Zwei Sehnen eines Kreises, welche einen Durchmesser in demselben Punkte unter gleichen Winkeln schneiden, sind gleich.

3) Die Durchmesser, welche nach den Endpunkten der einen von zwei gleichgerichteten Sehnen gehen, schneiden auf der andern von ihren Enden aus gleiche Strecken ab.

4) Wenn man auf einer Sehne in ihren Endpunkten Senkrechte errichtet und durch beide einen Durchmesser zieht, so sind die Abschnitte desselben zwischen den Schnittpunkten und dem Kreise gleich.

5) Fällt man von den Endpunkten eines Durchmessers Senkrechte auf eine den Kreis schneidende Gerade, so werden auf ihr die Strecken zwischen dem Kreise und den Fufspunkten gleich.

6) Zwei Sehnen, die von den Endpunkten eines Durchmessers aus nach entgegengesetzten Richtungen laufen, sind gleich und ihre Endpunkte liegen mit dem Mittelpunkte in gerader Linie. (6, 1 und 8, 11.)

7) Errichtet man auf einem Durchmesser in den Endpunkten Senkrechte bis zum Schnitt mit einer beliebigen Berührungslinie, so ist 1) die auf ihr abgegrenzte Strecke gleich der Summe der Senkrechten, 2) treffen die von den Schnittpunkten zum Mittelpunkte gehenden Geraden sich rechtwinklig, und 3) berührt der über der Strecke als Durchmesser zu beschreibende Kreis den ersten Durchmesser im Mittelpunkte. (8, 13 und 17.) [Vergl. (11, 10, 9).]

b) Aufgaben.

8) Welches ist der Ort für die Mittelpunkte sämtlicher Kreise, welche eine feste Gerade in einem gegebenen Punkte berühren? [Man beweise, dafs kein Punkt aufserhalb des Ortes Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher die Gerade im gegebenen Punkte berühren könnte. (Nr. 12.)]

9) Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt diejenige Sehne zu ziehen, welche durch ihn halbiert wird.

10) Auf dem Zeichenblatte hat man einen Kreis dadurch hergestellt, dafs man die Bleistiftspitze um eine Münze herumführte. Wie bestimmt man den Mittelpunkt dieses Kreises durch einen genau gezogenen Durchmesser?

11) In einen Kreis eine Sehne von gegebener Länge und Richtung einzutragen. (Man fälle vom Mittelpunkte auf die die Richtung angebende Gerade die Senkrechte.)

12) Durch eine gegebene Kreissehne in gegebener Richtung eine zweite so zu ziehen, dafs sie von der ersten halbiert wird.

13) Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt die kleinste Sehne zu ziehen.

14) Welches ist der Ort der Halbierungspunkte gleicher Sehnen eines Kreises?

15) Welches ist für einen gegebenen Kreis der Ort der Endpunkte aller Berührungslinien von gegebener Länge?

16) Durch eine gegebene Kreissehne eine andere von gegebener Länge so zu legen, dafs sie von der ersten halbiert wird.

17) An einen gegebenen Kreis zwei Berührungslinien zu legen, welche einen gegebenen Winkel α einschliefsen.

18) An einen gegebenen Kreis Berührungslinien zu legen, welche a) gleiche Richtung mit einer gegebenen Geraden haben, oder b) auf einer gegebenen Geraden senkrecht stehen, oder allgemeiner c) sie unter einem gegebenen Winkel schneiden.

19) An einen gegebenen Kreis eine Berührende zu legen, von welcher durch zwei gegebene gleichgerichtete Gerade eine gegebene Strecke a abgegrenzt wird.

20) Durch einen zwischen zwei gleichlaufenden Geraden gegebenen Punkt einen Kreis zu ziehen, der beide Gerade berührt. (2 Lösungen.)

21) Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei sich schneidende Gerade berührt, und zwar die eine in einem bestimmten Punkte. [2 Lösungen. (Nr. 17.) Welche Stelle bleibt für den zu gebenden Berührungspunkt auszuschliefsen?]

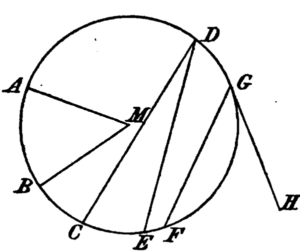
22) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei sich schneidende Gerade berührt. [4 Lösungen. (Nr. 17.)]

---

11. Glied. b) Der Kreis in Verbindung mit dem Winkel.

1. Erklärungen. Ein Winkel, dessen Schenkel Halbmesser sind, dessen Scheitel also im Mittelpunkte des Kreises ist, heifst Winkel am Mittelpunkte. Ein Winkel, dessen Schenkel Sehnen oder eine Sehne und eine Berührungslinie sind, dessen Scheitel also am Umfange des Kreises liegt, ist ein Winkel am Umfange. Die Schenkel gehen durch die Endpunkte eines Bogens und man sagt, der Winkel steht auf diesem Bogen.

Der Winkel am Mittelpunkte, *AMB*, steht auf dem Bogen *AB*; $\angle$ *CDE*, ein Winkel am Umfange, steht auf *CE*, und auch vom Winkel *FGH*, dessen Schenkel die Sehne *GF* und die Berührende *GH* sind, sagt man, er steht auf dem Bogen *FG* (was in Nr. 7, 8, Anm. noch gerechtfertigt wird). Von dem Bogen *CBDFE*, welcher vom ersten Schenkel des Winkels *CDE*, durch den Scheitel gehend, bis zum zweiten Schenkel ausgespannt ist, sagt man: er ist der Kreisbogen, welcher den Winkel fafst.



Figur 79.

Das Stück der vom Kreise umgrenzten Fläche, welches durch eine Sehne abgeschnitten wird, heifst Kreis-Abschnitt; dagegen ein Stück, welches durch zwei Halbmesser ausgeschnitten wird, ein Kreis-Ausschnitt. Ein Abschnitt wird von einer Sehne und einem Bogen, ein Ausschnitt von zwei Halbmessern und einem Bogen begrenzt. Die Sehne *JK* liefert zwei Abschnitte, *JPK* und *JOK*. Nicht nur *LMNO* ist ein Ausschnitt, sondern auch der andere Teil des Kreises, *LMNPL*, dessen Winkel am Mittelpunkt ein überstumpfer ist.

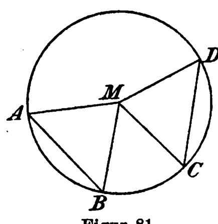

Figur 80.

Ein Winkel am Kreise, wie *FGH*, heifst Abschnittswinkel.*)

Die folgenden 4 Lehrsätze, Nr. 2 bis 5, werden durch Deckung bewiesen. (2, 4.)

2. Ls. Kreise mit gleichen Halbmessern sind deckbar, also gleich grofs.

3. Ls. Jeder Durchmesser teilt die Kreisfläche und die Kreislinie in zwei übereinstimmende Teile. Jeder derselben heifst ein Halbkreis.



Figur 81.

4. Ls. In demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte und Abschnitte.

5. Umkehrung. In demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören zu gleichen Bogen gleiche Winkel am Mittelpunkte, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte und Abschnitte.

6. Umkehrung. In demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören zu gleichen Sehnen gleiche Winkel am Mittelpunkte, gleiche Bogen, gleiche Aus- und Abschnitte.

Bw. Da nach dem 3. Satze $\triangle$ *MAB* $\cong$ *MCD*, so ist $\angle$ *AMB* = *CMD*; mithin sind auch die übrigen Stücke gleich nach Nr. 4.

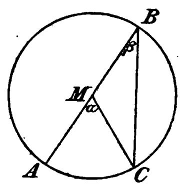
Zs. In demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehört zu dem gröfseren Winkel am Mittelpunkte der gröfsere Bogen, Ausschnitt und Abschnitt (aber nicht notwendig die gröfsere Sehne).

---

*) „Centrum" ist Mittelpunkt; „Centriwinkel" ein Winkel am Mittelpunkt. „Peripherie" ist Kreislinie, „Peripheriewinkel" ein Winkel am Umfang. „Segment" ist Abschnitt, „Sektor" Ausschnitt.

7. Ls. **Jeder Winkel am Umfange ist halb so grofs wie der auf demselben Bogen stehende Winkel am Mittelpunkte.**

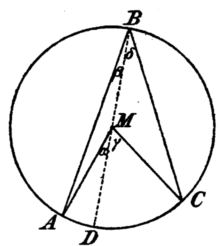
Bh. $\angle ABC = {}^1/_2 AMC$.



Figur 82.

Bw. Nach der Lage des Mittelpunktes zu den Schenkeln des Winkels am Umfange unterscheidet man im Beweise folgende Fälle:

a) Der Mittelpunkt liegt auf einem Schenkel. Dann ist der Winkel am Mittelpunkte Aufsenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, von dem die Behauptung bekannt ist. (5, 14, 1.)

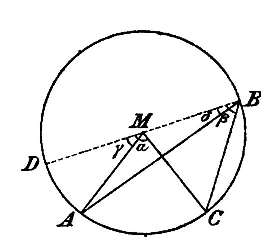


Figur 83.

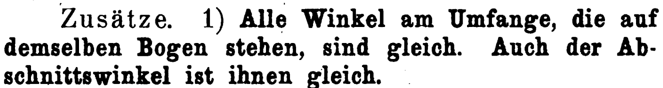
b) Der Mittelpunkt liegt innerhalb des Winkels. Von dessen Spitze aus zieht man den Durchmesser BD und hat zweimal den vorigen Fall. Die Summe giebt die Behauptung.

c) Der Mittelpunkt liegt aufserhalb des Winkels. Dann liefert wieder der Durchmesser BD zwei Gleichungen, und man zieht von der mit den gröfseren Winkeln die andere ab, und erhält:

$$\beta - \delta = {}^1/_2\alpha - {}^1/_2\gamma = {}^1/_2(\alpha - \gamma).$$



Figur 84.



d) Besonders zu behandeln bleibt der Winkel am Umfange, welcher eine Berührende zum Schenkel hat. Auf die Sehne AB fällt man vom Mittelpunkte die Senkrechte. Sie halbiert den Winkel am Mittelpunkte und es ist ${}^1/_2\alpha = R - \gamma$ und auch $\beta = R - \gamma$ (10, 12); also ist $\beta = {}^1/_2\alpha$.

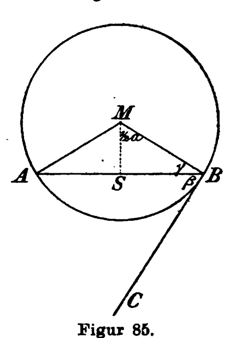
Zusätze. 1) **Alle Winkel am Umfange, die auf demselben Bogen stehen, sind gleich. Auch der Abschnittswinkel ist ihnen gleich.**

Bw. Zu allen gehört derselbe Winkel am Mittelpunkte, dessen Hälfte jeder gleich ist.

2) Winkel an demselben Kreisumfange, die auf gleichen Bogen stehen, sind gleich.

Bw. durch Nr. 5.

3) Gleiche Winkel an demselben Kreisumfange stehen auf gleichen Bogen oder Sehnen. (Nr. 4.)



Figur 85.

Bemerkung. Ein auf einem Halbkreise stehender Winkel am Umfange liegt auch in einem Halbkreise und kann deshalb kurz als Winkel im Halbkreise bezeichnet werden.



4) **Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter.***)

Bw. Der zugehörige Winkel am Mittelpunkte ist ein gestreckter.

5) Ein Winkel am Umfange ist spitz, wenn er auf einem Bogen steht, der kleiner als ein Halbkreis ist; er ist stumpf, wenn der Bogen gröfser als ein Halbkreis ist.

---

*) Lehrsatz des Thales von Milet, einer ionischen Kolonie in Kleinasien. Er lebte um 600 vor Christus. (Wie alt ist der Satz?)

6) Ist ein Winkel am Umfange ein Rechter, so ist die zugehörige Sehne ein Durchmesser.

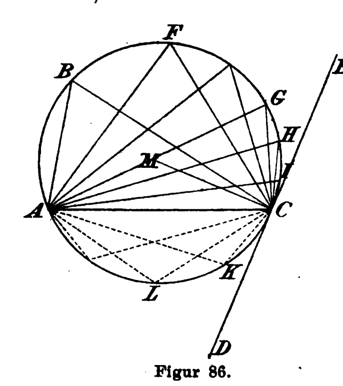
7) Der Ort der Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, die auf derselben gröfsten Seite stehen, ist der Halbkreis über der gröfsten Seite als Durchmesser.

Bw. Solche Winkelspitze kann weder aufserhalb, noch innerhalb des Halbkreises liegen. Eine Hilfslinie nach dem Schnittpunkte auf dem Bogen würde einen Widerspruch mit dem Satze vom Aufsenwinkel eines Dreiecks zeigen. (**5**, 4.)

8) Winkel am Umfange auf derselben Sehne, aber in entgegengesetzten Abschnitten, ergänzen sich zu 2 Rechten.

Bw. Die zugehörigen Winkel am Mittelpunkte ergänzen sich zu 4 Rechten.

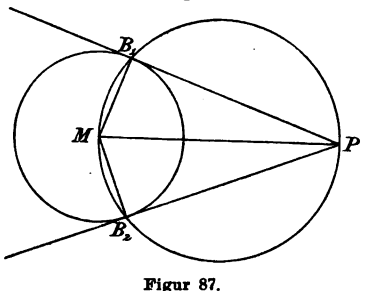
Anmerkung. **Läuft der Scheitel eines Winkels *ABC* am Kreisumfange herum, während die Schenkel stets durch die Endpunkte der Sehne *AC* gehen, so behält der Winkel immer dieselbe Gröfse. (Zs. 1.) Nähert sich der Scheitel dem Endpunkte *C*, so tritt die kürzer werdende Sehne (*GC*, *HC*, *IC*, die man mit ihren Verlängerungen als Schneidende denken möge) immer näher an ihren Bogen heran und geht in ihn über, wenn beide bis zum Verschwinden vermindert werden in dem Augenblicke, in welchem der herankommende Schnittpunkt mit *C* zusammenfliefst und aus der Schneidenden eine Berührende wird. — Der Punkt, welcher durch Umlauf um *M* den Kreis entstehen liefs, bewegte sich bei *C* augenblicklich in der Richtung, welche die vom Halbmesser *MC* rechtwinklig abgehende Berührungslinie *CD* fortsetzt, und darum ist *ACD* der Winkel des Abschnitts *ACL* an der Ecke *C*. — Dieser den Winkeln am Umfange gleiche Abschnittswinkel *ACD* stellt jenen herumlaufenden Winkel *AIC* dar in dem Augenblicke, wo *I* in *C* ankommt. Der Winkel *ACD*, mit einer Berührenden als Schenkel, mufs also mit zu den Winkeln am Umfange gehören. (Erklärung in Nr. 1.) — Der mit seinem Scheitel im andern Bogen *ALC* herumlaufende stumpfe Winkel geht, wenn der Schenkel *KC* verschwindend klein wird, in $\angle$ *ACE* über. In den Nebenwinkeln *ACD* und *ACE* kommen die beiden zur Sehne *AC* gehörigen entgegengesetzten Winkel am Umfange, die sich auch zu 2 Rechten ergänzen, zusammen.**



Figur 86.

8. Hauptaufgabe. **Von einem Punkte aufserhalb eines Kreises die beiden Berührungslinien an denselben zu legen.**

Vorbereitung. Über der Strecke, vom gegebenen Punkte *P* bis zum Mittelpunkte *M*, bildet der nach dem Berührungspunkte gehende Halbmesser mit der gesuchten Berührungslinie ein rechtwinkliges Dreieck. Da nun die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke über und unter *MP* in dem mit *MP* als Durchmesser zu beschreibenden Kreise liegen (Nr. 7, 7), so ist die Ausführung und der Beweis leicht anzugeben. (Nr. 7, 4 und **10**, **11**.)



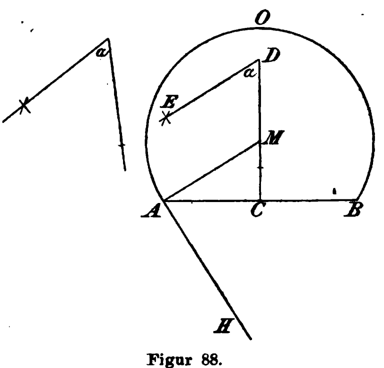
Figur 87.

Anmerk. Unter der Gröfse einer Berührenden versteht man die Strecke, vom Ausgangspunkte bis zum Berührungspunkte.

9. Hauptaufgabe. **Über einer gegebenen Strecke als Sehne den Kreisbogen zu beschreiben, in welchem jeder Winkel am Bogen eine gegebene Gröfse hat.**

Gegeben: Strecke AB und $\angle \alpha$.

Ausführung. 1) Da der halbe Winkel am Mittelpunkte dem gegebenen Winkel α gleich werden mufs (Nr. 7), errichtet man mitten auf AB die Senkrechte CD und legt an sie irgendwo den Winkel α an als $\angle CDE$. (6, 5, 1.) Die von A aus mit dem freien Schenkel ED gleichlaufende Gerade giebt auf CD den Mittelpunkt M des mit MA zu beschreibenden Bogens AOB.



Figur 88.

Bw. durch 4, 8 und Nr. 7.

Man kann auch 2) den Winkel α als BAH in einem Endpunkte der Strecke AB antragen und ihn zum Winkel am Umfange, mit einer Berührenden als Schenkel, werden lassen. (Nr. 7, d.) Die Mittelsenkrechte CD und die Senkrechte AM auf dem angetragenen Schenkel liefern den Mittelpunkt.

Zusatz. Der Ort der Spitzen aller Dreiecke über derselben Seite a und mit gleichem Gegenwinkel α ist der über dieser Seite als Sehne zu beschreibende Kreisbogen, welcher den Winkel α fafst.

Bw. wie Nr. 7, 7).

10. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) Die vom Kreismittelpunkte auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbiert die zugehörigen Bogen.

2) Zwischen gleichgerichteten Sehnen eines Kreises liegen gleiche Bogen. (Zum Bw. verbinde man den Anfangspunkt der ersten Sehne mit dem Endpunkte der zweiten.)

3) Die Umkehrung dieses Satzes.

4) Die Endpunkte gleicher Bogen eines Kreises sind die Ecken eines geraden Trapezes.

5) Zwei sich rechtwinklig schneidende Sehnen teilen den Kreis in vier Bogen, von denen die Summen je zweier gegenüberliegenden gleich sind.

6) Eine in Richtung einer Berührenden gezogene Sehne schneidet vom Kreise einen Bogen ab, welchen der Berührungspunkt halbiert.

7) Die Umkehrung dieses Satzes.

8) Die Halbierungslinie eines Abschnittswinkels halbiert den Bogen des Abschnitts.

9) Fällt man von den Endpunkten eines Durchmessers Senkrechte auf eine Berührende und vom Berührungspunkte die Senkrechte auf den Durchmesser, so werden dessen Teile gleich den anstofsenden Senkrechten, und die Teile der Be-

rührenden gleich der Senkrechten auf dem Durchmesser. (Zum Bw. verbinde man den Berührungspunkt mit den Endpunkten des Durchmessers.) [Vergl. **10**, 19, 7).]

10) Der Ort der Mitte für alle Linien von derselben Länge, welche zwischen die Schenkel eines rechten Winkels eingefügt werden können, ist der im rechten Winkel liegende Bogen des Kreises, welcher um den Scheitel mit der halben Länge der Linien als Halbmesser beschrieben wird.

b) Aufgaben.

11) Einen Winkel zu zeichnen, welcher dreimal so grofs ist, wie ein gegebener Winkel.

12) Einen Winkel zu zeichnen, welcher das $1^1/_2$ fache eines gegebenen Winkels ist.

13) Welches ist der Ort der Halbierungspunkte aller Sehnen eines Kreises, welche in einem Punkte sich schneiden, der a auf dem Umfange, b) innerhalb, c) aufserhalb des Kreises liegt?

14) Ein rechtwinkliges Dreieck über der gegebenen gröfsten Seite herzustellen, wenn gegeben ist a) der Fufspunkt der Höhe auf ihr, oder b) die Höhe auf der gröfsten Seite. (Siehe **5**, 12, Anm.)

Über einer gegebenen Seite ein Dreieck herzustellen, wenn gegeben ist ihr Gegenwinkel und 15) die zu dieser Grundseite gehörige Höhe (Nr. 9, Zs.)

oder 16) die Höhe auf einer Nebenseite

oder 17) die Entfernung der Spitze des Dreiecks von der Mitte der Grundseite

oder 18) die Summe der beiden andern Seiten. [Zunächst verlängere man in einem beliebigen Dreiecke die eine der Nebenseiten um die andere und verbinde den Endpunkt der erhaltenen Summe mit dem Endpunkte der zweiten Seite. Bei dem so angesetzten gleichschenkligen Dreiecke kennt man den Aufsenwinkel an der Spitze. **5**, 14, 1).]

19) Ein Dreieck mit einer Seite und den zu den beiden andern Seiten gehörigen Höhen zu zeichnen.

20) Von einem aufserhalb eines Kreises gegebenen Punkte aus durch diesen eine Gerade so zu ziehen, dafs ihre innerhalb desselben liegende Strecke von einer gegebenen Sehne halbiert wird.

21) In einen Kreis durch einen gegebenen Punkt eine Sehne von gegebener Länge zu legen. [**10**, 19, 14) und hier Nr. 8.]

22) Einen Punkt so zu bestimmen, dafs die von ihm aus nach drei gegebenen Punkten gehenden Geraden gleiche Winkel bei ihm einschliefsen. [**3**, 10, 5) und hier Nr. 9.]

23) Ein rechtwinkliges Dreieck herzustellen, wenn gegeben sind durch zwei Punkte die Lage des Scheitels des rechten Winkels und der Mitte der gröfsten Seite, sowie die Gröfse einer der kleineren Seiten.

24) Den Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche, mit gegebenem Halbmesser beschrieben, eine gegebene Kreislinie halbieren. [**5**, 7. Die Schnittpunkte eines solchen Kreises verbinde man mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises und zeige, dafs die Verbindungslinien eine Gerade bilden.]

12. Glied. c) Der Kreis in Verbindung mit geradlinigen Figuren.

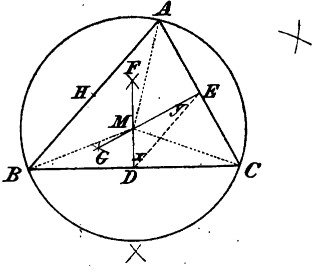
1. Erklärungen. Von einer geradlinigen Figur sagt man: sie ist **in** einen Kreis beschrieben, wenn der Kreis durch alle Ecken geht. Der Kreis ist um das Vieleck beschrieben, und heifst der dem Vieleck umbeschriebene Kreis. Sein Halbmesser wird mit r bezeichnet.

Eine geradlinige Figur ist **um** einen Kreis beschrieben, wenn der Kreis alle Seiten berührt. Der Kreis ist in das Vieleck beschrieben und wird der dem Vieleck einbeschriebene Kreis genannt. Das Zeichen für seinen Halbmesser ist ϱ [der griechische Buchstabe Rho].

2. Aufgabe. **Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.**

Ausführung. Auf zwei Seiten errichtet man die Mittelsenkrechten. Ihr Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises, der mit dem Abstande von einer Ecke beschrieben wird.

Bw. Die Mittelsenkrechten DF und EG müssen sich schneiden. Denn, zieht man DE, so ist $\angle x$ als Teil eines Rechten, kleiner als ein Rechter; $\angle y$ auch; sie sind zusammen < 2 R; mithin schneiden sich DF und EG nach dem Ls. **4**, 9. — Nach **5**, 8, 7) ist $MB = MC$, und auch $MA = MC$. Weil also $MA = MB = MC$ ist, geht der mit einer von ihnen um M beschriebene Kreis durch die 3 Eckpunkte.



Figur 89.

Anmerk. Um ein Dreieck läfst sich immer ein Kreis beschreiben, aber nur ein Kreis. Denn fällt man von M auf die dritte Seite die Senkrechte, so geht sie durch den Halbierungspunkt dieser Sehne. Hätte man also diese Seite als die zweite genommen, so würde ihre Mittelsenkrechte die andere auch in M geschnitten haben. Daher:

Ls. **Die Mittelsenkrechten der 3 Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises.**

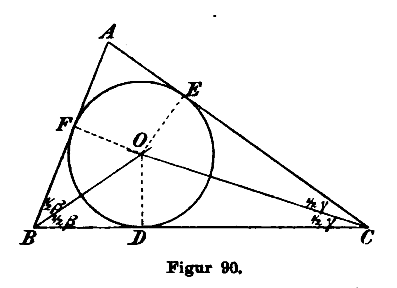
Zusätze. 1) Durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, läfst sich immer ein Kreis, aber nur ein Kreis legen. Eine gerade Linie wird durch zwei Punkte, eine Kreislinie wird durch drei von ihren Punkten (unabänderlich) bestimmt.

2) Beim rechtwinkligen Dreiecke liegt der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises mitten auf der gröfsten Seite. [**8**, 18, Zs. Vergl. **11**, 7, 6).] Verändert man das Dreieck dadurch, dafs man den rechten Winkel gröfser macht, so tritt der Mittelpunkt aus dem nun stumpfwinkligen Dreiecke heraus; läfst man ihn aber kleiner werden, so rückt der Mittelpunkt in das Innere des spitzwinkligen Dreiecks.

3. Aufgabe. **In ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.**

Ausführung. Zwei Winkel des Dreiecks werden halbiert. Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Mittelpunkte des verlangten Kreises, der mit dem Abstande des Schnittpunktes von einer Seite zu beschreiben ist.

Bw. Die Winkelhalbierenden müssen sich schneiden, da $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$ sogar $<$ 1 R ist. (**4**, 9.) Zieht man vom Schnittpunkte O die Abstände von jeder Seite, so geben übereinstimmende Dreiecke $OF = OD$ und auch $OE = OD$; mithin geht der um O mit einer von ihnen beschriebene Kreis durch die Fufspunkte der drei Senkrechten; und da in den Endpunkten dieser Halbmesser die Dreiecksseiten senkrecht stehen, so sind sie Berührungslinien des Kreises. (**10**, **11**.)



Figur 90.

Anmerk. Verbindet man den Mittelpunkt O mit der Spitze des dritten Winkels, so wird dieser halbiert. (4. Satz.) Mithin hätte die Halbierungslinie dieses Winkels mit einer der vorigen denselben Punkt O geliefert. Deshalb läfst sich in ein Dreieck immer nur ein Kreis einbeschreiben. Daher:

Ls. **Die Halbierungslinien der 3 Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises.**

Schlufsbemerkung. Den Mittelpunkt des um- oder einzubeschreibenden Kreises zu finden, werden die Seiten oder die Winkel halbiert. Was von beiden geschehen mufs, ist leicht zu behalten, wenn man bedenkt, ob die Dreiecksseiten Sehnen oder sich schneidende Berührungslinien werden sollen, von denen aus man zum Kreismittelpunkte gelangen will. (**10**, 5 und **15**, Zs.)

4. Bei jedem Dreiecke giebt es noch drei andere Kreise, welche je eine Seite und die Verlängerungen der beiden andern Seiten berühren. Diese werden die anbeschriebenen Kreise genannt.

Ls. **Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels und die Halbierungslinien der Aufsenwinkel an seiner Gegenseite schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des der Gegenseite anbeschriebenen Kreises.** (Figur in **13**, 6.)

Bw. wie in **12**, 3 und Anm. Zur Bezeichnung des Halbmessers eines anbeschriebenen Kreises setzt man rechts unten an ϱ als Zeiger den Buchstaben der Seite, welche selbst von diesem Kreise berührt wird: ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c.

5. Vorbemerkung. Weil durch drei Punkte ein Kreis völlig bestimmt ist, so folgt, dafs um ein Viereck, Fünfeck, Sechseck, ... Vieleck nicht immer ein Kreis möglich ist; sondern dafs zu drei Eckpunkten die übrigen eine gewisse Lage haben müssen, wenn der durch diese drei Eckpunkte festgelegte Kreis auch durch sie gehen soll.

Ein Viereck, um welches sich ein Kreis beschreiben läfst, wird ein Sehnenviereck genannt.

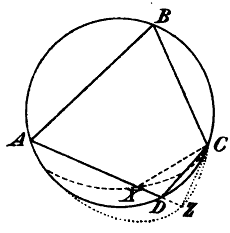
6. Ls. **Im Sehnenviereck sind je zwei Gegenwinkel zusammen 2 R.** (**11**, 7, 8.)

Zusatz. Ein Aufsenwinkel eines Sehnenvierecks ist gleich dem ihm gegenüberliegenden inneren Winkel. (Vergl. **5**, 4.)

7. Umkehrung. **Sind in einem Viereck zwei Gegenwinkel zusammen 2 Rechte, so läfst sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.**

Vs. $\angle B + D = 2$ R.

Bh. *ABCD* ist ein Sehnenviereck.

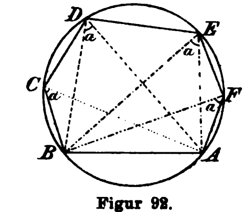


Figur 91.

Bw. Man lege durch 3 Eckpunkte, *A*, *B* und *C*, den Kreis. (Nr. 2.) Ginge derselbe nicht durch den vierten Eckpunkt *D*, so würde *D* entweder aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegen. Liefe der Kreis von *C* aus, wie der Bogen *CXA* andeutet, zwischen *D* und *A* hindurch, so würde man den Schnittpunkt *X* der Seite *DA* mit *C* verbinden und *CXAB* als ein Sehnenviereck erhalten, in welchem $\angle B + CXA = 2$ R sein müfste. (Nr. 6.) Dies gäbe mit der Voraussetzung $\angle CXA = \angle D$, und es wäre der Aufsenwinkel des Dreiecks *CDX* gleich einem inneren Winkel, was dem Lehrsatz **5**, 4 widerspricht. — Ginge aber der Kreis im Bogen um den Punkt *D* herum, so würde man die Seite *AD* bis zu ihm verlängern und den Schnittpunkt *Z* mit *C* verbinden und käme mit dem Winkel *CDA* auf denselben Widerspruch. — Also mufs der Kreis durch den vierten Eckpunkt gehen. Daher ist solches Viereck ein Sehnenviereck.

Zusätze. 1) Ein Rechteck ist ein Sehnenviereck, eine schiefe Raute nicht.

2) Hat ein Vieleck die Eigenschaft, dafs die Verbindungslinien seiner Eckpunkte mit den Endpunkten einer Seite gleiche Winkel einschliefsen, so läfst sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.



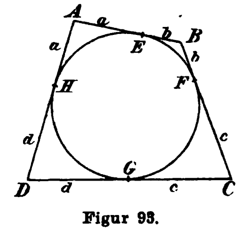
Figur 92.

Der Beweis ist wie der von Nr. 7. (Vergl. **11**, 7, 1.)

3) Wenn in einem Vieleck die Verbindungslinien seiner Eckpunkte mit den Endpunkten einer Eckenlinie Winkel einschliefsen, die teils einander gleich sind, teils solchen Zwischenwinkel zu 2 R ergänzen, so läfst sich um das Vieleck ein Kreis beschreiben.

Bw. durch Anwendung von Zs. 2 und Nr. 7. (Vergl. **11**, 7, 8.)

8. Ls. Im umbeschriebenen Viereck sind die Summen der Gegenseiten gleich.



Figur 93.

Bh. $AB + CD = AD + BC$.

Bw. Nach **10**, 15 ist $AE = AH$. Man bezeichne beide durch ein mitten daran gesetztes a; entsprechend *BE* und *BF* mit b und so fort. Dann wird

$$AB + CD = a + b + c + d$$

und $AD + BC$ auch. Also sind die Summen der Gegenseiten gleich.

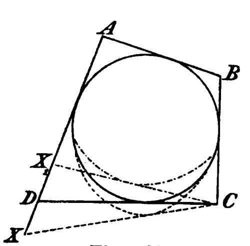
9. Umkehrung. Sind bei einem Viereck die Summen der Gegenseiten gleich, so läfst sich ihm ein Kreis einbeschreiben.

Vs. $AB + CD = AD + BC$.

Bw. Man beschreibe (wie in Nr. 3) den Kreis, welcher drei Seiten des Vierecks berührt. Wenn die vierte Seite, *CD*, ihn nicht auch berührte, so müfste sie ihn entweder schneiden oder keinen Punkt mit ihm gemeinsam haben. Im ersten Falle könnte man von *C* aus an ihn eine Berührende

legen, welche die Verlängerung von AD in X schneiden möge. In dem diesem Kreise umbeschriebenen Vierecke $ABCX$ wäre dann nach Nr. 8

$$AB + CX = AX + BC$$



Figur 94.

und wenn man hiervon die Voraussetzungsgleichung abzieht, bliebe

$$CX - CD = AX - AD = DX$$

was beim $\triangle\, CDX$ nicht möglich ist. (**5**, 3.) Im andern Falle würde man die nun durch CX_1 entstehende Gleichung von der der Voraussetzung abziehen und auf gleichen Widerspruch stofsen. Also mufs der Kreis auch die vierte Seite berühren.

Zusatz. Ein gleichschenkliges Viereck besitzt einen einbeschriebenen Kreis; unter den Rauten nur die gleichseitige.

10. Ls. Ist der Umfang eines Kreises in n gleiche Bogen geteilt, so umschliefsen die zugehörigen Sehnen ein regelmäfsiges n-Eck. (Denn jeder Winkel des Vielecks steht auf welchem Bruchteile des Kreisumfangs?)

11. Ls. **Jedes regelmäfsige Vieleck hat einen umbeschriebenen und einen einbeschriebenen Kreis. Beide haben denselben Mittelpunkt.** (**9**, 5 und Zs. 1 und 2.)

Zusatz. Die Seite des in einen Kreis beschriebenen regelmäfsigen Sechsecks ist gleich dem Halbmesser.

12. Erklärung. Der nach einem Eckpunkte eines regelmäfsigen Vielecks gehende Halbmesser des umbeschriebenen Kreises heifst der grofse, der nach der Mitte einer Seite gehende Halbmesser des einbeschriebenen Kreises der kleine Halbmesser des regelmäfsigen Vielecks.

13. Ls. **Ein regelmäfsiges n-Eck wird durch seine grofsen Halbmesser in n übereinstimmende Dreiecke zerlegt. In solchem beträgt der Winkel am Mittelpunkte $\frac{360^0}{n}$.**

Ein solches Dreieck bestimmt die Stücke des regelmäfsigen Vielecks und wird deshalb das Bestimmungsdreieck des regelmäfsigen n-Ecks genannt.

14. Ls. Verlängert man die kleinen Halbmesser eines regelmäfsigen n-Ecks bis zum umbeschriebenen Kreise und legt durch die Treffpunkte die Berührenden, so entsteht ein umbeschriebenes regelmäfsiges n-Eck, dessen Ecken auf den verlängerten grofsen Halbmessern des einbeschriebenen liegen. (**8**, 13 Der Winkel am Mittelpunkte kann nicht 2 Halbierungslinien haben.)

Zusatz. Die durch die Eckpunkte des einbeschriebenen n-Ecks zu legenden Berührungslinien stumpfen die Ecken dieses umbeschriebenen so ab, dafs daraus ein regelmäfsiges $2n$-Eck hervorgeht.

15. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) **Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.**

Bw. Die durch die Ecken in Richtung der Gegenseiten gezogenen Geraden umschliefsen ein Dreieck, in welchem die Höhen des gegebenen die Mittelsenkrechten sind. (Nr. 2, Ls. in Anm.)

2) Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite schneidet die Halbierungslinie ihres Gegenwinkels und die seines Aufsenwinkels auf dem umbeschriebenen Kreise. (Zum Bw. verbinde man die Endpunkte des Durchmessers mit der Winkelspitze.)

3) Bei einem um einen Kreis beschriebenen Trapeze stehen die vom Mittelpunkte nach den Enden einer Nebenseite gehenden Linien senkrecht auf einander.

4) Bei einem geraden Trapeze, welches um einen Kreis beschrieben ist, wird die Mittellinie gleich einer Nebenseite, und die von einem Endpunkte der kleineren Hauptseite auf die gröfsere gefällte Senkrechte zerlegt sie in zwei Strecken, deren gröfsere auch der Nebenseite gleich ist. (Man bezeichne die Hauptseiten mit $2a$ und $2b$.)

5) In einem Sehnenviereck mit zwei gleichen Nachbarseiten schneiden sich die Eckenlinien unter Winkeln, welche entsprechend so grofs sind, wie die Gegenwinkel des Vierecks an den gleichen Seiten. (**11**, 7, 1 und 2.)

6) Wählt man auf jeder Seite eines Dreiecks einen Punkt und legt durch jede Ecke und die beiden benachbarten Teilpunkte Kreise, so schneiden sich diese Kreise in einem Punkte. (Sehnenvierecke.) — Auch auf Verlängerungen der Dreiecksseiten kann der Punkt gewählt werden.

7) Legt man durch die Eckpunkte eines in einen Kreis beschriebenen Rechtecks die Berührenden, so umschliefsen sie ein umbeschriebenes gleichseitiges Viereck.

8) Die Winkelhalbierenden eines Vierecks umschliefsen ein Sehnenviereck.

9) Die Halbierungslinien der Winkel, unter welchen die Gegenseiten eines Sehnenvierecks sich schneiden, stehen senkrecht auf einander.

10) Fällt man von einem beliebigen Punkte des einem Dreiecke umbeschriebenen Kreises Senkrechte auf die Seiten, so liegen ihre drei Fufspunkte in einer geraden Linie. — Zum Bw. verbinde man den gewählten Punkt P mit den Endpunkten der nächsten Dreiecksseite. Diese Linien und die beiden andern Dreiecksseiten umschliefsen ein Sehnenviereck, das durch den Satz vom Aufsenwinkel (Nr. 6, Zs.) die Gleichheit zweier Winkel liefert, durch welche zwei Winkel bei P zu einem Rechten ergänzt werden, also auch gleich sind. Von diesen kommt man durch zwei andere Sehnenvierecke auf die Gleichheit zweier Winkel beim mittleren Fufspunkte, aus welcher die Behauptung hervorgeht. (**3**, 14.)

11) In jedem um einen Kreis beschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl, einem $2n$-Eck, ist die Summe der 1., 3., 5., ... $(2n - 1)$ten Seite gleich der der 2., 4., 6., ... $2n$ten Seite. (Man schreibe mit der Bezeichnung in Nr. 8 die Gröfse der Seiten der Reihe nach hin, so dafs die 3. Seite unter die 1., die 4. unter die 2. kommt und so fort bis zur letzten $z + a$.)

12) Bei jedem in einen Kreis beschriebenen $2n$-Ecke ist die Summe des 1., 3., 5., ... $(2n - 1)$ten Winkels gleich der Summe des 2., 4., 6., ... $2n$ten Winkels, nämlich $(2n - 2)$ Rechte. (Man ziehe die Halbmesser nach den Eckpunkten und führe dieselbe Bezeichnung für die Teile der Vieleckswinkel ein.)

13) Das Höhendreieck mit dem Feuerbachschen Kreise. Das Dreieck, welches die Höhenfufspunkte eines Dreiecks zu Ecken hat, heifst Höhenfufspunktsdreieck oder kürzer Höhendreieck. Die Strecke einer Höhe, vom Höhenschnittpunkte bis zur Dreiecksspitze, ist ihr oberer Abschnitt. Bezeichnung für ein grofs zu zeichnendes (zuerst spitzwinkliges) Dreieck ABC: die Höhen sind AD, BE, CF, ihr Schnittpunkt H, die Seitenmitten G von BC, J von CA und K

von AB, die Mitten der oberen Höhenabschnitte L von AH, O von BH, P von CH, und M der Mittelpunkt des um ABC beschriebenen Kreises.

a) Vom Dreieck schneidet die Verbindungslinie der Fufspunkte zweier Höhen ein Dreieck ab, welches mit dem gegebenen gleichwinklig ist. (Bw. Der übrig gebliebene Teil des Dreiecks ist ein Sehnenviereck.)

Setzt man hiernach α, β, γ neben die drei Seiten des Höhendreiecks, so folgt

b) Die Winkel des Höhendreiecks werden von den Höhen des gegebenen halbiert.

c) Die Fufspunkte der Höhen, die Mitten der Seiten und die Mitten der oberen Höhenabschnitte liegen auf einem Kreise. [Dieser durch die angegebenen neun Punkte gehende Kreis wird der Feuerbachsche Kreis genannt.*)]

Bw. EGF ist als Winkel am Mittelpunkte eines Halbkreises $= 2\ EBF = 2\ (R - \alpha)$. So grofs ist auch $\angle EDF$. Mithin geht der durch D, F und E zu legende Kreis auch durch G. Ferner ist $\angle FLE$ als Winkel am Mittelpunkte $= 2\alpha$, ergänzt also den Winkel EDF zu 2 R und darum geht der um das Höhendreieck beschriebene Kreis durch L.

Nun folgt unmittelbar

d) Die drei Geraden, welche die Mitten der Seiten mit den Mitten der zugehörigen oberen Höhenabschnitte verbinden, sind Durchmesser des Feuerbachschen Kreises.

e) Der Durchmesser des Feuerbachschen Kreises ist gleich dem Halbmesser des dem gegebenen Dreiecke umbeschriebenen Kreises.

Bw. Die Halbmesser GB und GF machen das Dreieck GBF gleichschenklig, also $\angle BFG = \beta$. Daher ist vom gestreckten Winkel AFB der mittlere Teil $GFE = \alpha$ und diesem ist $\angle GLE$ gleich, als Winkel am Umfange. Nun stimmt $\triangle GLE \cong GMC$ nach dem 1. Satze. Mithin ist $LG = MC$. — Auch folgt hieraus $LE = MG$. Es ist LE als Halbmesser $= LA = LH$. Daher

f) Die vom Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises auf eine Seite gefällte Senkrechte ist die Hälfte des oberen Abschnitts der Höhe zu dieser Seite.

g) Der von einem Eckpunkte ausgehende Durchmesser des umbeschriebenen Kreises schneidet die zur Ecke gehörige Seite des Höhendreiecks rechtwinklig.

Aus e), f) und g) folgt:

h) Auch die von den Mitten der Seiten ausgehenden Durchmesser des Feuerbachschen Kreises schneiden dieselben Seiten des Höhendreiecks rechtwinklig.

i) Die drei von je zwei oberen Höhenabschnitten und einer Dreiecksseite gebildeten Dreiecke haben denselben Feuerbachschen Kreis, wie das gegebene Dreieck.

k) Daher haben die diesen Dreiecken umbeschriebenen Kreise gleiche Halbmesser, und zwar gleich dem des gegebenen Dreiecks. [Nach e).]

---

b) Aufgaben.

Bezeichnung. Bei abgekürzter Angabe der Aufgaben bezeichnet man das Dreieck ABC mit $\triangle$, seinen Umfang $a + b + c$ mit $2s$, den Halbmesser seines umbeschriebenen Kreises mit r, den des einbeschriebenen mit ϱ, die auf $BC = a$ stehende Höhe mit h_a und entsprechend h_b und h_c, die

*) Feuerbach fand diesen Kreis 1822.

von den Eckpunkten nach der Mitte der Gegenseite gezogenen Geraden, die Mittellinien, mit m_a, m_b, m_c, die bis zur Gegenseite verlängerten Halbierungslinien der Winkel, die Winkelhalbierenden, mit w_a, w_b, w_c. Im rechtwinkligen Dreieck sind a und b die kleinen Seiten, c die gröfste; die auf der gröfsten Seite stehende Höhe h.

14) △ aus a, r, h_a.
15) △ aus a, b, r.
16) △ aus $a + b$, r, α. (Es ist $a + b$ als die Strecke m gegeben.)
17) △ aus r, α, β. (**11**, 7.)
18) △ aus r, β, m_b.
19) △ aus r, a, h_c.

---

20) △ aus a, ϱ, β.
21) △ aus h_a, c, ϱ. (2 Lösungen.)
22) △ aus ϱ, α, w_a.
23) △ aus h_a, w_a, ϱ. (Orte für O.)
24) △ aus ϱ, α, h_a. (Man beachte $h_a - \varrho$.)
25) △ aus h_a, ϱ, $\beta - \gamma = \delta$. (Ebenso.)

---

26) △ aus $b + c$, r, α. (**11**, 7 und 9, Zs.)
27) Ein rechtwinkliges Dreieck aus $2s$ und h.
28) △ aus m_b, α, γ. (Man verlängere m_b um sich selbst.)
29) △ aus h_a, m_a, α. (Entsprechend.)
30) △ aus m_a, α, $\angle\, am_a$. (Ebenso.)

---

31) Ein Viereck, in welches sich ein Kreis beschreiben läfst, zu zeichnen aus a, b, $\angle\, ab$, $\angle\, bc$.

32) Ebensolches aus a, b, c, $\angle\, ab$.

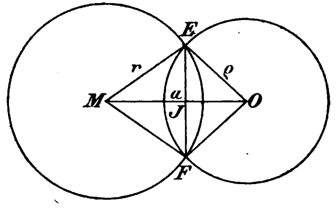
33) Zur Zeichnung eines Vierecks sind gegeben zwei Seiten, a und b, der Zwischenwinkel γ und die Teile seines Gegenwinkels, in welche er durch die Eckenlinie zerlegt wird, α, a gegenüber, und β, b gegenüber. [Snelliussche Aufgabe.*)]

---

13. Glied. d) Der Kreis in Verbindung mit einem andern Kreise.

1. Erklärungen. Die Gerade, welche durch die Mittelpunkte zweier Kreise geht, heifst ihre Achse.**)

Zwei Kreise können nicht drei Punkte gemeinsam haben; sie müfsten in einen zusammenfallen. (**12**, 2, 1.) Zwei Kreise können also höchstens zwei Punkte gemeinsam haben; sie schneiden sich in diesen beiden Punkten. Die Gerade, welche die Schnittpunkte verbindet, ist die beiden Kreisen gemeinsame Sehne. Haben zwei Kreise nur einen Punkt gemein,

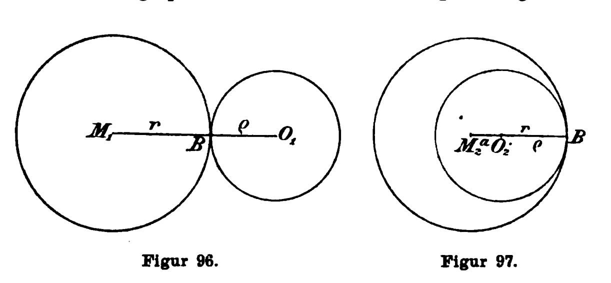


Figur 95.

*) Snellius, geboren 1591, starb schon 1626; er war Professor der Mathematik an der Universität zu Leyden.

**) „Centrum“ ist Mittelpunkt. „Centrale“ ist Achse.

so sagt man von ihnen, sie berühren sich in diesem Punkte. Der Punkt heifst Berührungspunkt. Die Berührung erfolgt von aufsen oder von innen, je nachdem der eine Kreis aufserhalb oder innerhalb des andern liegt.



Figur 96. Figur 97.

2. Ls. **Die gemeinsame Sehne zweier sich schneidenden Kreise steht auf der Achse senkrecht und wird von ihr halbiert.**

Bw. Die nach den Schnittpunkten gehenden Halbmesser beider Kreise bilden ein gleichschenkliges Viereck, von welchem die Behauptung bekannt ist. (8, 13.)

3. Ls. **Haben zwei Kreise einen Punkt ihrer Achse gemein, so berühren sie sich.**

Bw. Diese Kreislinien können sich nicht noch in einem zweiten Punkte treffen, weil die Achse die ihnen dann gemeinsame Sehne halbieren müfste (Nr. 2), während sie doch durch ihren Endpunkt geht.

4. Ls. **Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt auf der Achse.**

Bw. Läge der Berührungspunkt B aufserhalb der Achse, so könnte man von B auf die Achse MO (oder ihre Verlängerung) die Senkrechte BC fällen und um sich selbst bis D verlängern und D mit M und O verbinden. Dann würde $MD = MB$ werden (2. Satz), also der Punkt D, wegen dieser dem Halbmesser MB gleichen Entfernung von M, dem Kreise um M angehören, aber auch dem um O, weil ebenso $OD = OB$ wäre. Die Kreise würden mithin zwei Punkte gemeinsam haben, also sich schneiden, während sie doch sich berühren sollten. Daher mufs der Berührungspunkt auf der Achse liegen.

Zusatz. 1) Berühren sich zwei Kreise von aufsen, so ist der Abstand a ihrer Mittelpunkte gleich der Summe ihrer Halbmesser r und ϱ, also $a = r + \varrho$. 2) Berühren sich zwei Kreise von innen, so ist bei ihnen $a = r - \varrho$. 3) Schneiden sich zwei Kreise, so wird (wie oben $\triangle\, MEO$ zeigt) $r + \varrho > a$ und zugleich $r - \varrho < a$, also

$$r + \varrho > a > r - \varrho.$$

4) Liegt der eine Kreis aufserhalb des andern, ganz getrennt von ihm, so ist $a > r + \varrho$. Endlich 5), wenn der kleine Kreis innerhalb des andern liegt, ohne an ihn zu stofsen, so ist bei ihnen $a < r - \varrho$.

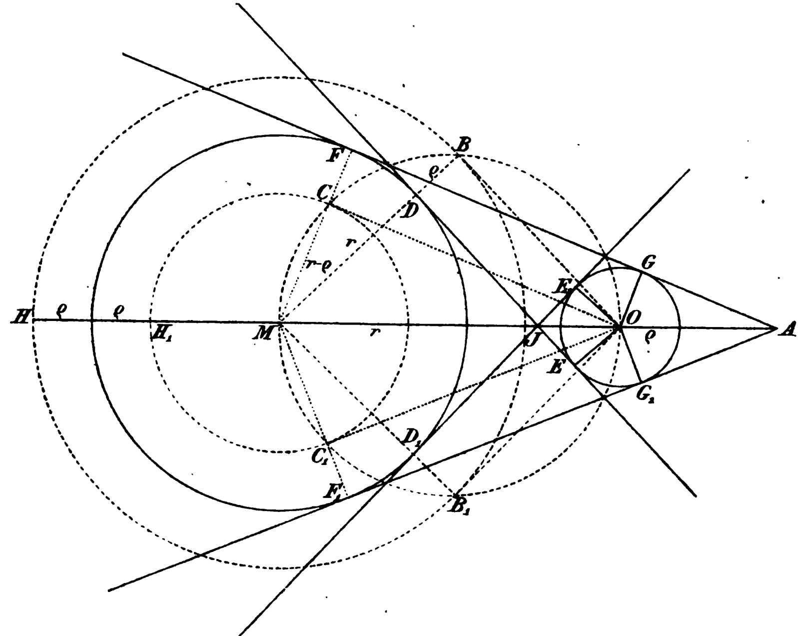
Umkehrung. Weifs man z. B. von zwei Kreisen, dafs ihr Mittelpunktsabstand a gleich dem Unterschiede ihrer Halbmesser r und ϱ ist, so müssen die Kreise sich von innen berühren. Denn in jedem der 4 andern möglichen Fälle wird a nicht, wie es soll, gleich $r - \varrho$.

5. Aufgabe. **An zwei gegebene Kreise die gemeinsamen Berührungslinien zu legen.**

Liegt der Kreis um O mit dem Halbmesser ϱ ganz getrennt von dem um M mit dem Halbmesser r, so giebt es unter den zwischen den Kreisen

hindurch laufenden Geraden zwei, welche jeden der beiden Kreise berühren; und aufsen giebt es auch zwei. Diese sind die äufseren, jene die inneren gemeinsamen Berührungslinien, deren Lage bestimmt werden soll.

Ausführung. Um den Mittelpunkt M des gröfseren Kreises beschreibt man mit $r + \varrho = MH$ und mit $r - \varrho = MH_1$ Hilfskreise und legt an sie vom andern Mittelpunkte O aus Berührende. (**11**, 8.) Die durch deren Be-



Figur 98.

rührungspunkte B, B_1 und C, C_1 gehenden Halbmesser des Kreises um M endigen in den Berührungspunkten D, D_1 und F, F_1 der dort rechtwinklig von ihnen ablaufenden gesuchten Geraden DJ, D_1J und FA, F_1A.

Bw. Um nachzuweisen, dafs diese 4 Berührungslinien des Kreises um M auch den Kreis um O berühren, fällt man auf sie von O die Senkrechten. Dann entstehen rechtwinklige Vierecke, welche zeigen, dafs die Senkrechte $OE = BD = \varrho$, $OE_1 = B_1D_1 = \varrho$ und $OG = CF = \varrho$, $OG_1 = C_1F_1 = \varrho$ wird, so dafs der Kreis um O durch ihre Fufspunkte geht, also die rechtwinklig anstofsenden 4 Geraden berührt. (**10**, 11.)

Zusatz. Der Schnittpunkt der beiden äufseren und der der beiden inneren gemeinsamen Berührungslinien liegt auf der Achse der Kreise.

Bw. Verbindet man den Schnittpunkt A der äufseren Berührenden mit O und mit M, so halbiert jede dieser Verbindungslinien den Winkel FAF_1 (**10**, 15). Da aber ein Winkel nur von einer Geraden halbiert werden kann, so fallen beide Verbindungslinien in eine Linie zusammen, welche, da sie durch O und M geht, die Achse ist. Entsprechendes gilt für die Scheitelwinkel beim Schnittpunkte J der inneren Berührungslinien.

Anmerkung. Rückt man den Kreis um O an den um M heran, so dafs ihr Mittelpunktsabstand $a = r + \varrho$ wird, so geht der äufsere Hilfskreis H durch O und es fliefsen die von O an diesen Kreis zu legenden Berührenden in die eine in O auf OM senkrechte Gerade zusammen. Der nach diesem einzigen Berührungspunkte gerichtete Halbmesser des Kreises um M liegt auf der Achse und endigt, weil nun die gegebenen Kreise sich von aufsen berühren, in deren Berührungspunkt, so dafs in der That nur eine innere Berührungslinie kommen kann. Zwei sich von aufsen berührende Kreise haben also 3 gemeinsame Berührungslinien. — Rückt man O dem Mittelpunkte M näher, so dafs $a < r + \varrho$ wird, aber noch $a > r - \varrho$ bleibt, so geht der grofse Hilfskreis H um O herum, und man kann von dem innerhalb liegenden Punkte O keine Berührende an den Hilfskreis H ziehen; also fallen die inneren Berührenden fort, was natürlich ist, weil die gegebenen Kreise jetzt sich schneiden. Wohl aber erhält man die beiden äufseren Berührenden, da O noch aufserhalb des kleineren Hilfskreises mit dem Halbmesser $r - \varrho$ sich befindet, also die Berührenden OC und OC_1 zu ziehen sind. — Vermindert man den Abstand der Mittelpunkte bis auf $a = r - \varrho$, so geht der Hilfskreis H_1 durch O und macht hier von O aus nur eine Berührende möglich, also auch nur einen durch den Berührungspunkt O gehenden Halbmesser r, dessen Endpunkt der Berührungspunkt der beiden nun sich von innen berührenden Kreise ist. So tritt also nur eine gemeinsame äufsere Berührungslinie auf. — Wollte man a noch weiter vermindern, so würde O auch in den kleineren Hilfskreis treten, folglich von ihm gar keine Berührende ausgehen können; und es sind auch, da der Kreis um O vom grofsen umschlossen wird, gar keine gemeinsame Berührungslinien möglich.

6. Ls. **Bei den 4 gemeinsamen Berührungslinien zweier Kreise ist der zwischen den äufseren liegende Abschnitt jeder inneren gleich der Strecke jeder äufseren zwischen den Berührungspunkten.**

Bh. $BC = FJ = EH$.

Bw. Man zerlege BC auf zwei Weisen

$$BC = BD + DC = BF + CE$$

und

$$BC = BG + GC = BJ + CH$$

deren Summe ist

$$2\,BC = FJ + EH.$$

Da nun $FJ = EH$ ist, wie aus ihrer Verlängerung bis zum Schnittpunkt A hervorgeht, so folgt $2\,BC = 2\,FJ$, also

$$BC = FJ = EH.$$

Figur 99.

Zusätze. 1) Der Kreis um O ist der dem Dreiecke ABC einbeschriebene, und der um N einer der drei anbeschriebenen Kreise. Da die Dreiecksseite BC mit a bezeichnet wird, so ist auf den Schenkeln des Winkels α der Abstand der Berührungspunkte $= a$.

2) Jede Dreiecksseite wird durch den Berührungspunkt vom einbeschriebenen und dem vom anbeschriebenen Kreise in drei Abschnitte geteilt, von denen die beiden äufseren gleich sind.

Bh. $BD = GC$.

Bw. Es war $FJ = BC$. Zieht man hiervon $BF = BD$ ab, so bleibt $BJ = DC$, also auch $BJ = CE$. Diese lassen von $FJ = EH$ übrig $BF = CH$; daher ist auch $BD = GC$.

3) Die Strecken von den Ecken bis zu den Berührungspunkten lassen sich durch die Dreiecksseiten a, b, c ausdrücken. Wir bezeichnen die von A bis E und F mit x, die bei B mit y. und die bei C mit z. Dann ist, wie eben bewiesen, auch $CH = CG = y$ und $BJ = z$.

Die Summe der Dreiecksseiten ist eine gerade Linie, deren Länge mit $2s$ bezeichnet wird. Also

Dreiecksumfang $a + b + c = 2s$

oder, durch x, y und z ausgedrückt, $2x + 2y + 2z = 2s$

daher $x + y + z = s$

was sich schreiben läſst $x + a = s, \quad y + b = s, \quad c + z = s.$

Folglich ist

$$AJ = s, \quad AH = s, \quad x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c.$$

7. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen festen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, ist die vom Mittelpunkte durch diesen Punkt gehende unendliche Gerade.

2) Der Ort der Mittelpunkte aller mit gegebenem Halbmesser ϱ zu beschreibenden Kreise, welche einen festen Kreis berühren, wird aus zwei Kreisen um seinen Mittelpunkt gebildet, deren Halbmesser sind $r + \varrho$ und $r - \varrho$.

3) Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei um denselben Mittelpunkt beschriebene Kreise berühren, besteht aus zwei Kreisen um den gemeinsamen Mittelpunkt, deren Halbmesser sind $\frac{1}{2}(r + \varrho)$ und $\frac{1}{2}(r - \varrho)$.

---

4) Legt man an ein Dreieck einen anbeschriebenen Kreis, so schneidet jede Gerade, deren Berührungspunkt auf dem kleineren Kreisbogen liegt, ein Dreieck von gleichem Umfange $2s$ ab.

5) Die Endpunkte der Durchmesser, welche von einem Schnittpunkte zweier Kreise ausgehen, liegen mit dem andern Schnittpunkte in einer geraden Linie.

6) Bei zwei sich berührenden Kreisen liegen die Endpunkte gleichlaufender Halbmesser mit dem Berührungspunkte auf einer geraden Linie. (Für beide Berührungsweisen zu begründen.)

7) Die beiden ungleichen Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren übereinstimmen, haben gleiche umbeschriebene Kreise. (6, 4, Anm.)

8) In jedem Dreiecke ist $\angle rw = \angle hw = \frac{1}{2}\delta$. [Es ist w eine Winkelhalbierende und δ der Unterschied der beiden andern Dreieckswinkel.] [Hierzu 14) und 15).]

9) Der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Endpunkte einer Dreiecksseite und den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises geht, liegt mitten auf dem von dieser Seite begrenzten Bogen des umbeschriebenen Kreises. Derselbe Kreis geht auch durch den Mittelpunkt des der Dreiecksseite anbeschriebenen Kreises. (5, 10.) — Daher kennt man den Ort der Mittelpunkte der einbeschriebenen

Kreise aller Dreiecke, die im Kreise r über der Sehne a stehen, und zugleich den Ort der Mittelpunkte der der Seite a anbeschriebenen Kreise aller dieser Dreiecke. [Hierzu 13).]

b) Aufgaben.

10) Einem Kreisausschnitt einen Kreis einzubeschreiben (d. h. der Kreis soll alle drei Grenzlinien berühren).

11) In einen Kreis 3 gleiche Kreise zu zeichnen, die sich von aufsen und den gegebenen Kreis von innen berühren.

12) Rings um einen (kleinen) Kreis 4 gleiche Kreise anzulegen, welche ihn und sich nachbarlich berühren.

---

13) $\triangle$ aus a, r und ϱ, oder aus a, r und ϱ_a. [Gehört zu 9).]
14) $\triangle$ aus r, h_a, $\beta - \gamma = \delta$. [Zu 8).]
15) $\triangle$ aus h, w, m für dieselbe Grundseite. [Zu 8).]

---

16) $\triangle$ aus a, ϱ, ϱ_a.
17) $\triangle$ aus ϱ, α, a.
18) $\triangle$ aus $2s$, α, w_a.
19) $\triangle$ aus ϱ, α, $2s$.
20) $\triangle$ aus $2s$, α, h_a.
21) $\triangle$ aus a, $b - c$, ϱ. [Nr. 6, 3).]
22) Rechtwinkliges Dreieck aus r und ϱ. [Nr. 6, 3).]

---

23) Zwischen zwei Kreisen mit demselben Mittelpunkte ist ein Punkt gegeben. Durch diesen sollen die Kreise gelegt werden, welche die gegebenen berühren.

24) Um zwei gegebene Punkte sich berührende Kreise so zu beschreiben, dafs der eine von ihnen auch eine gegebene Gerade berührt. (2 Lösungen.)

25) Den Kreis zu finden, welcher einen gegebenen Kreis an einer bestimmten Stelle berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

26) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis an bestimmter Stelle und eine gegebene Gerade berührt. (2 Lösungen.)

27) Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise berührt, und zwar den ersten an bestimmter Stelle. (Man verbinde den Endpunkt eines gewissen $r - \varrho$ und $r + \varrho$ mit dem Mittelpunkte des zweiten Kreises.)

---

28) Mit gegebenem Halbmesser Kreise zu beschreiben, die durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis berühren. (Verschiedene Lagen des Punktes; $\varrho \gtreqless r$.)

29) Mit gegebenem Halbmesser Kreise zu zeichnen, welche eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berühren.

30) Mit gegebenem Halbmesser Kreise zu beschreiben, welche zwei gegebene Kreise berühren.

---

31) Den Ort der Mittelpunkte aller Kreise vom Halbmesser ϱ zu bestimmen, welche einen gegebenen Kreis so schneiden, dafs die gemeinsame Sehne eine gegebene Länge hat. (2 Kreise.)

32) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher von einem gegebenem Kreise $^1/_4$ des Umfangs abschneidet und durch einen gegebenen Punkt geht.

33) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu zeichnen, der von einer gege-

benen Geraden eine Strecke von bestimmter Länge abschneidet und einen gegebenen Kreis berührt.

34) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher einen von zwei gegebenen Kreisen halbiert und vom andern $^1/_3$ abschneidet.

---

2. Abschnitt. Gleichheit der Figuren.

14. Glied. Vergleichung der Rauten und Dreiecke.

1. Erklärungen. 1) Figuren sind gleich (gleich grofs), wenn sie gleichen Flächeninhalt haben.

Figuren, welche sich zur Deckung bringen lassen, sind gleich. Sie stimmen in Gröfse und Gestalt überein. Es wird im Folgenden nachgewiesen werden, dafs Figuren gleich sein können, ohne dieselbe Gestalt zu haben.

2) Im Dreieck ist die von einem Eckpunkte auf die Gegenseite (oder deren Verlängerung) gefällte Senkrechte die zu dieser Grundseite gehörige Höhe des Dreiecks. Ein Dreieck hat drei Höhen, da jede Seite als Grundseite genommen werden kann. In einer Raute sind die auf eine Grundseite von Punkten ihrer Gegenseite gefällten Senkrechten einander gleich. (**8**, 5, 2.) Irgend eine derselben ist als die zu dieser Grundseite gehörige Höhe der Raute zu nehmen. Ihrer Gegenseite gehört dieselbe Höhe an. (**4**, 10, 2.) Zwischen den beiden andern Gegenseiten steht eine andere Höhe. Eine Raute hat zwei Höhen, ein Dreieck drei.

Zusatz. In einer gleichseitigen Raute sind beide Höhen gleich. (Zum Beweise ziehe man die Höhen von den Endpunkten der anstofsenden Seiten, damit zwei Dreiecke entstehen.) [Vergl. **6**, 7, 2.]

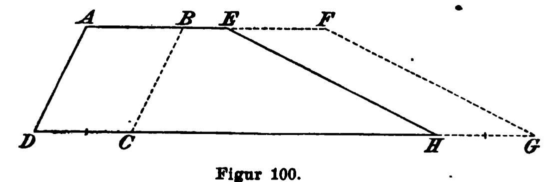
3) Im Trapez sind nur die gleichlaufenden Hauptseiten als Grundseiten zu nehmen. Ihr senkrechter Abstand ist die Höhe des Trapezes.

2. Ls. Stellt man Rauten von gleicher Höhe mit den Grundseiten auf dieselbe unbegrenzte Gerade, so liegen deren Gegenseiten in einer der Grundlinie gleichlaufenden Geraden. (**8**, 6, 2.)

Zs. Von den Spitzen gleich hoher Dreiecke gilt dasselbe.

3. Ls. **Rauten von gleicher Grundseite und Höhe sind gleich.**

Man stelle die beiden gleich hohen Rauten auf dieselbe unbegrenzte Gerade fern von einander, so liegen sie (nach Nr. 2) zwischen gleichlaufenden Geraden. *AF* || *DG*.



Figur 100.

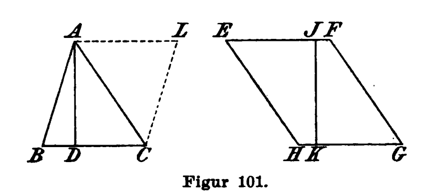
Bh. *ABCD* = *EFGH*.

Bw. Das Trapez *AEHD* ist deckbar mit *BFGC*, aus

Gleichheit von zwei Paar gehörig gewählter Seiten und Winkel; also ist *AEHD* = *BFGC*. Zieht man von beiden das Mittelstück *BEHC* ab, so bleibt *ABCD* = *EFGH*.

Anmerkung. Wenn kein Mifsverständnis zu erwarten ist, kann man eine Raute kürzer bezeichnen nur durch zwei Buchstaben, welche an Gegenecken stehen (die nicht durch eine Gerade verbunden sind). So läfst sich die Behauptung kürzer sprechen: Raute *AC* = *EG*. Noch kürzer kann man eine Figur durch einen mitten in sie gesetzten Buchstaben kenntlich machen.

4. Ls. **Ein Dreieck ist halb so grofs wie eine Raute von gleicher Grundseite und Höhe.**



Figur 101.

Vs. *BC* = *HG*, *AD* = *JK*.

Bh. △ *ABC* = $^1/_2$ *EG*.

Bw. Zieht man durch *A* und *C* Gerade in Richtung der Gegenseiten, so entsteht die Raute *BL*. Das angesetzte Dreieck *ALC* ≌ *ABC*. (8, 3.) Daher ist *ABC* = $^1/_2$ *BL*. Da nun Raute *BL* = *EG* ist (Nr. 3), so folgt △ *ABC* = $^1/_2$ *EG*.

Zusatz. Ein Dreieck ist gleich einer Raute von gleicher Grundseite und halber Höhe oder von gleicher Höhe und halber Grundseite.

5. Ls. **Dreiecke von gleicher Grundseite und Höhe sind gleich.**

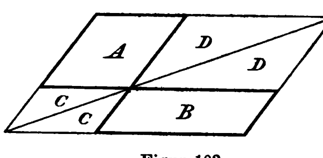
Bw. Sie sind die Hälften gleicher Rauten.

Zusatz. Umkehrungen. Gleiche Dreiecke mit gleicher Höhe haben gleiche Grundseiten. Gleiche Dreiecke mit gleicher Grundseite haben gleiche zugehörige Höhen. (Abweisend zu begründen.)

6. Ls. Der Ort der Spitzen aller auf derselben Grundseite stehenden **gleichen** Dreiecke ist eine der Grundseite gleichlaufende Gerade, deren Abstand die Höhe eines dieser Dreiecke ist.

Zusatz. Von gleichen Rauten über derselben Grundseite gilt ein entsprechender Satz.

7. Ls. **Zerlegt man eine Raute von einem Punkte ihrer Eckenlinie aus durch zwei den Seiten gleichlaufende Gerade in 4 Rauten, so werden die beiden gleich grofs, durch welche die Eckenlinie nicht geht.**



Figur 102.

Bh. Raute *A* = *B*.

Bw. Da die geteilten Rauten von der Eckenlinie halbiert werden, so können die gleichen Teile mit demselben Buchstaben bezeichnet werden. Zieht man sie von den Hälften der ganzen Raute ab*), so bleibt Gleiches: *A* = *B*.

Anmerk. *A* und *B* werden Ergänzungsrauten genannt. Die Figur enthält noch 2 Paare gleicher Rauten und 2 Paare gleicher Trapeze. Sie zeigt, dafs Figuren flächengleich sein können, ohne eine Seite gleich zu

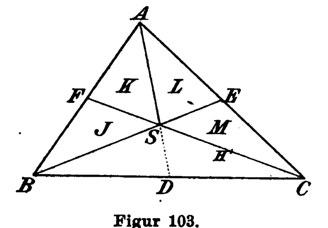
*) An der Wandtafel mit dem Schwamme auszuführen.

haben. Nur in den Winkeln stimmen die Rauten noch überein. Ersetzt man eine von zwei gleichen durch eine dritte nach Nr. 3, so hat man zwei Rauten, die bei ganz verschiedener Gestalt, doch gleich sind.

8. Ls. **In einem Trapeze sind die von den Nebenseiten und den Teilen der Eckenlinien begrenzten Dreiecke gleich.**

9. Ls. **Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.**

Bw. Die nach den Seitenmitten E und F gehenden Geraden BE und CF scheiden sich in S. Zieht man AS, so ist $\triangle\ J = K$ und $L = M$. (Nr. 5.) Denkt man F mit E verbunden, so ist $FE \parallel BC$ (**8**, 17, Zs.), und im Trapez $BFEC\ \triangle\ J = M$. (Nr. 8.) Also sind die 4 Dreiecke J, K, L, M gleich grofs und jedes der Dreiecke K, L, M ein Drittel des Dreiecks AFC. Die zwei Drittel $(L + M)$ werden durch die Gerade AH, welche die Spitze A dieses Dreiecks ASC mit dem Halbierungspunkte H der Grundseite SC verbindet, in 2 gleiche Dreiecke geteilt; folglich sind, als Drittel des Dreiecks $AFC\ \triangle\ AHC = AHS = K$. Da sie dieselbe Höhe haben, sind ihre Grundseiten gleich, $CH = HS = SF$ (Nr. 5, Zs.); jede dieser Strecken ist also $^1/_3\,CF$. Demnach schneidet die Mittellinie BE von CF ein Drittel, FS, ab. Von der Mittellinie AD, welche CF in S' schneiden möge, mufs dasselbe gelten; auch FS' wird $^1/_3\,CF$; S' ist derselbe Punkt S. Die drei Mittellinien schneiden sich also in einem Punkte.



Figur 103.

Anmerk. Der Schnittpunkt der drei Mittellinien heifst der Schwerpunkt des Dreiecks.*)

Zusatz. Der Schwerpunkt zerlegt jede Mittellinie in $^1/_3$ und $^2/_3$, und zwar ist der Teil an der Dreiecksseite ein Drittel, der an der Spitze zwei Drittel der Mittellinie.

Man präge sich fest ein:

Im Dreiecke schneiden sich 1) die 3 Höhen in einem Punkte, dem Höhenschnittpunkte, 2) die 3 Winkelhalbierenden im Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises, 3) die 3 Mittelsenkrechten im Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises und **4) die 3 Mittellinien im Schwerpunkte des Dreiecks.** [**12**, 15, 1); **12**, 3, Anm. und 2, Anm.; und **14**, 9.]

10. Übungen.

1) Zwei Dreiecke sind gleich, wenn zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern gleich sind und die Zwischenwinkel sich zu zwei Rechten ergänzen.

2) Beschreibt man über den drei Seiten eines Dreiecks Quadrate und verbindet die Endpunkte je zweier von einem Eckpunkte des Dreiecks ausgehenden Quadratseiten, so ist jedes der entstehenden Dreiecke dem ersten gleich.

---

*) Schneidet man aus einer überall gleich dünnen Platte ein Dreieck aus (z. B. aus steifem Papier) und unterstützt man diese dreieckige Platte genau in ihrem durch einen feinen Stich markierten Schwerpunkte S mittels einer Nadelspitze, so kippt das Dreieck nicht ab. Dies lehrt, dafs die Schwerkraft der Erde das ganze Gewicht der dreieckigen Platte in diesem einen Punkte vereinigt. Daher der Name Schwerpunkt.

3) Beschreibt man über den vier Seiten eines Vierecks Quadrate und verbindet die Endpunkte je zweier von einem Eckpunkte desselben ausgehenden Quadratseiten, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Dreiecken gleich der Summe der beiden andern.

4) Satz des Pappus.*) Errichtet man nach aufsen über jeder der Seiten AB und AC eines Dreiecks als Grundseite eine beliebige Raute, und verlängert die Gegenseiten von BA und CA bis zum Schnitt in D, zieht darauf DA und verlängert diese Linie über den Schnitt mit BC in E hinaus um $EF = DA$ und zeichnet eine Raute mit BC als Seite, deren Gegenseite durch F geht, so wird diese Raute gleich der Summe der beiden ersten. (Zum Beweise lege man durch B und C die mit DF gleichlaufenden Geraden.)

5) Ein Viereck ist gleich einem Dreieck, welches zwei Seiten gleich dessen Eckenlinien hat und als Zwischenwinkel einen der Schnittwinkel der Eckenlinien. (Man zeichne das Dreieck durch gehörige Verlängerung der Eckenlinien.) Daraus folgt: Vierecke sind gleich, wenn sie die Eckenlinien und deren Schnittwinkel entsprechend gleich haben. (Man denke sich die Eckenlinien wie zwei Streichhölzer, die man bedingungsgemäfs verlegen kann.)

Vom Schwerpunkt.

6) Im gleichseitigen Dreieck ist $\varrho = {}^1/_3 h$.

7) $\triangle$ aus a, m_b, m_c.

8) $\triangle$ aus m_a, m_b, α.

9) $\triangle$ aus a, c, m_b. (Zur Vorbereitung verdoppele man die Mittellinie über ihren Fufspunkt hinaus und verbinde den Endpunkt mit denen von a und c.)

10) $\triangle$ aus m_a, m_b, m_c. (Entsprechend zu verfahren.)

11) Von einem Winkel, zwischen dessen Schenkeln ein Punkt S gegeben ist, durch eine Gerade ein Dreieck abzuschneiden, so dafs S der Schwerpunkt desselben wird.

12) Zieht man von den Eckpunkten eines Dreiecks aus bis zu einer aufserhalb desselben liegenden geraden Linie die gleichlaufenden Geraden a, b, c, und auch vom Schwerpunkte des Dreiecks die Gleichlaufende s, so ist diese gleich der Gröfsenmitte von jenen, $s = \frac{a + b + c}{3}$.**) [Man ziehe auch von F und H (Fig. in Nr. 9) die Gleichlaufenden und berechne aus ihnen die Gröfse s.] Der Satz gilt auch, wenn die gerade Linie durch das Dreieck gelegt wird; nur nehmen dann die in entgegengesetzter Richtung laufenden das negative Vorzeichen an. [Man nehme eine aufserhalb des Dreiecks in gleicher Richtung und in angenommenem Abstande laufende gerade Linie zu Hilfe.] Was ergiebt der besondere Fall, wenn die gerade Linie durch den Schwerpunkt gelegt wird?

---

*) Pappus, mathematischer Schriftsteller, aus Alexandria, lebte gegen 400 nach Chr.

**) Will man, etwa zum Vergleich der Wohlhabenheit mit andern Städten von verschiedener Bürgerzahl, den durchschnittlichen Reichtum der Bürger eines Ortes bestimmen, so wird man das Vermögen von allen zusammenzählen und die Gesamtheit durch die Anzahl der Bürger teilen. Denn bei gleicher Verteilung des Geldes würde auf jeden soviel kommen. — Demnach giebt die Summe aller Gröfsen, dividiert durch ihre Anzahl, ihre Gröfsenmitte an. („Arithmetisches Mittel" ist Gröfsenmitte.)

15. Glied. Verwandlung und Teilung der Dreiecke und Vielecke.

1. Erklärung. Eine Figur verwandeln, heifst: eine ebenso grofse von anderer Gestalt zeichnen.

2. Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck mit Beibehaltung der Grundseite in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Ausführung. Man ziehe durch die Spitze die der Grundseite gleichlaufende Gerade, errichte auf der Grundseite die Mittelsenkrechte bis zu dieser und verbinde den Treffpunkt mit den Endpunkten der Grundseite.

3. Aufg. Eine Raute in eine andere zu verwandeln, welche an der Grundseite einen Winkel von gegebener Gröfse hat. (**6**, 5, 1.)

Dieselbe Aufgabe für ein Dreieck.

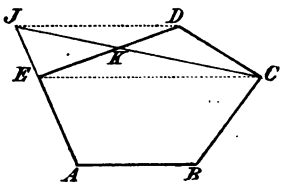
Zusatz. Hiernach kann jede Raute in ein Rechteck verwandelt werden.

4. Aufg. Ein gegebenes Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln. (**14**, 4, Zs.)

5. Aufg. Ein Vieleck in ein anderes zu verwandeln, dessen Eckenzahl um Eins kleiner ist.

Gegeben ist das Vieleck $ABCDE$.

Ausführung. Man schneide vom Vieleck durch eine Eckenlinie CE ein Dreieck ab, CDE, lege durch dessen Spitze D die mit der Eckenlinie CE gleichlaufende Gerade bis zum Schnitt mit der verlängerten anstofsenden Seite AE und ziehe in dem entstandenen Trapeze die andere Eckenlinie JC; dann ist $ABCJ = ABCDE$.



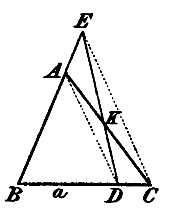
Figur 104.

Bw. Nach dem Lehrsatze **14**, 8 wird das vom Vieleck durch CJ abgeschnittene Dreieck CKD durch ein ebenso grofses, KEJ, ersetzt. Daher ist $ABCJ = ABCDE$ und hat eine Ecke weniger.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann man das aus dem n-Eck hervorgegangene $(n-1)$-Eck in ein $(n-2)$-Eck verwandeln, dies in ein $(n-3)$-Eck und so fort, bis aus dem gegebenen n-Eck ein Dreieck geworden ist. Dies läfst sich nach Nr. 4 zu einem Rechteck gestalten. Mithin kann man jedes Vieleck in ein Rechteck verwandeln.

6. Aufg. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundseite $= a$ gegeben ist.

Ausführung. Man trage die gegebene Strecke a auf der Grundseite BC des gegebenen Dreiecks ABC ab als BD. Dabei kann der Endpunkt D auf der Grundseite BC bleiben oder auf die Verlängerung hinübertreten. Den Endpunkt D verbindet man mit der Spitze A und zieht durch die Ecke C die der Verbindungslinie DA gleich-



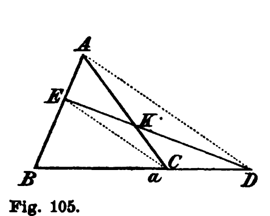


Fig. 105.

laufende Gerade, welche auf der Verlängerung der Seite BA, oder auf BA selbst, die Spitze E des verlangten Dreiecks BDE liefert. (Bw. wie zu Nr. 5.)

Zusatz. Ist für das neue Dreieck nicht die Grundseite, sondern die Höhe h gegeben, so braucht man dasselbe Verfahren nur einmal anzuwenden, wenn man zuerst die der Grundseite im Abstande h gleichlaufende Gerade bis zu einer Nebenseite zieht.

7. Sollen bei einer Verwandlungsaufgabe mehrere Forderungen erfüllt werden, so bringt man beim Umgestalten eine Bedingung nach der andern gehörig an. Zum Beispiel:

Ein Quadrat in ein rechtwinkliges Dreieck zu verwandeln, dessen gröfste Seite c gegeben ist.

Ausführung. Man verwandelt das Quadrat in ein Dreieck (**14**, 4, Zs.), dieses in ein Dreieck mit der Grundseite c (Nr. 6), letzteres endlich in ein an der Spitze rechtwinkliges durch den Halbkreis über c und den Ort in **14**, 6.

Abschlufs. Es mufs c mindestens gleich der doppelten Quadratseite gegeben werden.

8. Aufg. Eine Raute in eine andere mit gegebener Grundseite zu verwandeln.

Ausführung. Man verlängert die obere Seite der gegebenen Raute A (Figur in **14**, 7) um die für B gegebene Grundseite b und stellt die ganze Figur her, indem man zunächst die zukünftige Eckenlinie zieht.

9. Aufg. Ein gegebenes Dreieck in n gleiche Dreiecke zu teilen.

Ausführung. Man teilt die Grundseite in n gleiche Teile (**8**, 19, 5) und verbindet die Teilpunkte mit der Spitze.

Anmerk. Um eine Raute in n gleiche Rauten zu zerlegen, teilt man entweder die Grundseite in n gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte die Teilungslinien in Richtung der Nebenseiten, oder man teilt die Höhe in n gleiche Strecken und legt durch die Teilpunkte die mit der Grundseite gleichlaufenden Geraden.

10. Aufg. Ein gegebenes Dreieck von einem in einer Seite gegebenen Punkte aus zu halbieren.

Ausführung. Man verwandelt das gegebene Dreieck in eines, dessen Grundseite der gröfsere Abschnitt der durch den Punkt P geteilten Seite ist. Die von P ausgehende Mittellinie desselben ist die verlangte Halbierungslinie.

Anmerk. Hätte man dem Dreiek den kleineren Abschnitt von BC, PC, zur Grundseite gegeben, so würde die von P ausgehende Mittellinie ein Dreieck liefern, welches mit einem Zipfel aus dem gegebenen Dreieck hervorragt, und man müfste von dessen Spitze die der AP gleichlaufende Gerade bis AB ziehen und den Treffpunkt mit P verbinden. Diese Linie ist dann die verlangte.

11. Aufg. Ein Dreieck zu zeichnen, welches $n$mal so grofs ist, wie ein gegebenes Dreieck.

Ausführung. Man giebt ihm eine $n$mal so grofse Grundseite und gleiche Höhe.

Anmerk. Umständlicher ist der Beweis, wenn man die Höhe $n$mal so grofs macht und die Grundseite beibehält.

12. Übungen.

a) Verwandlung.

1) Ein regelmäfsiges n-Eck in ein Dreieck zu verwandeln.

2) Ein Trapez zu zeichnen, welches $n$mal so grofs ist, wie ein gegebenes Trapez. (Man ziehe eine Eckenlinie.)

3) Eine Raute wird durch jede Gerade halbiert, welche durch den Schnittpunkt der Eckenlinien geht.

4) Ein Trapez wird halbiert durch eine Gerade, welche mitten durch die Mittellinie geht und beide Hauptseiten schneidet. (Figur zu 8, 17.) Daraus folgt: Ist die Mittellinie eines Trapezes in n gleiche Teile zerlegt, und werden zwischen den Hauptseiten durch die Teilpunkte gerade Linien gezogen, welche sich nicht innerhalb der Figur schneiden, so teilen sie das Trapez in n gleiche Stücke.

5) Ein Dreieck mit Beibehaltung der Grundseite in ein anderes mit gegebener Nebenseite zu verwandeln. Wie grofs mufs die Nebenseite mindestens gegeben werden?

6) Über der halben Grundseite eines Dreiecks eine Raute zu errichten, welche mit dem Dreiecke gleichen Inhalt und Umfang hat.

Bezeichnung. Es bedeutet F die zu verwandelnde Flächengröfse, welche in Gestalt eines Dreiecks oder eines Quadrats gegeben ist.

7) Gleichschenkliges Dreieck aus F und a.

8) Gleichschenkliges Dreieck aus F und h.

9) Gleichschenkliges Dreieck aus F und b.

10) $\triangle$ aus F, β, h_a.

11) $\triangle$ aus F, a, h_b.

12) $\triangle$ aus F, a, r.

13) $\triangle$ aus F, a, α.

14) Raute aus F und den Eckenlinien e und e_1.

15) Raute aus F, a, $\angle\, ee_1$.

16) Raute aus F, a, b.

17) Ein Quadrat in ein Rechteck mit der Seite a zu verwandeln.

18) Ein Quadrat in ein Rechteck mit der Eckenlinie e zu verwandeln.

19) Eine Raute in ein gleichseitiges Viereck mit der Seite a zu verwandeln.

20) Eine Raute in ein gleichseitiges Viereck mit der Eckenlinie e zu verwandeln.

21) Ein Trapez in ein gerades von derselben Grundseite und Höhe zu verwandeln.

22) Ein Trapez in eine Raute zu verwandeln, welche die kleinere Hauptseite als Seite hat.

23) Um einen Kreis ein gleichseitiges Viereck zu beschreiben, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist.

---

b) Teilung.

24) Ein regelmäfsiges Sechseck von einer Ecke aus durch Strahlen in 6 gleiche Dreiecke zu teilen.

25) Ein Viereck von einer Ecke aus durch eine gerade Linie zu halbieren.

26) Ein Viereck von einem in einer Seite gegebenen Punkte aus durch eine gerade Linie zu halbieren.

27) Eine Raute von einem Eckpunkte aus durch gerade Linien in drei gleiche Teile zu zerlegen.

28) Ein Dreieck von einem in einer Seite gegebenen Punkte aus durch gerade Linien in drei gleiche Teile zu zerlegen.

29) Nachdem ein Dreieck von einer Ecke aus in Drittel zerlegt ist, innerhalb desselben einen Punkt zu finden, so dafs die von ihm nach den Ecken gehenden Geraden das Dreieck in drei gleiche Stücke teilen. (Ziehe schliefslich nach der geteilten Seite die Mittellinie zur Feststellung des gefundenen Punktes.)

30) Ein Dreieck von einem im Innern gegebenen Punkte aus in drei gleiche Teile zu zerlegen, so dafs eine Teilungslinie durch einen Eckpunkt geht.

---

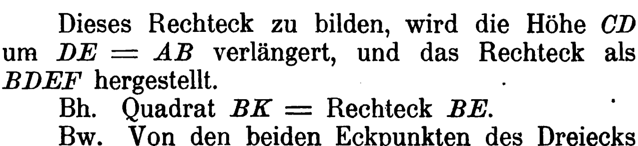
16. Glied. Satz des Pythagoras und die zugehörigen Sätze.

1. Erklärung. Der Höhenfufspunkt teilt die gröfste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks in zwei Abschnitte, welche Höhenabschnitte genannt werden.

2. Ls. **Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer kleinen Seite gleich dem Rechteck aus der gröfsten Seite und dem anliegenden Höhenabschnitt.**

Dieses Rechteck zu bilden, wird die Höhe CD um $DE = AB$ verlängert, und das Rechteck als $BDEF$ hergestellt.

Bh. Quadrat BK = Rechteck BE.



Figur 106.

Bw. Von den beiden Eckpunkten des Dreiecks ABC, welche nicht der Treffpunkt B der Vierecke sind, also von A und C, ziehe man Hilfslinien nach den ihnen fernsten Eckpunkten der Figur, AJ und CF. Dann stimmt

$$\triangle\ JBA \cong CBF \text{ (2. Satz).}$$

Es ist aber $\triangle\ JBA = {}^1/_2\, JBCK$ (**14**, 4)

und $\triangle\ CBF = {}^1/_2\, BFED$,

mithin ${}^1/_2\, JBCK = {}^1/_2\, BFED$, also sind auch die Ganzen gleich:

Quadrat BK = Rechteck BE.*)

Anmerk. Das Quadrat über $BC = a$ bezeichnet man mit a^2 und liest dieses Zeichen „a-Quadrat“. Da ein Rechteck durch zwei anstofsende Seiten bestimmt wird, so nimmt man zu seiner Bezeichnung deren Länge mit einem dazwischen gesetzten Punkt: $DE \cdot DB$, gelesen: „DE mal DB“. So kann die Behauptung auch geschrieben werden

$$a^2 = AB \cdot BD.$$

*) Beweis des Euklid. Euklides, geb. zu Alexandria um 300 vor Christus, studierte in Athen unter Plato, und lehrte dann in seiner Geburtsstadt Mathematik. Seine Werke über Raumlehre sind in griechischer Sprache geschrieben und noch nach mehr als 2000 Jahren die Grundlage des raumwissenschaftlichen Unterrichts gewesen.

3. Satz des Pythagoras.*) **Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den kleinen Seiten gleich dem Quadrate über der gröfsten Seite.****)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Bw. Verlängert man die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks bis zur Gegenseite des Quadrates über c, so ist nach Nr. 2

$$a^2 = \text{Rechteck } BE$$

und

$$b^2 = \text{Rechteck } AE$$

$$a^2 + b^2 = BE + AE = c^2.$$

Figur 107.

Zusatz. Hieraus folgt

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Das heifst in Worten?

4. Ls. **Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Höhenabschnitten der gröfsten Seite.**

Es werde der zu a gehörige Höhenabschnitt BD mit p bezeichnet, der andere mit q.

Bh. $h^2 = p \cdot q$.

Bw. Es ist im rechtwinkligen Dreieck BCD $h^2 = a^2 - p^2$, wofür zu nehmen ist Rechteck $BE - BL = LF$. Das Rechteck LF hat die Seiten p und q; denn

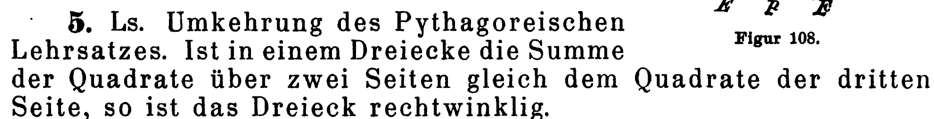
$$DE = AB = p + q$$

$$DL = p \text{ als Quadratseite}$$

folglich bleibt $LE = q$; dazu $EF = p$. Also ist

$$h^2 = p \cdot q.$$

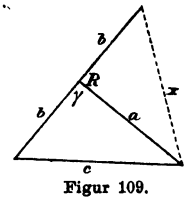
Figur 108.



5. Ls. Umkehrung des Pythagoreischen Lehrsatzes. Ist in einem Dreiecke die Summe der Quadrate über zwei Seiten gleich dem Quadrate der dritten Seite, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Vs. $a^2 + b^2 = c^2$.

Bh. $\angle \gamma = R$.



Figur 109.

Bw. Im Treffpunkte von a und b errichte man auf a eine Senkrechte $= b$ und verbinde deren Endpunkt mit dem andern Endpunkte von a durch eine Gerade, welche mit x bezeichnet werden möge. In diesem rechtwinkligen Dreiecke ist $x^2 = a^2 + b^2$ und dies soll nach Voraussetzung $= c^2$ sein; also ist $x^2 = c^2$. Das ist aber nur möglich, wenn $x = c$ ist. Wegen paarweiser Gleichheit der drei Seiten stimmen nun die beiden Dreiecke überein; folglich ist $\angle \gamma = R$.

6. Die Sätze in Nr. 4 und 2 können, da der Halbkreis über AB durch C geht, für den Kreis auch so ausgesprochen werden: (Vergl. die beiden folgenden Figuren.)

---

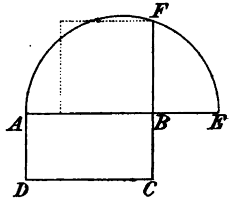
*) Pythagoras, von der Insel Samos bei Kleinasien, lebte im 6. Jahrhunderte vor Christus.

**) Man verweist auf diesen Satz durch die kurze Angabe: „nach Pythag.“

1) **Fällt man von einem Punkte eines Halbkreises die Senkrechte auf den Durchmesser, so ist das Quadrat über der Senkrechten gleich dem Rechteck aus den Abschnitten des Durchmessers.**

2) **Zieht man von einem Endpunkte einer Sehne den Durchmesser und vom andern die Senkrechte auf ihn, so ist das Quadrat über der Sehne gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser und dem anliegenden Abschnitt.**

7. Hauptaufgabe. **Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.**



Figur 110.

1. Ausführung. Man verlängere eine Seite AB des Rechtecks $ABCD$ um die nächste Seite BC bis E, beschreibe über AE den Halbkreis und verlängere CB bis zu ihm. Dann ist BF die Seite des verlangten Quadrates. (Nr. 6, 1.)

2. Ausführung. Man trage die zweite Seite BC auf der ersten ab, $BJ = BC$, beschreibe über der Seite AB den Halbkreis, errichte in J auf dem Durchmesser die Senkrechte und verbinde den Schnittpunkt K des Halbkreises mit demjenigen Endpunkte des Durchmessers, von welchem aus die zweite Seite abgetragen wurde, also K mit B. Dann ist BK die Seite des gesuchten Quadrats. (Nr. 6, 2.)

Figur 111.

Zusatz. Hiernach kann man jedes Vieleck in ein Quadrat verwandeln. (**15**, 5, Zs.)

8. Übungen.

1) Beschreibt man über der verdoppelten Seite eines Quadrates ein Quadrat, so wird es viermal so grofs, wie das erste. Das Quadrat über $3a$ enthält neun a^2. Ein Schachbrett hat 8 Reihen von je 8 Quadraten (mit der Seite a); sein Flächeninhalt ist also $64a^2$. Ein Quadratmeter hat 10000 Quadratcentimeter.

2) Das Quadrat über der Hälfte einer Strecke ist nur der vierte Teil des Quadrates über der ganzen Strecke. Das Quadrat über dem dritten Teile einer Quadratseite nimmt nur den neunten Teil des Quadrates ein.

3) Nimm eine kurze Strecke m (etwa 1 Centimeter lang) und zeichne die Strecken $a = 3m$, $b = 4m$, $c = 5m$. Das Dreieck, welches aus diesen Strecken als Seiten sich herstellen läfst, wird rechtwinklig. (Nr. 5.) [Anwendung, um auf dem Felde mittels eines langen Bindfadens einen rechten Winkel mit Stangen abzustecken.]

4) Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Summe zweier gegebenen Quadrate ist. (**16**, 3.) Beispiele: $x^2 = 5a^2$, $y^2 = 13b^2$.

5) Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich dem Unterschiede zweier gegebenen Quadrate ist. (**16**, 3, Zs.) In dem Falle $x^2 = 3a^2 = (2a)^2 - a^2$ ist a als halbe Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu nehmen. Ferner $y^2 = 7b^2$.

6) Aus den gegebenen $(n - 1)$ Strecken $a, b, c, d, \ldots$ ein n-Eck zu bilden, bei welchem das Quadrat über der letzten Seite gleich der Summe der Quadrate über allen andern Seiten ist. Also

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots = x^2.$$

(Z. B.: $n = 6$. Man setze jede folgende Seite gehörig an den Endpunkt der vorhergehenden an.) [Vergl. die Figur **1**, 5, 3).]

7) Das Quadrat über der halben Eckenlinie eines Quadrats ist halb so grofs wie das Quadrat.

8) Das Quadrat über der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist $^3/_4$ des Quadrates über der Seite.

9) Das Quadrat über der Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist dreimal so grofs, wie das Quadrat über dem Halbmesser des umbeschriebenen Kreises. $s^2 = 3r^2$. [Nach **14**, 9, Zs. ist $h = 3 \cdot (^1/_2 r)$.]

10) Entnimmt man demselben Kreise die Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen Dreiecks, Vierecks und Sechsecks und bildet aus diesen drei Seiten ein Dreieck, so wird dasselbe rechtwinklig. [9) und **16**, 5.]

11) Mittels des Satzes des Pappus den des Pythagoras zu beweisen. [**14**, 10, 4).]

12) Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von dem die Summe zweier anstofsenden Seiten $a + b = s$ gegeben ist.

13) Ein Fünfeck in ein Quadrat zu verwandeln.

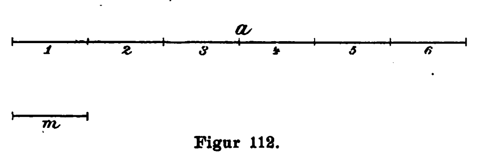
Zweite Abteilung.

Verhältnisgleichheit der ebenen Raumgröfsen.

I. Abschnitt. Verhältnisgleichheit begrenzter geraden Linien. Ähnlichkeit der Figuren.

17. Glied. Das Messen der Strecken.

1. Man mifst eine Strecke a mit einer Strecke m, indem man m auf a so oft abträgt, als es sich thun läfst. Die Anzahl der Abtragungen ist das Ergebnis der Messung. Trifft das letzte Abtragen den Endpunkt der Strecke a, so geht die Messung auf und liefert eine ganze Zahl. Es ist die hier gezeichnete Strecke $a = 6m$. Die Strecke m heifst das Mafs und die Zahl 6 die Mafszahl der Strecke a für das Mafs m.



Figur 112.

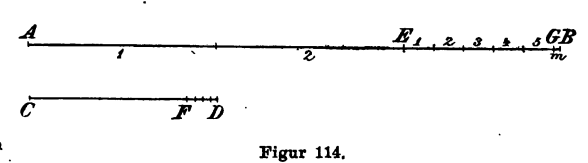
Geht die Messung nicht auf, so bleibt ein Rest, welcher kleiner als das Mafs ist. Zeigt sich der Rest teilbar durch einen einfachen Bruchteil von m, z. B. durch ein Fünftel desselben, so liefert die Messung eine gemischte Zahl. Es ist die Strecke $b = 4m + 3\frac{m}{5} = 4m + {}^3/_5 m = 4\,{}^3/_5 m$.

Figur 113.

In solchem Falle kann man für die Messung eine ganze Zahl sich verschaffen, wenn man diesen einfachen Bruchteil des Maſses als neues Maſs gebraucht. Die Strecke $\frac{1}{5}m = s$ liefert den Rest $= 3s$ und jede Abtragung $m = 5s$; es wird also $b = 20s + 3s = 23s$. Es giebt hierbei unzählig viele Maſse, für welche aus der Messung ganze Zahlen hervorgehen; denn jeder einfache Bruchteil von s, z. B. $\frac{1}{3}s = t$, muſs eine ganze Zahl ergeben: $b = 69t$, wozu $m = 15t$ gehört.*)

Jeder solcher Bruchteil t von s ist ein gemeinsames Maſs für die Strecken b und m; s selbst ist, als das Ganze, unter allen diesen das gröſste gemeinsame Maſs.

2. Um das gröſste gemeinsame Maſs zweier Strecken zu finden, trägt man die kleinere, CD, auf der gröſseren, AB, ab; es geht in dem hier gewählten Beispiele zweimal und es bleibt der Rest EB. Diesen schneidet man von der zweiten Strecke CD ab; mit dem dort erhaltenen Reste FD geht man auf den ersten Rest EB zurück und findet $EG = 5\,FD$ und den Rest GB; mit diesem miſst man den zweiten Rest FD, welcher die Zahl 4 ergiebt, und würde, wenn es noch nicht aufginge, so hin und her fortfahren, bis es zutrifft, oder man sich überzeugt, daſs es nie aufgeht. Der letzte Rest GB, welcher im vorletzten, FD, aufging, ist das gröſste gemeinsame Maſs m von AB und CD. Denn $FD = 4m$ giebt $EG = 5 \cdot 4m = 20m$ und $EB = 21m = CF$, also $CD = 21m + 4m = 25m$ und $AE = 2\,CD = 50m$, daher $AB = AE + EB = 50m + 21m = 71m$.



Figur 114.

Das Verfahren, das gröſste gemeinsame Maſs zweier Strecken zu finden, entspricht dem Aufsuchen des gröſsten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen, wobei auch immer mit dem Reste in den vorigen Teiler dividiert wird.

Durch das gefundene gemeinsame Maſs m kann man die Gröſse von jeder der beiden Strecken, im Vergleich mit der andern, angeben. Da m der 25ste Teil von CD war, ist $AB = 71 \cdot \frac{CD}{25} = \frac{71}{25}\,CD$; und, weil $m = \frac{AB}{71}$ ist, wird $CD = 25 \cdot \frac{AB}{71} = \frac{25}{71}\,AB$.

Das Gröſsenverhältnis der beiden Strecken wird also durch einen Bruch angegeben, welcher aus den erhaltenen Maſszahlen zu bilden ist. Der Bruch $\frac{71}{25}$ entstand aus $AB = 71m$ und $CD = 25m$; auf den umgekehrten Bruch, $\frac{25}{71}$, kommt man, wenn man die Ordnung der Strecken umkehrt. Zur Bezeichnung des Gröſsenverhältnisses setzt man den Bruchstrich auch zwischen die Namen der Strecken und versteht unter dem

*) Ein „aliquoter Teil“ ist ein Bruch mit dem Zähler 1, also ein einzelner (einfacher) Bruchteil des Ganzen.

Zeichen $\frac{AB}{CD}$ in diesem Beispiele den unbenannten Bruch $\frac{71}{25}$, und das Gröfsenverhältnis $\frac{CD}{AB}$ bedeutet den Bruch $\frac{25}{71}$.

Gröfsenverhältnisse sind unbenannte Bruchzahlen, mit denen man rechnen kann. Durch das Messen wird das Rechnen ein Hilfsmittel für die Untersuchungen in der Raumlehre.

Anmerk. Man kommt immer auf denselben Wert für das Gröfsenverhältnis zweier Strecken, wenn man auch ein anderes gemeinsames Mafs beider zu seiner Bestimmung verwandt hat. Wer mit dem $n$ten Teile von m, als dem Mafse s, die Messung ausführt, erhält in obigem Beispiele, da jeder Abschnitt m ihm n Strecken s liefert, $AB = 71ns$ und $CD = 25ns$. Da nun $25ns$ in $71ns$ $\frac{71}{25}$ mal enthalten sind, so hat man, wie vorher, das Gröfsenverhältnis $\frac{AB}{CD} = \frac{71}{25}$ als gekürzte Bruchzahl.

3. Es giebt aber unzählig viele Strecken, welche kein gemeinsames Mafs besitzen. Das einfachste Beispiel ist Eckenlinie und Seite eines Quadrats.

Es werde AC mit e und AB mit a bezeichnet; wir wollen das Gröfsenverhältnis $\frac{AC}{AB} = \frac{e}{a}$ zu bestimmen suchen. Wie in **17**, 2 tragen wir die kleinere Strecke AB auf der gröfseren AC von A bis D ab; es bleibt der erste Rest $DC = r_1$, welcher kleiner ist, als $CB = a$, wie das Dreieck CDB erkennen läfst, in welchem $\angle CDB$, als Aufsenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ADB, stumpf ist. Also wird

$$e = 1 \cdot a + r_1$$

oder zunächst $\frac{e}{a} = 1 + \frac{r_1}{a}$.

Figur 115.

Die Senkrechte DE auf AC giebt das Dreieck CDE, welches wegen Gleichheit der Grundwinkel gleichschenklig ist; auch wird $BE = DE$ durch Übereinstimmung der Dreiecke ABE und ADE, so dafs also der Rest $r_1 = DC = DE = BE$ ist, und wenn man noch eine dieser Strecken als EF abträgt, so bleibt bei der kürzeren Strecke $BC = a$ der zweite Rest $r_2 = FC$, welcher kleiner, als der erste ist, wie das stumpfwinklige Dreieck CFD zeigt; und man hat $BC = a = 2r_1 + r_2$ oder

$$\frac{a}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1}.$$

Dies liefert, da man den ersten Ausdruck $\frac{e}{a}$ auch schreiben kann $\frac{e}{a} = 1 + \frac{1}{a : r_1}$, durch Einsetzen

$$\frac{e}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_2}{r_1}}.$$

Durch die Senkrechte FG auf BC entsteht das gleichschenklige Dreieck CFG und es wird aus denselben Gründen r_2 oder $FC = FG = GD$, denen man noch GH gleich macht, und man behält HC als dritten Rest r_3 wieder auf der ersten Strecke. Damit ist $DC = r_1 = 2r_2 + r_3$, also $\frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2}$. Hierdurch folgt, wenn man den am Ende des Ausdrucks $\frac{e}{a}$ stehenden Bruch $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{r_1 : r_2}$ nimmt,

$$\frac{e}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_3}{r_2}}}.$$

Es zeigt $HJ = JF = JK$ mit dem Reste $KC = r_4$ auf der zweiten Strecke, dafs $FC = r_2 = 2r_3 + r_4$ oder $\frac{r_2}{r_3} = 2 + \frac{r_4}{r_3}$ ist, und läfst erkennen, dafs die Bildung des Bruches immer so weiter fortgeht, indem jedes folgende Glied des Kettenbruches eine 2 bekommt und dahinter ein aus immer kleineren Resten bestehender Bruch folgt:

$$\frac{e}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{und so weiter ohne Ende.}}}}}$$

Die kleinen rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke in der Ecke bei C lassen stets noch einen sehr kleinen Rest; die Messung geht also nie auf. Aber man kann die Angabe des Gröfsenverhältnisses $\frac{e}{a}$ so genau machen, wie man will. Wollte man die Kette schon hinter der zweiten 2 abbrechen, so wäre der Bruch $\frac{1}{2 + {}^1/_2}$ so viel als $\frac{1}{{}^5/_2} = \frac{2}{5}$ und man hätte für $\frac{e}{a}$ nur $1 + {}^2/_5 = 1{,}4$. Drei Glieder der Kette $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + {}^1/_2}}$ geben $\frac{1}{2 + {}^2/_5} = \frac{5}{12}$ und damit für $\frac{e}{a}$ $1 + {}^5/_{12}$ oder auf 4 Bruchstellen 1,4167. Vier Glieder der Kette hat man, wenn man den für drei Glieder gefundenen Wert ${}^5/_{12}$ hinter der ersten 2 denkt; also ist die Gröfse des viergliedrigen Bruches $\frac{1}{2 + {}^5/_{12}} = \frac{12}{29}$ und für $\frac{e}{a}$ die Angabe $1 + {}^{12}/_{29}$ oder 1,4138. Bei fünf Gliedern kommt

$\frac{1}{2 + {}^{12}/_{29}} = \frac{29}{70}$, das macht für $\frac{e}{a}$ 1,414 286, und so fort; immer setzt man den letzten Bruch hinter die erste 2.

Bezeichnet man das Verhältnis $\frac{e}{a}$ mit v und bringt die 1 auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, so sagt

$$v - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots \text{ ohne Ende},}}}}$$

dafs der endlose Kettenbruch, in welchem jedes Glied den Nenner 2 hat, gleich $v - 1$ ist. Nun steht hinter der ersten 2 dieser endlose Bruch; man kann also, wie oben immer zu machen war, seine Gröfse $(v - 1)$ hinter die erste 2 einsetzen, und hat damit die ganze Gröfse

$$v - 1 = \frac{1}{2 + (v - 1)} \text{ oder } v - 1 = \frac{1}{v + 1}.$$

Um aus dieser Gleichung die Unbekannte v zu berechnen, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $v + 1$, und erhält

$$v^2 - 1 = 1, \text{ also } v^2 = 2$$

woraus sich ergiebt

$$v = \sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373 \ldots..$$

Der letzte der vorher ermittelten Werte (aus 5 Gliedern des Kettenbruches) war schon auf 4 Bruchstellen zutreffend. Durch Ausziehen der Quadratwurzel aus 2 kann man also die Genauigkeit der Angabe treiben, so weit man will, und den immer noch vorhandenen Fehler beliebig klein machen. Demnach läfst sich sagen: Es ist die Eckenlinie des Quadrates mit der Seite a

$$e = 1 \cdot a + 4 \cdot \frac{a}{10} + 1 \cdot \frac{a}{100} + 4 \cdot \frac{a}{1000} + 2 \cdot \frac{a}{10\,000} + 1 \cdot \frac{a}{100\,000} + 3 \cdot \frac{a}{1000\,000} + \ldots..$$

und die letzte 3 der bei $\sqrt{2}$ angegebenen Bruchstellen bedeutet Billionstel von a, also eine weit über unsere Vorstellung hinausgehende Genauigkeit; aber vollkommen genau ist es doch nicht; denn die Strecken e und a haben kein gemeinsames Mafs.*)

4. Übungen.

1) Eine Strecke b sei auf einer Strecke a so oft als möglich, nämlich $n$mal, abgetragen, der Rest c auf b $p$mal, der hier bleibende Rest m auf c $q$mal und ohne Rest. Welcher Wert ergiebt sich hieraus für das Gröfsenverhältnis $\frac{a}{b}$?

---

*) Eine „irrationale“ Zahl ist eine nur annähernd bestimmbare Zahl; die genau angebbaren Zahlen heifsen „rationale“ Zahlen. Für Strecken, welche ein gemeinsames Mafs besitzen, hat man die Bezeichnung „kommensurabel“ eingeführt, und die, welche kein gemeinsames Mafs haben, „inkommensurabele“ Strecken genannt.

Antwort: $\frac{a}{b} = \frac{n\,(pq + 1) + q}{pq + 1}$. Dieser Bruch läfst sich darstellen als

$$\frac{a}{b} = n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}.$$

Die 3 Glieder dieses Kettenbruches (einschliefslich seine n Ganzen) zeigen, dafs 3 Abtragungen zu vollziehen waren.

2) Wenn das Gröfsenverhältnis zweier Strecken $\frac{a}{b} = \frac{157}{68}$ angenommen ist, wie oft mufs bei der Bestimmung ihres gemeinsamen Mafses m eine kleinere Strecke auf der gröfseren abgetragen werden, und welche Länge bekommen die als Reste übrig bleibenden Strecken?

Ergebnis. Es sind 4 Abtragungen auszuführen. Es werden die Reste $d = 5m$ und $c = 21m$.

---

18. Glied. Verhältnisgleichheit der Strecken.

1. Erklärungen. Zwei gleiche Gröfsenverhältnisse geben eine Verhältnisgleichung.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder, mit dem Doppelpunkt als Teilungszeichen geschrieben, $a : b = c : d$ wird gelesen: a verhält sich zu b, wie c zu d.

1) Die vierte Gröfse d der Verhältnisgleichung, das Glied zu c für das Verhältnis $\frac{a}{b}$, heifst das Verhältnisglied zu $\frac{a}{b}$ und c, oder wie man gewöhnlich sagt: das Verhältnisglied zu a, b und c.

Zu jedem Werte von c kann man die ihm erforderliche Gröfse x finden, welche $\frac{c}{x}$ dem gegebenen Verhältnis $\frac{a}{b}$ gleich macht. Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ folgt durch Multiplizieren mit b und x $ax = bc$ und daraus mittels Dividieren durch a

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Der Ausdruck für das gesuchte Verhältnisglied ist also ein Bruch, dessen Zähler ein Produkt ist.

Der Wert $z = \frac{np}{q}$ kommt aus zwei Verhältnisgleichungen

aus $q : n = p : z$
und auch aus $q : p = n : z$.

Bei der Angabe ist auf die Ordnung zu achten; sie mufs hiernach lauten: z ist das Verhältnisglied zu q, n und p oder zu q, p und n. Die erste Gröfse q ist der Nenner des gegebenen Bruches $\frac{np}{q}$. Man mufs mit dem **Nenner** anfangen!

2) Eine besondere Verhältnisgleichung ist die, in welcher die beiden mittleren Glieder gleich sind. Eine solche heifst eine stetige Verhältnisgleichung. Man findet das Mittelglied zwischen a und b aus

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{durch } ab = x^2 \qquad x = \sqrt{ab}.$$

Demnach bedeutet die Wurzel aus dem Produkt zweier Gröfsen das Mittelglied zwischen ihnen in einer stetigen Verhältnisgleichung.*)

Anmerkung. Bei den in 1) und 2) erhaltenen Formel-Ausdrücken treten Produkte von Gröfsen auf, die in den nächstfolgenden Untersuchungen als benannte Zahlen erscheinen. In der Bezeichnung einer Strecke mit „a" soll aber von nun an a weder den Namen derselben, wie BC, bedeuten, noch die benannte Zahl, welche bei ihrer Messung mit dem Mafse m sich ergeben hat, sondern nur die Anzahl selbst; so dafs, wenn die Strecke $= am$ (a Meter) gefunden wurde, „a" nur als a zu denken ist. Bei vollständiger Schreibweise, βm statt b, γm statt c, δm statt x, wäre die Ansatzgleichung in lauter unbenannten Zahlen gewesen in 1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, also $x = \delta m = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \cdot m$

und bei der in 2) $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\delta}{\beta}$, daher $x = \delta m = \sqrt{\alpha\beta} \cdot m$;

woraus ersichtlich ist, dafs die Formeln die Länge der Strecke x als ein Vielfaches des Mafses m angeben, und bei der Rechnung nicht der Widersinn vorkommt, dafs zwei benannte Zahlen mit einander multipliziert werden sollen.

2. Hilfssatz. **Sind zwei Brüche einander gleich, so ist der Bruch aus dem Unterschiede der Zähler und dem der Nenner gleich jedem der beiden Brüche.**

Vs. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Bh. $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Bw. Beseitigt man aus der Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ die Nenner durch Multiplizieren mit bd, so hat man $ad = bc$ und wenn man diese Gleichung von $ab = ab$ abzieht, $ab - ad = ab - bc$ oder $a(b-d) = b(a-c)$. Hieraus folgt die Behauptung, wenn man durch die dort stehenden Nenner $(b-d)$ und b dividiert,
$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}.$$

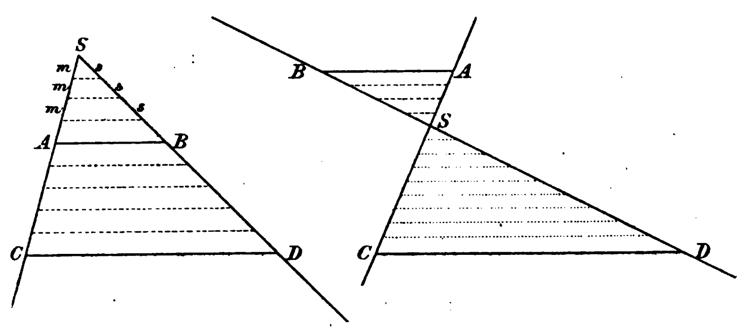
Beispiel. Aus $\frac{9}{18} = \frac{7}{14}$ folgt $\frac{2}{4} = \frac{9}{18} = \frac{7}{14}$; jeder dieser Brüche ist $= 1/2$.

Zusatz. Auch der Bruch aus der Summe der Zähler und der der Nenner ist gleich jedem der beiden Brüche.

3. Der „Verhältnis-Satz". **Werden die Schenkel eines Winkels, oder die von Scheitelwinkeln, von zwei gleichlaufenden Geraden geschnitten, so verhalten sich je zwei Abschnitte des einen Schenkels wie die gleichliegenden**

*) Eine „Proportion" ist eine Verhältnisgleichung. Gröfsen, welche in gleichen Verhältnissen stehen, sind „proportional". Die „vierte Proportionale" ist das Verhältnisglied zu a, b und c, und die „mittlere Proportionale" das Mittelglied zwischen a und b.

Abschnitte des andern, und die Gleichlaufenden wie die vom Scheitel bis zu ihnen reichenden Abschnitte eines Schenkels.



Figur 116.

Vs. $AB \parallel CD$.

Bh. 1) $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$, 2) $\frac{AC}{SA} = \frac{BD}{SB}$, 3) $\frac{AC}{SC} = \frac{BD}{SD}$, 4) $\frac{AB}{CD} = \frac{SA}{SC}$.

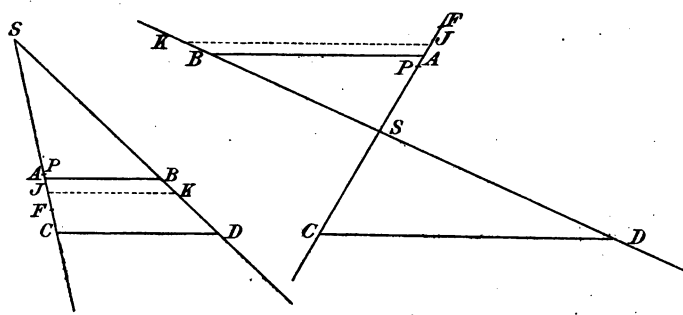
Bw. Die auf derselben Geraden liegenden Strecken SA und SC haben entweder ein gemeinsames Maſs, oder nicht.

Im ersten Falle messe man sie mit dem gemeinsamen Maſse m. Es wird $SA = p \cdot m$ (in der Figur $4m$) und $SC = q \cdot m$ $(9m)$. Folglich ist ihr Gröſsenverhältnis

$$\frac{SA}{SC} = \frac{p}{q}.$$

Nun ziehe man durch sämtliche Teilpunkte in Richtung der Gleichlaufenden gerade Linien bis zum andern Schenkel, so entstehen auch hier gleiche Strecken. (8, 19, 5.) Eine dieser gleichen Strecken s nehme man zum Maſse für die Abschnitte des zweiten Schenkels. Es wird $SB = p \cdot s$ und $SD = q \cdot s$, mit denselben Zahlen p und q, weil jeder Teilstrecke drüben hier eine entspricht. Daher ist auch ihr Gröſsenverhältnis

$$\frac{SB}{SD} = \frac{p}{q}, \quad \text{also} \quad \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}.$$



Figur 117.

Zweiter Fall. Haben SA und SC kein gemeinsames Maſs (in der neuen Figur ist aus einem Quadrate die Seite als SA und die Eckenlinie als SC genommen), so muſs dennoch $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$ sein.

Wären die Brüche nicht gleich, so könnte $\frac{SA}{SC} < \frac{SB}{SD}$ sein. Den zu kleinen Bruch $\frac{SA}{SC}$ könnte man um so viel vergröfsert denken (durch Vergröfserung des Zählers um AF), dafs er dem andern gleich wird, so dafs also

$$5)\ \frac{SF}{SC} = \frac{SB}{SD}.$$

Nun könnte man die Strecke SC mit einem Mafse messen, welches in SC aufgeht. Das leistet jeder einfache Bruchteil von SC. Deshalb darf noch die Bedingung gestellt werden, dafs das gewählte Mafs kleiner ist, als die Zugabe AF. (Mufste AF nur sehr klein genommen werden, z. B. nur ein Millionstel von SC, so kann man sich den zehnmillionsten Teil von SC als Mafs denken.) Bei Ausführung der von S beginnenden Messung kann kein Teilpunkt in A fallen, weil sonst SA und SC doch ein gemeinsames Mafs hätten. Ein Teilpunkt P wäre der letzte vor A. Der nächste kann nicht in F, oder jenseit F, treffen, weil sonst das Mafs gröfser als AF wäre; also mufs der nächste zwischen A und F treten. Schliefslich kommt die Messung in C an. Durch den Teilpunkt J, welcher zwischen A und F treten mufste (oder durch einen von den zwischen A und F erhaltenen Teilpunkten), ziehe man in Richtung der Gleichlaufenden die Gerade JK bis nach dem andern Schenkel. Sie schneidet den ersten Schenkel in J so, dafs SJ und SC ein gemeinsames Mafs (das gebrauchte) besitzen und für solchen Fall ist der Satz vorhin schon bewiesen. Es verhält sich also

$$6)\ \frac{SJ}{SC} = \frac{SK}{SD}.$$

Die in den Gleichungen 5) und 6) übereinstimmenden Nenner fallen fort, wenn man 5) durch 6) dividiert; dadurch käme

$$\frac{SF}{SJ} = \frac{SB}{SK}.$$

Das ist aber ein Widerspruch; denn $\frac{SF}{SJ}$ ist ein unechter Bruch, also > 1, und $\frac{SB}{SK}$ ein echter Bruch, also < 1. Sie können nicht gleich sein. Daher war die Annahme, $\frac{SA}{SC}$ wäre kleiner, als $\frac{SB}{SD}$, unrichtig.

Es kann aber auch nicht $\frac{SA}{SC} > \frac{SB}{SD}$ sein. Denn dann würde man den ersten Bruch durch Verkleinerung des Zählers um so viel vermindert denken, dafs er dem zweiten gleich würde; hierauf ebenso verfahren und käme dann auf dieselbe Ungereimtheit, dafs ein echter Bruch einem unechten gleich sein müfste. Daher sind die Gröfsenverhältnisse auch einander gleich, wenn die Strecken kein gemeinsames Mafs haben. (In der Figur 117 müssen also SB und SD gleich der Seite und Eckenlinie eines andern Quadrates geworden sein.)

Beweis zu 2). Wie eben bewiesen, verhält sich stets $\frac{SB}{SD} = \frac{SA}{SC}$. Multipliziert man diese Gleichung mit der vierten Gröfse, SC, und dividiert

sie durch die erste, SB, so erhält man

$$\frac{SC}{SD} = \frac{SA}{SB}.$$

(Durch diese Umformung hat man von den Verhältnisgliedern das erste und vierte vertauscht. Auf dieselbe Weise könnte man auch die beiden mittleren die Plätze wechseln lassen. Solche Umstellung kann also künftig ohne Rechnungsangabe vollzogen werden.) Hieraus liefert für die erste Figur in beiden behandelten Fällen der Hilfssatz **18**, 2, und für die daneben stehende Figur der Zusatz dazu

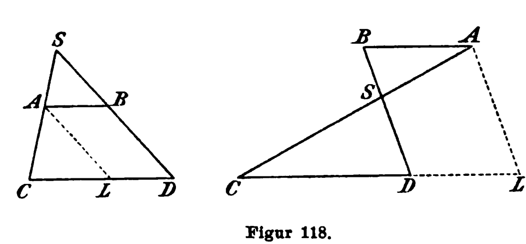
$$\frac{SC \mp SA}{SD \mp SB} = \frac{SA}{SB}, \text{ das ist } \frac{AC}{BD} = \frac{SA}{SB}$$

und wenn man nun das zweite und dritte Glied vertauscht, hat man

$$\frac{AC}{SA} = \frac{BD}{SB}.$$

Die Behauptung 3) ergiebt sich, wenn man 1) mit 2) multipliziert.

Beweis zu 4). Man ziehe durch A die mit dem zweiten Schenkel SD gleichgerichtete Gerade AL bis CD. Dann verhält sich nach 3) und 2) die zwischen den Gleichlaufenden liegende Strecke zu einem Abschnitt auf dem einen Schenkel, wie die entsprechenden auf dem andern:



Figur 118.

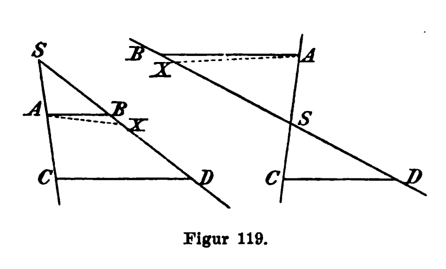
$\frac{DL}{CD} = \frac{SA}{SC}$. Setzt man AB für DL ein, so hat man die Behauptung.

4. Umkehrung. **Werden die Schenkel eines Winkels, oder die von Scheitelwinkeln, von zwei Geraden so geschnitten, dafs zwei Abschnitte des einen Schenkels sich verhalten, wie die gleichliegenden Abschnitte des andern, so sind die schneidenden Linien gleichlaufend.**

Vs. Entweder 1) $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$ oder 2) $\frac{AC}{SA} = \frac{BD}{SB}$, oder 3) $\frac{AC}{SC} = \frac{BD}{SD}$.

Bh. $AB \parallel CD$.

Bw. Wäre AB nicht gleichlaufend mit CD, so könnte man durch A die mit CD gleichlaufende Gerade ziehen, welche den Schenkel SD in X schneiden möge.



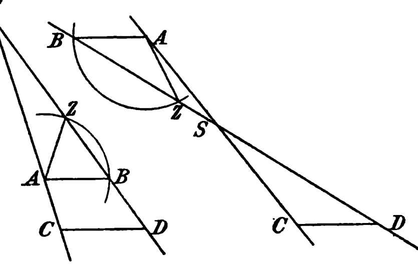
Figur 119.

Dann hätte man nach **18**, 3 $\frac{SA}{SC} = \frac{SX}{SD}$; dies würde mit Vs. 1) geben $\frac{SX}{SD} = \frac{SB}{SD}$, also $SX = SB$, was nicht möglich ist.

Ist die Voraussetzung in der zweiten Weise gegeben, so käme ebenso $\frac{XD}{SX} = \frac{BD}{SB}$ und wenn man hierin die zweite und dritte Gröfse vertauscht.

$\frac{XD}{BD} = \frac{SX}{SB}$ und hierauf für die erste Figur **18**, 2, Zs., und für die zweite **18**, 2 anwendet, so zeigte $\frac{SD}{SD} = \frac{SX}{SB}$, dadurch dafs der erste Bruch $= 1$ ist, denselben Widerspruch. — Man könnte auch durch die eben angegebenen Umformungen aus Vs. 2) die Vs. 1) herleiten, für welche schon $AB \parallel CD$ bewiesen ist.

Jede dieser beiden Weisen läfst sich auch bei Vs. 3) durchführen.



Figur 120.

Anmerk. Der vierte Teil der Behauptung in **18**, 3 darf nicht zu einer Umkehrung des Satzes benutzt werden. Denn beschreibt man um A mit AB (oder um C mit CD) den Kreisbogen und zieht nach dem andern Schnittpunkte mit SD den Halbmesser AZ, so würde auch $\frac{AZ}{CD} = \frac{SA}{SC}$ richtig sein, und gewifs nicht $AZ \parallel CD$. Weil also die Umkehrung zu einem falschen Schlusse führen kann, darf der umgekehrte Satz nicht aufgestellt werden.

5. Hauptaufgabe. **Das Verhältnisglied zu den Strecken a, b und c zu zeichnen,** welches die Rechnung ergiebt als

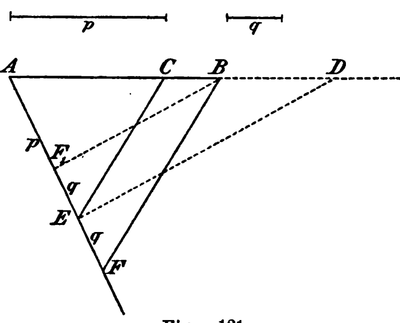
$$x = \frac{bc}{a}.$$

Ausführung. Man trägt vom Scheitel eines Winkels aus*), oder bei Scheitelwinkeln, auf dem ersten Schenkel a und b, auf dem zweiten c ab, verbindet die Endpunkte von a und c und zieht zu dieser Verbindungslinie durch den Endpunkt von b die gleichlaufende Gerade. Sie schneidet auf dem zweiten Schenkel das zu c gehörige Verhältnisglied x ab, so dafs sich verhält

$$a : b = c : x.$$

Auch die drei andern Gleichungen des Verhältnis-Satzes (**18**, 3) sind zur Herstellung zu benutzen, so dafs im Ganzen acht Herstellungsweisen sich bieten. [Vergl. **18**, 10, 4).]

6. Aufgabe. **Auf einer Strecke und auf ihrer Verlängerung die Punkte zu finden, deren Abstände von den Endpunkten der Strecke sich wie $p : q$ verhalten.**



Figur 121.

Gegeben ist die Strecke AB und zur Darstellung des Gröfsenverhältnisses die Strecken p und q, und zwar $p > q$. Ist das Verhältnis in Zahlen gegeben, z. B. 5 : 2, so trage man ein beliebiges Mafs m auf einer Geraden 5mal und

*) Wegen der Genauigkeit des Zeichnens nehme man den Winkel nicht viel verschieden von einem Rechten.

auf einer andern 2mal hinter einander ab und nehme diese Strecken als p und q.

Ausführung. Auf einer unter beliebigem Winkel vom Anfangspunkte A aus gezogenen Geraden AF trage man die gröfsere Strecke p bis E ab, dann von E q 1) vorwärts bis F, verbinde F mit dem Endpunkte B und ziehe durch E die der FB gleichgerichtete Gerade. Sie trifft die Strecke AB im verlangten Punkte C. Dann schneide man von E aus die Strecke q 2) rückwärts ab, bis F_1, verbinde auch F_1 mit B; jetzt giebt die von E her mit dieser Verbindungslinie gleichlaufende Gerade ED den auf der Verlängerung von AB gesuchten Punkt.

Bw. unmittelbar durch den „Verhältnissatz". (18, 3.)

Anmerkung 1. C ist der innere, D der äufsere Punkt, welche zu den Endpunkten A und B der Strecke solche Stellung haben, dafs sich verhält

$$CA : CB = DA : DB.$$

Die für C zutreffende Bezeichnung Teilpunkt der Strecke AB hat man auch auf den äufseren Punkt D mit seinen Abständen DA und DB übertragen.

Aus der Verhältnisgleichung folgt durch Vertauschen der äufseren Glieder (und Umstellen der Buchstaben)

$$BD : BC = AD : AC$$

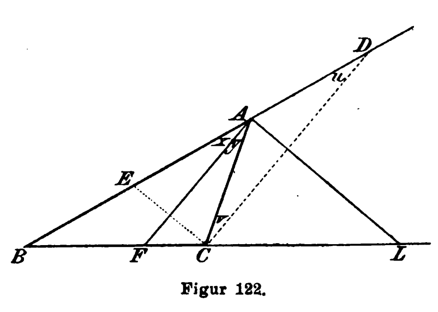
dafs also auch die Strecke DC von B und A innen und aufsen verhältnisgleich geteilt wird.

Demnach gehören die vier Punkte der verhältnisgleichen Teilung so zusammen, dafs A und B, sowie C und D, zugeordnete Punkte sind. [Vergl. 18, 10, 9).]*)

Anmerkung 2. Zum Beweise gehörte aber noch die Begründung der Behauptung:

Es giebt nur je einen Punkt, welcher eine Strecke innen und aufsen nach einem gegebenen Verhältnis teilt.

Denn legt man AEF in anderer Richtung hin, jetzt als $AE'F'$, verbindet nun F' mit B und zieht von E' aus die der $F'B$ gleichgerichtete Gerade, so könnte diese die Strecke AB in einem andern Punkte, als C, etwa in X treffen. Dann hätte man nach dem Verhältnissatze $\frac{XA}{XB} = \frac{p}{q} = \frac{CA}{CB}$, also wäre $\frac{XA}{CA} = \frac{XB}{CB}$, woraus durch 18, 2, Zs. hervorginge, dafs X nicht von C verschieden sein kann. Also ist C der einzige Punkt, welcher die Strecke AB innen nach dem Verhältnis $p : q$ teilt. Dasselbe gilt vom äufseren Teilpunkte D.



Figur 122.

7. Ls. **Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.**

Vs. $\angle x = y$.

Bh. $FB : FC = AB : AC$.

Bw. Man ziehe durch C die der Winkelhalbierenden FA gleichlaufende

*) Die verhältnisgleiche Teilung hat man „harmonische" Teilung genannt.

Gerade CD bis zum Schnitt mit der verlängerten Seite BA. Dadurch entsteht das gleichschenklige Dreieck CAD. Der Verhältnissatz giebt die Richtigkeit der Behauptung.

Zusatz. Von der Halbierungslinie des Aufsenwinkels gilt derselbe Satz für die Abstände

$$LB : LC = AB : AC;$$

so dafs die Treffpunkte F und L die Seite BC innen und aufsen nach demselben Verhältnis teilen. [Man sieht in dieser Figur das Entsprechende mit der in **18**, 6. Die Seite BA ist p, AD und AE sind q, und diese sind $=$ Seite AC.]

8. Umkehrung. **Verbindet man den Punkt, welcher eine Dreiecksseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, mit der Spitze des Gegenwinkels, so wird derselbe durch die Verbindungslinie halbiert.**

Bw. Der Verhältnissatz, in Verbindung mit der Voraussetzung, giebt $AD = AC$, woraus $\angle\, x = y$ hervorgeht. Ebenso beim äufseren Teilpunkt L. — Auch abweisend ist die Richtigkeit des Satzes leicht zu zeigen mittels **18**, 2, Zs.

9. Satz des Apollonius.*) **Der Ort aller Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten verhältnisgleich sind, ist ein Kreis. Sein Durchmesser ist der Abstand der Punkte, welche die von den gegebenen Punkten begrenzte Strecke nach demselben Verhältnis innen und aufsen teilen.**

Bw. durch **3**, 10, 6 und **11**, 7, 6.

10. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) Die Eckenlinien eines Trapezes schneiden sich im Verhältnis der anliegenden Hauptseiten. [Vergl. **8**, 15.]

2) Mittels des Verhältnissatzes (**18**, 3) zu zeigen, dafs die Mittellinien eines Dreiecks sich im Verhältnis 1 : 2 schneiden. (**14**, 9, Zs.)

3) Schneidet eine von der Ecke einer Raute ausgehende Gerade von der Gegenseite den $n$ten Teil ab, so schneidet sie von der Eckenlinie deren $(n + 1)$ten Teil ab.

---

4) Zwei gleichlaufende Gerade werden von einem Strahlenbüschel (d. h. von Geraden, welche von einem Punkte ausgehen) so geschnitten, dafs die gleichliegenden Strecken verhältnisgleich sind. [Der Strahlenpunkt kann aufserhalb oder zwischen den Gleichlaufenden stehen.] Wie ist nach diesem Satze das Verhältnisglied zu den Strecken a, b und c zu finden? [**18**. 5 lieferte durch den Verhältnissatz schon acht Herstellungsweisen; dieser Satz noch zwei.]

5) (1. Umkehrung.) Werden die von den Schenkeln eines Winkels (oder von Scheitelwinkeln) begrenzten Strecken zweier gleichlaufenden Geraden in derselben Richtung (bezüglich: in der entgegengesetzten) nach gleichem Verhältnis geteilt, so liegen die Teilpunkte mit dem Scheitel des Winkels in gerader Linie. — Wie kann man zwischen zwei Geraden, deren Schnittpunkt nicht mehr auf dem Zeichenblatte liegt, eine Gerade ziehen, dafs sie verlängert den Schnittpunkt

---

*) Apollonius von Perga, in Kleinasien, lebte um 200 vor Christus.

treffen würde? Und wie kann man die Halbierungslinie des von den Geraden gebildeten Winkels erhalten? [Lege zu letzterem Zwecke eine Gerade, die mit der einen gleichgerichtet ist, und benutze ein gleichschenkliges Dreieck.]

6) (2. Umkehrung.) Zerlegen drei von einem Punkte ausgehende Gerade zwei gerade Linien in Strecken, welche in gleichem Verhältnis stehen, so sind die beiden Linien gleichlaufend.

7) Zwei gerade Linien werden von drei oder mehr gleichlaufenden Geraden so geschnitten, dafs die gleichliegenden Strecken in gleichem Verhältnis stehen. (Man ziehe eine Eckenlinie.)

---

8) Werden zwei auf derselben Grundseite stehende gleich hohe Dreiecke von einer der Grundseite gleichgerichteten Geraden geschnitten, so sind deren in den Dreiecken liegende Strecken gleich.

9) Die Gerade, vom Schnittpunkte der Nebenseiten eines Trapezes durch den Schnitt der Eckenlinien, halbiert die Hauptseiten, und ihre zwischen den Hauptseiten liegende Strecke wird durch die Schnittpunkte verhältnisgleich geteilt. — Wie kann man demnach eine Strecke (anders als **18,** 6) nach dem Verhältnis $p : q$ innen und aufsen teilen?

---

10) Zieht man in einem Kreise, welchen ein kleinerer von innen berührt, eine diesen berührende Sehne, so verhalten sich deren Abschnitte wie die vom Berührungspunkte der Kreise nach ihren Endpunkten gehenden Sehnen.

11) Die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck wird vom Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises so geteilt, dafs der Abschnitt an der Spitze zu dem an der Gegenseite sich verhält, wie die Summe der einschliefsenden Seiten zur Gegenseite; und die Halbierungslinie des Aufsenwinkels vom Mittelpunkte des anbeschriebenen Kreises so, wie der Unterschied derselben Seiten zur Gegenseite. (Siehe die Figur in **18,** 7.) [Was lehrt die Anwendung auf das gleichseitige Dreieck? (Man denke dazu noch ein Dreieck, welches fast genau gleichseitig ist. — „Unendlich grofs“ und „verschwindend klein“.)]

b) Aufgaben.

12) Zwei Strecken zu finden, deren Summe und Verhältnis gegeben ist; sowie zwei, deren Unterschied und Verhältnis gegeben ist.

13) Durch den Berührungspunkt zweier sich von aufsen berührenden Kreise eine Gerade so zu ziehen, dafs das durch beide Kreise abgegrenzte Stück derselben gleich einer gegebenen Strecke a wird. Wie ändert sich die Behandlung, wenn die Kreise sich von innen berühren? [Die Aufgabe kann auch mit einem Satze in **11** gelöst werden.]

14) Durch einen Schnittpunkt zweier Kreise eine Gerade so zu legen, dafs die entstehenden Sehnen sich wie $p : q$ verhalten. (2 Fälle.)

15) Um einen gegebenen Kreis ein gerades Trapez zu beschreiben, dessen Hauptseiten sich wie $p : q$ verhalten.

16) Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt P eine Gerade so zu ziehen, dafs ihr von den Schenkeln begrenzter Abschnitt in P halbiert werde. (Lege durch P die mit einem Schenkel gleichlaufende Gerade.) [Die Forderung könnte auch mit **8,** 11 erfüllt werden.]

17) Es ist ein Winkel und ein Punkt gegeben. Man soll durch den Punkt eine Gerade so legen, dafs ihre von ihm und den Schenkeln des Winkels begrenzten

Abschnitte sich wie $p : q$ verhalten. (Für die Lage des Punktes sind zwei Fälle zu unterscheiden.)

18) Es ist $\angle A$ und ein Punkt P gegeben. Durch P eine die Schenkel in X und Y schneidende Gerade zu legen, dafs $AX : AY = p : q$ wird.

19) Von einem auf einem Kreise gegebenen Punkte aus eine Sehne so zu ziehen, dafs sie von einer gegebenen Sehne im Verhältnis $p : q$ geteilt wird.

---

20) Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade so zu legen, dafs die von zwei andern gegebenen Punkten, A und B, auf sie gefällten Senkrechten im Verhältnis $p : q$ (3 : 1) stehen. (Ziehe die durch A und B gehende Gerade.) [2 Lösungen.]

21) Eine Gerade so zu ziehen, dafs die von drei gegebenen Punkten, A, B und C, auf sie gefällten Senkrechten im Verhältnis 4 : 2 : 1 stehen. (4 Lösungen.)

---

22) Zwischen zwei gleichlaufende Berührungslinien eines Kreises eine Berührende so zu ziehen, dafs sie durch den Berührungspunkt im Verhältnis $p : q$ geteilt wird.

23) In einem Kreise eine Sehne so zu ziehen, dafs sie von zwei gegebenen Halbmessern in drei gleiche Teile zerlegt wird.

24) Von gegebenem Punkte aus durch drei von einem Punkte herkommende gerade Linien eine Gerade so zu legen, dafs ihre Abschnitte zwischen den Linien sich wie $p : q$ verhalten.

---

25) Den Ort aller Punkte zu bestimmen, deren Entfernungen von den Schenkeln eines gegebenen Winkels im Verhältnis $p : q$ stehen. (Zwei Gerade.)

26) Die vier Punkte zu finden, deren Abstände von den Seiten eines gegebenen Dreiecks sich verhalten, wie 1 : 2 : 3 (das heifst: dafs der Abstand von b doppelt, der von c dreimal so grofs ist, wie der von a.) [Man nehme das Dreieck bei A stumpfwinklig, die Grundseite BC etwa 5 Centimeter lang und zeichne sie mitten in eine Zeile eines Viertelbogens. Die mit den Seiten gleichlaufenden Geraden, welche zur Bestimmung des Ortes aller Punkte, mit verhältnisgleichen Abständen von den Schenkeln des Winkels, führen, sind genau gleichgerichtet zu ziehen. Die Güte der Figur ist daran zu prüfen, dafs auch die dritte Ecke mit 2 Paaren der 4 Punkte in eine gerade Linie kommen mufs.]

---

27) Auf einem Kreise sind die Punkte B und C gegeben. Auf ihm einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von C und B sich wie $p : q$ verhalten; oder, anders ausgedrückt: $\triangle$ aus a, r und $b : c$. [**18**, 7.] (2 Lösungen.)

28) $\triangle$ aus a, $b : c$, h_a.

---

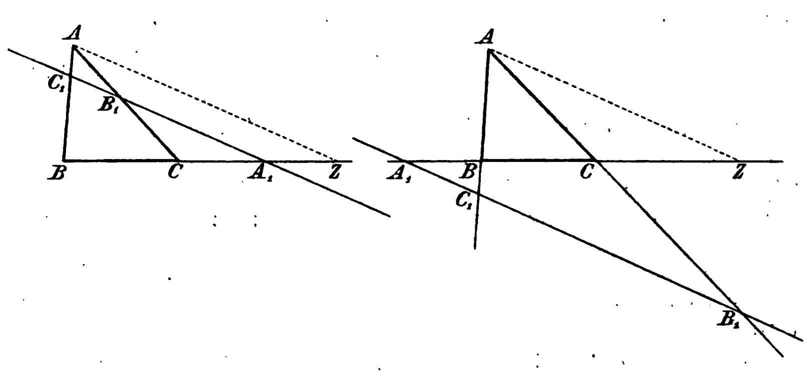
29) Die Strecke AB wird durch C und D innen und aufsen nach dem Verhältnis $p : q$ geteilt. 1) Welchen Wert hat das Verhältnis der Teilung der Strecke DC durch B und A? 2) Für welchen Wert von $\frac{p}{q}$ wird $CD = AB$? [Figur in **18**, 6.]

Antwort auf 1) $\frac{p+q}{p-q}$; auf 2) Für $\frac{p}{q} = 1 + \sqrt{2}$, also für das Verhältnis der Summe von Eckenlinie und Seite zur Seite des Quadrates.

11. Anhang.

1) Satz des Menelaus.*) Eine Gerade schneidet die drei Seiten eines Dreiecks so, dafs die beiden Produkte je dreier nicht in einer Ecke zusammenstofsenden Abschnitte einander gleich sind.

Bh. $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1$.



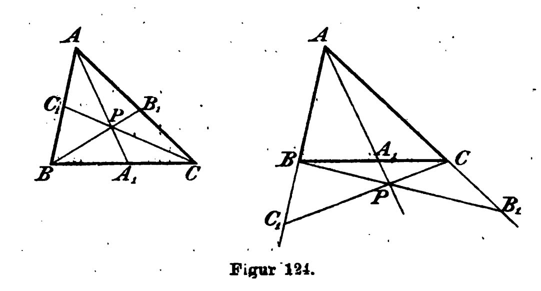
Figur 123.

Bw. Man ziehe durch einen Eckpunkt A die der Schneidenden gleichlaufende Gerade AZ bis zum Schnitt mit der Gegenseite. Auf dieser entsteht eine zwischen den Gleichlaufenden liegende Hilfsgröfse ZA_1, welche durch die Rechnung wieder zu beseitigen ist. Deswegen sind die Verhältnisgleichungen so aufzustellen, dafs ZA_1 bei der ersten im Nenner, bei der zweiten im Zähler steht; dann hebt sich bei dem verlangten Multiplizieren die Hilfsgröfse heraus. Nach dem Verhältnissatze ist, zuerst mit B, dann mit C als Schnittpunkt:

$$\frac{AC_1}{ZA_1} = \frac{BC_1}{BA_1} \text{ und } \frac{ZA_1}{AB_1} = \frac{CA_1}{CB_1}, \text{ also } \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{BC_1 \cdot CA_1}{BA_1 \cdot CB_1},$$

woraus die Behauptung hervorgeht.

2) Satz des Ceva.**) Drei Gerade, welche von den drei Ecken eines Dreiecks aus durch einen Punkt gehen, schneiden die Dreiecksseiten so, dafs die beiden Produkte je dreier nicht in einer Ecke zusammenstofsenden Abschnitte einander gleich sind.



Figur 124.

Bh. $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1$. [Ganz übereinstimmend mit der Behauptung beim vorhergehenden Satze.]

Bw. AA_1 zerlegt das Dreieck in zwei Dreiecke, auf welche der Satz des Menelaus angewendet wird.

$\triangle\ BAA_1$, von CC_1 geschnitten, giebt $AC_1 \cdot BC \cdot A_1P = AP \cdot BC_1 \cdot CA_1$
$\triangle\ CAA_1$, von BB_1 geschnitten, giebt $AP \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot A_1P \cdot BC$.

*) Menelaus, ein griechischer Mathematiker aus Alexandria, lebte unter Trajan zu Rom, also am Ende des ersten Jahrhunderts nach Christus.

**) Ceva, geboren zu Mailand 1648, starb 1736.

Multipliziert man beide Gleichungen, so heben sich BC und die Teile von AA_1 heraus und es steht die Behauptung da.

3) Umkehrung des Satzes von Menelaus. Ist entweder auf den Verlängerungen der drei Dreiecksseiten, oder auf zwei Dreiecksseiten und der Verlängerung der dritten, je ein Teilpunkt so gestellt, daſs die beiden Produkte je dreier nicht in einer Ecke zusammenstoſsenden Abschnitte einander gleich sind, so liegen die drei Teilpunkte auf einer Geraden.

Bw. Läge C_1 nicht auf der Geraden A_1B_1, so müſste sie die Seite AB in einem andern Punkte, X, schneiden. Für diesen würde die Anwendung des Satzes von Menelaus eine Gleichung liefern, welche, durch die Gleichung der Voraussetzung dividiert, die Gleichheit zweier Brüche verlangte, von denen der eine echt, der andere unecht sein muſs.

4) Umkehrung des Satzes von Ceva. Ist entweder auf den drei Dreiecksseiten selbst, oder auf einer Dreiecksseite und den Verlängerungen der beiden andern, je ein Teilpunkt so gestellt, daſs die beiden Produkte je dreier nicht in einer Ecke zusammenstoſsenden Abschnitte einander gleich sind, so schneiden sich die von den Eckpunkten nach den Teilpunkten gehenden Geraden in einem Punkte.

Bw. ganz entsprechend dem vorigen.

12. Übungen zu 11.

1) Mittels der Umkehrung des Satzes von Ceva zu beweisen, daſs beim Dreieck sich in einem Punkte schneiden: a) die Mittellinien (zeigt sich unmittelbar); b) die drei Geraden, welche die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises mit der Spitze des Gegenwinkels der Seite verbinden (ergiebt sich auch sogleich); c) dasselbe gilt auch von den auf den Dreiecksseiten selbst liegenden Berührungspunkten der drei anbeschriebenen Kreise (**13**, 6); d) die, welche die Berührungspunkte eines dem Dreieck anbeschriebenen Kreises mit der Spitze des Gegenwinkels der Seite verbinden. [Man bezeichne den Berührungspunkt der Seite BC mit A_1, und entsprechend weiter.] e) die Winkelhalbierenden [mit **18**, 7 und entsprechender Bezeichnung]; f) die Halbierungslinien zweier Auſsenwinkel mit der Halbierungslinie des dritten inneren Winkels; g) die Höhen [erst mit **19**, 3].

2) Die Halbierungslinien der Auſsenwinkel eines Dreiecks schneiden die Gegenseiten in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen. Dasselbe gilt von den Halbierungslinien zweier Innenwinkel und der des Auſsenwinkels am dritten.

---

19. Glied. Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

1. Erklärung. **Zwei Figuren von gleich vielen Seiten haben gleiche Gestalt oder sind ähnlich, wenn ihre Winkel der Reihe nach paarweise gleich sind und die entsprechenden Seiten alle gleiches Gröſsenverhältnis haben.**

Im ersten Abschnitt (Glied 6) handelte es sich um Figuren von gleicher Gröſse und Gestalt, die also ganz übereinstimmen; im zweiten (Glied 15) um Figuren von gleicher Gröſse und verschiedener Gestalt, jetzt um Figuren von gleicher Gestalt und verschiedener Gröſse.

Das Zeichen für Ähnlichkeit ist ∾.*) Das Zeichen für völlige Übereinstimmung ≌ sagt durch seine Zusammensetzung, dafs die Figuren „gleich und ähnlich" sind.

Anmerk. Weifs man aus anderweitigen Gründen, dafs zwei vorliegende Vielecke ähnlich sind, so schliefst man daraus, dafs gleichliegende Winkel gleich und entsprechende Seiten andern entsprechenden Seiten verhältnisgleich sind.

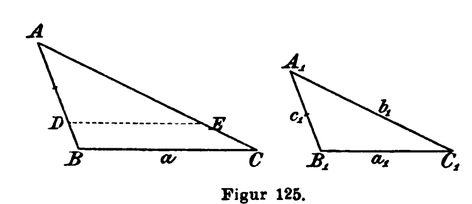
2. Hilfssatz. Zieht man durch ein Dreieck eine mit einer Seite gleichlaufende Gerade, so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

Bw. (Figur ABC mit DE für den folgenden Satz.) Die gleichliegenden Winkel sind nach **4**, 8 gleich, und auch die Gröfsenverhältnisse der Seiten nach dem Verhältnissatz, **18**, 3. Daher sind die beiden Dreiecke ADE und ABC ähnlich nach der Erklärung.

Anmerk. Bei zwei Dreiecken reichte zum Nachweis völliger Übereinstimmung hin die Gleichheit von drei Paaren ihrer Stücke (den 6 Seiten und 6 Winkeln). Die Gröfsengleichheit zweier Dreiecke erfordert nur zwei Paar Gleichheiten, die ihrer Grundseiten und die der zugehörigen Höhen; so sind auch für die Gleichheit der Gestalt (Ähnlichkeit) zweier Dreiecke nur zwei Paare von Gleichheiten nötig. Die vier Ähnlichkeitssätze der Dreiecke entsprechen den 4 Sätzen der Übereinstimmung (**6**, 1—4) und werden wie diese geordnet und bezeichnet.

3. Erster Satz. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel entsprechend gleich sind.**

Vs. $\angle A_1 = A$, $\angle B_1 = B$.
Bh. $\triangle A_1B_1C_1 \backsim ABC$.



Figur 125.

Bw. Man trage die Seite A_1B_1 von A aus auf AB ab und ziehe durch den Endpunkt D die mit BC gleichlaufende Gerade. Dann ist (nach **19**, 2) das abgeschnittene Dreieck $ADE \backsim ABC$ und stimmt nach dem ersten Satze überein mit $A_1B_1C_1$. Deshalb ist auch dieses dem Dreieck ABC ähnlich.

4. Zweiter Satz. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten entsprechend verhältnisgleich und die Zwischenwinkel gleich sind.**

Vs. $\frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c}$, $\angle B_1 = B$.
Bh. $\triangle A_1B_1C_1 \backsim ABC$.

Bw. Man verfährt, wie vorhin. Dann wird nach dem Verhältnissatze $\frac{DE}{a} = \frac{AD}{c}$; dies giebt mit der Voraussetzung $a_1 = DE$, also stimmt nach dem 2. Satze $\triangle A_1B_1C_1 \cong ADE$, welches $\backsim ABC$ ist.

5. Dritter Satz. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten entsprechend verhältnisgleich sind.**

---

*) Das Ähnlichkeitszeichen mag aus einem umgelegten S entstanden sein: ∽ (*similis*, ähnlich). Zum Schreiben war aber der wie die Schriftzüge laufende Bogen ∾ bequemer.

Vs. $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$.

Bh. $\triangle\ A_1B_1C_1 \sim ABC$.

Bw. Wie vorher hat man hier $a_1 = DE$ und dazu, auch nach dem Verhältnissatze, $\frac{AE}{b} = \frac{AD}{c}$, woraus mit dem zweiten Teile der Voraussetzung hervorgeht $b_1 = AE$. Mithin stimmt nach dem 3. Satze $\triangle\ A_1B_1C_1 \cong ADE$, welches $\sim ABC$ ist.

6. Vierter Satz. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten entsprechend verhältnisgleich und die Gegenwinkel der gröfseren gleich sind.**

Vs. $\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$, $b_1 > c_1$, $b > c$, $\angle B_1 = B$.

Bh. $\triangle\ A_1B_1C_1 \sim ABC$.

Bw. ebenso, nur mit Anwendung des 4. Satzes der Übereinstimmung.

Anmerk. 1. Liegen die beiden Winkel den kleineren Seiten gegenüber, so sind die Dreiecke nicht notwendig ähnlich. (Vergl. 6, 4, Anm.)

Anmerk. 2. Ist mit gegebener Seite ein Dreieck herzustellen, welches einem gegebenen ähnlich sein soll, so verfährt man, wie die Figur in **19**, 3 zeigt.

7. Ls. **Das rechtwinklige Dreieck wird durch die Höhe in zwei Dreiecke geteilt, welche dem ganzen Dreiecke und einander ähnlich sind.** Daraus folgt: 1) **Im rechtwinkligen Dreieck ist jede kleine Seite Mittelglied zwischen der gröfsten Seite und dem anliegenden Höhenabschnitt**; und 2) **die Höhe ist Mittelglied zwischen den Höhenabschnitten.**

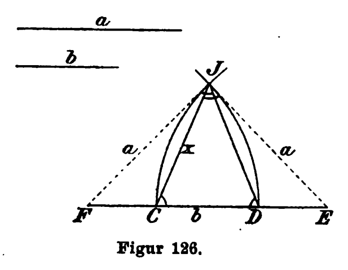
Bw. Durch den ersten Ähnlichkeitssatz findet man (**19**, 1, Anm.), dafs die Gegenseiten gleicher Winkel verhältnisgleich sind. (Vergl. die Lehrsätze **16**, 2 und 4.)

8. Hauptaufgabe. **Das Mittelglied von den Strecken a und b, $x = \sqrt{ab}$, zu zeichnen.**

Zwei Herstellungen mittels eines Halbkreises gemäfs **16**, 6 nach **19**, 7.

Eine dritte Herstellungsweise empfiehlt sich durch Kürze der Ausführung.

Über die kleinere Strecke $CD = b$ hin schneidet man von den Endpunkten aus die gröfsere, a, als CE und DF ab und beschreibt mit a aus E und F die Kreuzbogen CJ und DJ. Dann ist der Abstand JC (oder JD) das gesuchte Mittelglied x.



Figur 126.

Bw. Im Dreieck FJE ist $\angle E = F$, also sind in den gleichschenkligen Dreiecken CEJ und DFJ die 4 Grundwinkel einander gleich. Daher ist $\triangle\ EJC \sim JCD$ und es verhält sich $EJ : JC = JC : CD$, das ist $a : x = x : b$. [Hierzu noch **20**, 1, 2.]

9. Aufgabe. **Das Verhältnisglied zu a, b und b zu finden.** (19, 7 oder 18, 3.)

10. Ls. In ähnlichen Dreiecken stehen gleichliegende Strecken in demselben Gröfsenverhältnis, wie die Seiten. Solche Strecken sind:

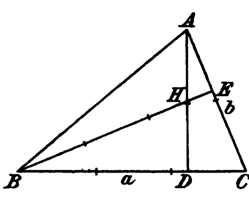
gleichliegende Höhen, Winkelhalbierende, Mittellinien, Halbmesser des um- und des einbeschriebenen Kreises.

Bw. Die Anwendung der Ähnlichkeitssätze zeigt, dafs die gegebenen Dreiecke durch solche gleichliegende Gerade in ähnliche Dreiecke zerlegt werden, woraus die Behauptung hervorgeht. (**19**, 1, Anm.)

Anmerkung. Das Verhältnis der Höhe zu einer anliegenden Seite bestimmt einen Dreieckswinkel. $\frac{h_a}{c}$ bestimmt $\angle\,\beta$. Denn wenn in zwei Dreiecken $\frac{h_a'}{c'} = \frac{h_a}{c}$ ist, so folgt $\frac{h_a'}{h_a} = \frac{c'}{c}$. Deshalb sind die von diesen Geraden begrenzten Teildreiecke nach dem vierten Satze ähnlich; also ist in ihnen $\angle\,\beta' = \beta$. Doch ist stets daran zu denken, dafs auch der Nebenwinkel von β dasselbe Verhältnis $\frac{h_a}{c}$ besitzt; so dafs zwei Winkel daraus hervorgehen. Aus den für Zähler und Nenner gegebenen Gröfsen sind die beiden Winkel, β und sein Nebenwinkel, leicht zu zeichnen. Beispiel: $\frac{h_a}{c} = 1/2$ liefert, bei der Ausführung mit irgend einem Mafse m durch $h_a = 1m$, $c = 2m$, ein halbes gleichseitiges Dreieck; daher wird $\angle\,\beta_1 = 30^\circ$, wie grofs auch m genommen werde; und dazu noch $\angle\,\beta_2 = 150^\circ$.

11. Ls. **Zwei Höhen eines Dreiecks stehen im umgekehrten Verhältnis ihrer Grundseiten.**

In der Figur ist $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, aber $\frac{h_a}{h_b} = \frac{2}{3}$.



Figur 127.

Bh. $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

Bw. $\triangle\ ADC \sim BEC$ (1. Satz) folglich verhält sich $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$ wie behauptet wurde.

Anmerk. Ist das Verhältnis zweier Höhen eines Dreiecks gegeben, $\frac{h_a}{h_b} = \frac{q}{p}$, so kennt man das Verhältnis ihrer Grundseiten, und benutzt dies zur Ausführung einer Aufgabe.

Beispiel. $\triangle$ aus c, α, $h_b : h_c$.

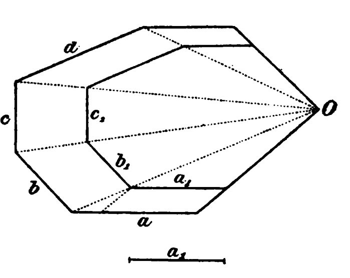
Zusatz. Zwei Höhen eines Dreiecks schneiden sich so, dafs ihre oberen Abschnitte sich umgekehrt verhalten, wie die unteren. (Die Strecke einer Höhe, vom Höhenschnitt bis zur Spitze, ist ihr oberer Abschnitt, die bis zur Grundseite ihr unterer Abschnitt.)

Bh. $HA : HB = HE : HD$.

Bw. $\triangle\ AHE \sim BHD$ (1. Satz) liefert die Glieder der Verhältnisgleichung in der angegebenen umgekehrten Ordnung der Höhenabschnitte. — Für ein bei C oder bei A stumpfwinkliges Dreieck bleibt der Beweis bei gleicher Bezeichnung buchstäblich derselbe.

12. Aufgabe. Zu einem gegebenen Vieleck ein ihm ähnliches zu zeichnen, von dem die einer bestimmten Seite entsprechende eine gegebene Länge hat.

Ausführung. Man nimmt irgendwo einen Punkt O an, am bequemsten einen Eckpunkt des gegebenen Vielecks (vergl. die beiden folgenden Figuren), zieht von ihm aus nach allen Ecken Strahlen, trägt zwischen die nach der bestimmten Seite a gehenden die gegebene Länge a_1, der Seite a gleichlaufend, ein, zieht vom Endpunkte die der nächsten Seite gleichlaufende Gerade bis zum folgenden Strahle, vom Treffpunkte so weiter rings herum. Das von diesen Geraden umschlossene Vieleck ist das verlangte.



Figur 128.

Bw. Die gleichliegenden Winkel beider Vielecke sind gleich nach **4**, 11 (oder, wenn a_1 zwischen die über O hinaus verlängerten Strahlen eingetragen wurde, nach dem dortigen Zusatz 1) und die entsprechenden Seiten sind verhältnisgleich, wie aus dem Verhältnissatze hervorgeht. (**18**, 3.) Das entstandene Vieleck ist also dem gegebenen ähnlich; auch hat seine erste Seite die vorgeschriebene Länge a_1.

Anmerk. Hat man den Punkt O nicht auf dem Umfange angenommen (siehe die beiden folgenden Figuren), so ist der letzte Eckpunkt mit dem ersten zu verbinden, und man hat nachzuweisen, dafs diese Verbindungslinie mit der letzten Seite gleichlaufend wird. (**18**, 4.)

13. Lehrsätze. 1) **Rauten sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich und anstofsende Seiten entsprechend verhältnisgleich haben.**

2) **Rechtecke sind ähnlich, wenn ihre anstofsenden Seiten gleiches Verhältnis haben.**

3) **Gleichseitige Vierecke sind ähnlich, wenn in ihnen ein Winkel gleich ist.**

4) **Alle Quadrate sind ähnlich.**

5) **Alle regelmäfsigen n-Ecke sind ähnlich.** (Für n jede ganze Zahl, gröfser als 2.)

14. Ls. **Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich, wie entsprechende Seiten.**

Bezeichnet man die Vielecke mit V und V_1, ihre Umfänge mit u und u_1 und die gewählten entsprechenden Seiten mit a und a_1, so ist

Vs. $V \backsim V_1$. Bw. Da die Vielecke ähnlich sind, so ist

Bh. $\frac{u}{u_1} = \frac{a}{a_1}$.

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \ldots\ldots$$

Durch **18**, 2, Zs. erhält man aus den beiden ersten gleichen Brüchen $\frac{a+b}{a_1+b_1} = \frac{b}{b_1}$ also auch $= \frac{c}{c_1}$.

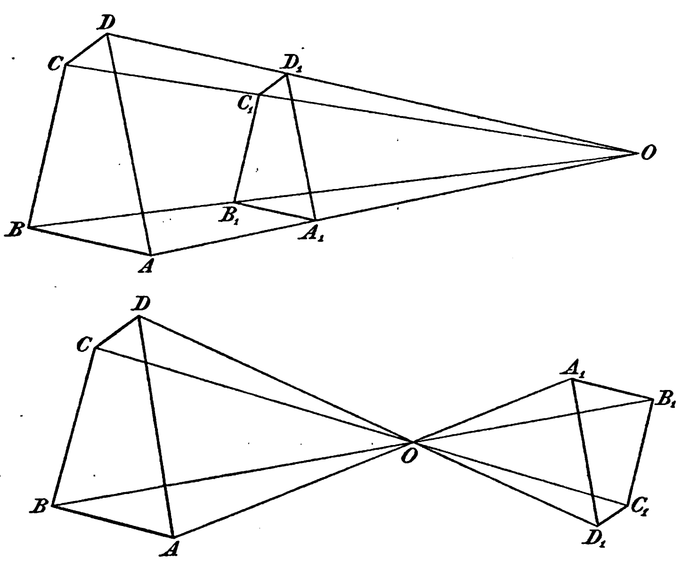
Aus $\frac{a+b}{a_1+b_1} = \frac{c}{c_1}$ folgt ebenso $\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{c}{c_1}$ also auch $= \frac{d}{d_1}$.

So fährt man fort, bis im Zähler und Nenner des linken Bruches die Summe aller Seiten steht und für den rechts bekommenen letzten Bruch nimmt man den ihm gleichen Bruch der gewählten Seiten; dann hat man

$$\frac{u}{u_1} = \frac{a}{a_1}.$$

Zusatz. Auch gleichliegende Eckenlinien ähnlicher Vielecke haben das Verhältnis entsprechender Seiten. (Bw. wie zu 19, 7.)

15. Ls. **Liegen ähnliche Vielecke so, dafs ein Paar entsprechender Seiten gleichlaufend ist, so schneiden sich die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken alle in einem Punkte.**



Figur 129.

Vs. Vieleck $AC \sim A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$.

Bh. AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, ... schneiden sich alle in einem Punkte O.

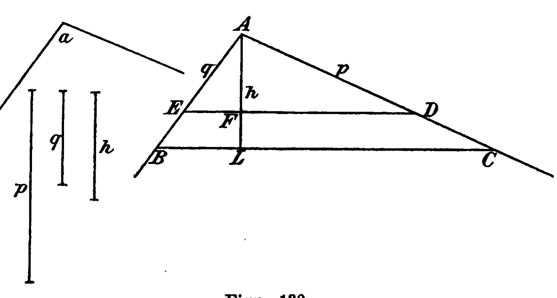
Bw. Zunächst ist leicht zu zeigen, dafs das Gleichlaufendmachen eines Seitenpaares, BC und B_1C_1, bewirkt, dafs auch die übrigen entsprechenden Seiten der ähnlichen Vielecke gleichlaufend werden. (4, 6.) Schneiden sich AA_1 und BB_1 im Punkte O, so mufs O mit C und C_1 auch in gerader Linie liegen. Wäre dies nicht der Fall, so würde die Verbindungslinie CO die Seite B_1C_1 in einem andern Punkte, X, schneiden. (4, 5.) Dann würde der Verhältnissatz geben $\frac{B_1X}{BC} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{B_1A_1}{BA}$. Wegen der Ähnlichkeit der Vielecke hat man aber auch $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{B_1A_1}{BA}$, woraus $B_1X = B_1C_1$ folgen würde, was für einen andern Punkt als C_1 nicht möglich ist. Deshalb geht CO durch C_1. Dasselbe gilt von DD_1 und O und allen sonst noch vorhandenen Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte der ähnlichen Vielecke.

Anmerk. Von ähnlichen Vielecken mit paarweise gleichlaufenden Seiten sagt man, sie befinden sich in Ähnlichkeitslage. Der Punkt O, in welchem sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken schneiden, heifst **Ähnlichkeitspunkt,** und zwar innerer Ähnlichkeitspunkt, wenn er zwischen den gleichlaufenden (aber, wegen der umgekehrten Lage des zweiten Vielecks, entgegengesetzt gerichteten) Seiten sich befindet, wenn er also auf den Verbindungslinien selbst liegt, und äufserer Ähnlichkeitspunkt, wenn erst ihre Verlängerungen ihn erreichen. Da man diese Geraden auch, von O aus nach den Ecken gehend, auffassen kann, so nennt man sie **Ähnlichkeitsstrahlen.**

16. Aufgabenlösen mittels ähnlicher Figur. (Zu **8**, 20 und **10**, 18.) Das dritte Verfahren, Aufgaben zu lösen, hat mit dem zweiten, dem mittels Orte, das gemein, dafs man zunächst eine der in der Aufgabe gestellten Bedingungen aufser acht läfst, wodurch die Aufgabe eine unbestimmte wird. Dies dritte Verfahren kommt da zur Anwendung, wo durch Erfüllung der übrigen Bedingungen der Aufgabe Figuren entstehen, die in ihrer Gestalt übereinstimmen, also einander ähnlich sind. Man zeichnet dann irgend eine dieser unzählig vielen Figuren. Sie kann sich von der geforderten unterscheiden 1) nur durch ihre Gröfse, was der Fall ist, wenn das aufser acht gelassene Bestimmungsstück eine Strecke war; dann schneidet man dieselbe auf der in dieser Figur ihr entsprechenden Linie ab und stellt von hier aus durch Ziehen gleichlaufender Geraden die ähnliche Figur mit dieser Gröfse her, welche also die verlangte ist. — Die vorläufig gezeichnete Figur kann aber von der geforderten 2) aufser in ihrer Gröfse noch dadurch abweichen, dafs sie nicht an der rechten Stelle sich befindet; dann geben die Strahlen des Ähnlichkeitspunktes die gesuchte Stelle an und man führt dort, wieder durch Ziehen gleichlaufender Geraden, die ähnliche Figur aus, welche die verlangte ist.

1. Beispiel. Ein Dreieck zu zeichnen, für welches ein Winkel, das Verhältnis der ihn einschliefsenden Seiten und die zur dritten Seite gehörige Höhe gegeben sind.

Es sei gegeben der Winkel α, das Verhältnis für $b : c = p : q$ und für die zur Grundseite a gehörige Höhe die Strecke h.



Figur 130.

Vorbereitung. Die Bedingung der Aufgabe, dafs die Höhe $= h$ sein soll, werde einstweilen aufser acht gelassen. Den übrigen Forderungen, einen Winkel $= \alpha$ und das Gröfsenverhältnis der ihn einschliefsenden Seiten $= p : q$ zu haben, entsprechen unzählig viele Dreiecke, die nach dem 2. Satze ähnlich sind. Daher ist die gestellte Aufgabe nach dem hier in Rede stehenden dritten Verfahren des Aufgabenlösens zu behandeln.

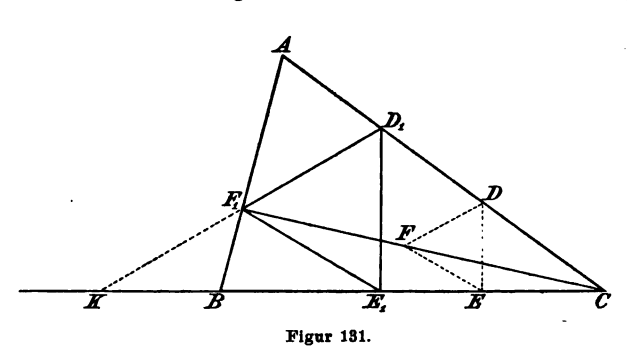
Ausführung. Es ist eines der ähnlichen Dreiecke zu zeichnen, am bequemsten dasjenige, welches die Strecken p und q selber als den Winkel α einschliefsende Seiten hat. Man schneidet also vom Scheitel A eines gleich α gemachten Winkels an auf dem einen Schenkel die Strecke p bis D, auf dem andern q bis E ab und verbindet E mit D. In diesem, dem verlangten ähnlichen Dreiecke ist nun die dem aufser acht gelassenen Stücke entsprechende Linie zu ziehen; das ist die zu seiner dritten Seite gehörige Höhe AF. Auf derselben wird die für die Höhe des geforderten Dreiecks gegebene Strecke h von der Spitze A aus abgetragen, so dafs $AL = h$ ist. Die durch L in der Richtung ED zu ziehende Gerade, deren Schnittpunkte auf den sogleich reichlich lang gezeichneten Schenkeln des Winkels α mit B und C bezeichnet werden mögen, liefert das Dreieck ABC als das verlangte.

Beweis. Der Verhältnissatz (18, 3) giebt $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$ oder durch Vertauschen der inneren Glieder $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$, das ist $b : c = p : q$. Aufserdem hat das Dreieck ABC nach Zeichnung den Winkel $A = \alpha$ und die auf der Grundseite stehende Höhe $AL = h$, ist also das verlangte.

Abschlufs. Da für jede Gröfse der gegebenen Stücke die Ausführung sich ebenso machen läfst, ist die Aufgabe immer zu lösen, und es entspricht ihr nur 1 Dreieck.

2. Beispiel. Einem gegebenen Dreieck ein gleichseitiges einzuzeichnen, welches mit einer Seite auf der Grundseite des gegebenen senkrecht steht.

Vorbereitung. Wir sehen von der Forderung ab, dafs das zu zeichnende Dreieck eine Ecke auf der dritten Seite AB des gegebenen Dreiecks haben soll. Den übrigen Bedingungen, mit einer Seite auf der Grundseite BC senkrecht zu stehen, eine Ecke auf AC und eine auf BC zu haben, genügen unzählig viele gleichseitige Dreiecke. Weil dieselben als regelmäfsige Dreiecke alle ähnlich sind, ist die Aufgabe nach dem dritten Verfahren zu lösen.



Figur 131.

Ausführung. Von irgend einem Punkte D der Seite AC fälle man die Senkrechte DE auf die Grundseite BC, zeichne mit DE als Seite ein gleichseitiges Dreieck, dessen Spitze auf die aufser acht gelassene Seite AB weist. Dieses Dreick DEF ist zu klein und befindet sich nicht an der gewünschten Stelle, aber mit dem geforderten in Ähnlichkeitslage, weil DE und die ihr entsprechende Seite, als Senkrechte auf BC, gleichgerichtet sind. Daher ist für DEF und das weiter links verlangte Dreieck der Ähnlichkeitspunkt aufzusuchen. Beide Dreiecke haben ihre entsprechenden ersten Ecken auf

AD, die zweiten auf *BE*; also ist der Punkt, in welchem sich diese Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte der ähnlichen Dreiecke schneiden, nämlich der Eckpunkt *C*, der Ähnlichkeitspunkt beider Figuren. Der von *C* durch den dritten Eckpunkt *F* laufende Strahl giebt auf der dritten Seite *AB* die Stelle F_1 für die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks an. Man zieht also schliefslich $F_1E_1 \parallel FE$, $E_1D_1 \perp BC$ und verbindet D_1 mit F_1; dann ist das Dreieck $D_1E_1F_1$ das verlangte.

Beweis. Weil nach dem Verhältnissatze beide Brüche $= \frac{E_1C}{EC}$ sind, ist $\frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1F_1}{EF}$, also $D_1E_1 = E_1F_1$, da die gleichen Nenner sich fortheben. Dazu kommt, dafs, als Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln, $\angle D_1E_1F_1 = DEF = 60^0$ ist; also ist das Dreieck $D_1E_1F_1$ gleichseitig, und da es nach Zeichnung mit seiner Seite D_1E_1 auf *BC* senkrecht steht, ist es das verlangte.

Abschlufs. Da der Strahl *CF* die gerade Linie *AB* nur in einem Punkte schneidet, so genügt der Aufgabe nur ein so gestelltes gleichseitiges Dreieck. Nun ist noch zu untersuchen, ob die Gestalt des gegebenen Dreiecks *ABC* dem Einzeichnen eines gleichseitigen Dreiecks hinderlich werden kann. Deshalb drehe man um F_1 die Seite *AB*, so dafs *B* nach links geht auf der verlängerten Geraden *CB*. Diese wird von der Fortsetzung der Seite D_1F_1 unter einem Winkel von 30^0 geschnitten, weil an der Senkrechten E_1D_1 der Winkel $E_1D_1F_1$ 60^0 beträgt. Ist der Eckpunkt *B* in den Schnittpunkt *K* gekommen, so befindet sich *A* in D_1. War also ein Dreieck gegeben, in welchem $\angle B = 30^0$ ist, so fällt bei ihm der Eckpunkt D_1 des einzuzeichnenden gleichseitigen Dreiecks in seine Spitze *A* und die Seite D_1F_1 auf *AB*. Hat das gegebene Dreieck die Ecke *B* jenseit *K*, so ist *A* zwischen D_1 und *C*; also tritt bei einem Dreieck, in welchem $\angle B < 30^0$ ist, der Eckpunkt D_1 des einzuzeichnenden gleichseitigen Dreiecks auf die Verlängerung der Seite *CA*, und es müssen alle zu gebenden Dreiecke, in welchen $\angle B < 30^0$ ist, abgewiesen werden, wenn man die Aufgabe nur so auffafst, dafs die Ecken des gleichseitigen Dreiecks auf die Seiten selbst kommen sollen. Dann steht der unteren Grenze für $\angle B$ auch eine obere gegenüber. Dreht man *AB* um F_1 anders herum, so dafs *B* nach E_1 kommt und über E_1 fortgeht, so schliefst in E_1 mit einem Winkel *B* von 150^0 das Dreieck *ABC* ab (in welchem natürlich $\angle C$ kleiner, als hier gezeichnet, nämlich $< 30^0$, ist). — Nimmt man aber die Aufgabe so, dafs drei unbegrenzte gerade Linien gegeben sind, die sich so schneiden, dafs sie ein Dreieck *ABC* umschliefsen. dann läfst sich ein gleichseitiges Dreieck immer so hinstellen, dafs auf jeder der drei Geraden ein Eckpunkt desselben sich befindet. Dann giebt es aber sogar noch ein zweites auf *BC* mit einer Seite senkrecht stehendes gleichseitiges Dreieck, welches man erhält, wenn man das erste Dreieck *DEF* mit der Spitze *F* rechts von *DE* zeichnet. Der von *C* aus durch diese Spitze gehende Strahl liefert F_2 auf *AB* nahe über *A* und dazu kommt E_2 weit links von *K* auf *CB* und D_2 senkrecht darüber auf die Gerade *CA*.

[Das vierte Verfahren, Aufgaben zu lösen, das mittels Buchstabenrechnung, folgt **21, 13.**]

17. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) Die gröfste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks und die Höhe sind äufsere, die kleinen Seiten innere Glieder einer Verhältnisgleichung.

2) Das Mittelglied zweier ungleicher Strecken ist stets kleiner als ihre Gröfsenmitte. (Siehe zu 14, 10, 12 die unten stehende Angabe.)

3) Errichtet man bei zwei sich von innen berührenden Kreisen auf der Achse Senkrechte, welche beide Kreise schneiden, so haben die Entfernungen der Schnittpunkte vom Berührungspunkte bei allen Senkrechten dasselbe Verhältnis. Beispiel: Der Durchmesser des grofsen Kreises sei viermal so grofs, wie der Durchmesser des kleinen.

---

4) Wenn die Seiten zweier Dreiecke paarweise auf einander senkrecht stehen, so sind die Dreiecke ähnlich.

5) Die Umfänge regelmäfsiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich, wie ihre grofsen oder kleinen Halbmesser.

6) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Höhen entsprechend verhältnisgleich sind.

7) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Mittellinien entsprechend verhältnisgleich sind.

---

8) Eulers Satz.*) In jedem Dreieck liegen der Schnittpunkt der Höhen, der der Mittellinien und der der Mittelsenkrechten auf einer Geraden, und zwar so, dafs der Schwerpunkt die Entfernung der beiden andern im Verhältnis 2 : 1 teilt. — Bw. Der Höhenschnitt H ist die Spitze eines Dreiecks mit einer Dreiecksseite als Grundseite. Die die Mitten der beiden andern Dreiecksseiten verbindende Gerade ist Grundseite eines Dreiecks mit dem Schnittpunkte M der Mittelsenkrechten als Spitze. Diese beiden Dreiecke sind ähnlich und befinden sich in Ähnlichkeitslage. (19, 15, Anm.) Der Schwerpunkt S ist ihr (innerer) Ähnlichkeitspunkt; woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

9) Der Höhenschnitt H eines Dreiecks, der Schwerpunkt S, der Mittelpunkt Q des Feuerbachschen Kreises (12, 15, 13) und der Mittelpunkt M des umbeschriebenen Kreises sind Punkte verhältnisgleicher Teilung. Dabei sind die Kreismittelpunkte zugeordnete Punkte. — Bw. Was in 8) von S gezeigt ist, gilt auch von Q. Der Wert der beiden gleichen Verhältnisse ist, für H als Anfangspunkt der Strecke HS, 3 und für die Strecke MQ, mit M als Anfangspunkt, ist der Verhältniswert 2. [Vergl. 18, 10, 29.]

b) Aufgaben.

10) Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.

11) In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.

12) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen Seiten sich wie $p : q$ verhalten.

---

*) Leonhard Euler war geboren zu Basel 1707 und starb zu Petersburg 1783. Er fand den Satz 1765.

13) In einen gegebenen Kreis ein gerades Trapez zu beschreiben, von dem ein Winkel und das Verhältnis der Hauptseiten gegeben ist.

14) Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Viereck zu beschreiben, dessen Eckenlinien sich wie $p : q$ verhalten.

---

15) Von einem gegebenen Rechteck durch eine mit einer Seite gleichlaufende Gerade ein ihm ähnliches Rechteck abzuschneiden.

16) Ein Trapez durch eine den Hauptseiten gleichgerichtete Gerade in zwei einander ähnliche Trapeze zu zerlegen.

---

17) $\triangle$ aus β, γ, m_a.

18) Von einem gegebenen Dreiecke durch eine einer Seite gleichlaufende Gerade ein Dreieck von gegebenem Umfange u abzuschneiden.

19) $\triangle$ aus h_a, h_b, h_c. (19, 11 und 5.)

20) Ein Viereck zu zeichnen aus einer Eckenlinie und den vier Winkeln, welche die andere Eckenlinie mit den Seiten bildet.

21) Ein Viereck zu zeichnen aus einer Seite und den vier Winkeln, welche die Eckenlinien an den dieser Seite gegenüberliegenden Ecken mit den andern Seiten bilden.

---

22) Rechtwinkliges $\triangle$ aus $a : c$, $a - b$.

23) $\triangle$ aus $h_c : a$, $a \dotplus c$, h_a. (2 Lösungen.)

24) $\triangle$ aus $h_a : b$, $h_a : c$, h_a. (3 Lösungen sind möglich.)

---

25) $\triangle$ aus b, $h_c : h_b$, h_a. (2 Lösungen.)

26) $\triangle$ aus β, $h_a : h_c$, w_b.

27) $\triangle$ aus α, $h_b : h_c$, ϱ.

28) $\triangle$ aus α, $w_a : c$, m_a.

---

29) Vom Mittelpunkte eines Kreises gehen zwei Strahlen aus. Es ist ein Quadrat zu zeichnen, welches auf jedem Strahle eine Ecke und die andern auf dem Kreise hat.

30) $\triangle$ aus $a : b : c$, r.

31) Gleichschenkliges Dreieck aus $h_b : h_a$, ϱ.

32) $\triangle$ aus α, $b : c$, r.

33) $\triangle$ aus α, $a : b$, ϱ.

34) Es ist eine gerade Linie L und aufserhalb derselben ein Punkt P gegeben. Man soll in L zwei Punkte, X und Y, so bestimmen, dafs $\angle XPY$ einem gegebenen Winkel α gleich wird und $PX : PY = p : q$.

---

35) Einem Halbkreise ein Rechteck schönster Form einzubeschreiben, das ist eines, dessen Seiten sich verhalten, wie Seite und Eckenlinie eines Quadrates. In dem einen Halbkreise habe das Rechteck seine grofse, in dem andern seine kleine Seite auf dem Durchmesser.

36) Drei gegebene unbegrenzte gerade Linien schneiden sich so, dafs ein Dreieck entstanden ist. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden, welches auf der ersten Geraden zwei Eckpunkte und auf jeder der beiden andern einen Eckpunkt hat. (2 Lösungen. Nur bei besonderer Höhe des Dreiecks liegt das eine im Unendlichen.)

37) **Einem gegebenen Vierecke ein gleichseitiges einzubeschreiben, dessen Seiten den Eckenlinien desselben gleichgerichtet sind.**

38) **Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels berührt und durch einen zwischen denselben gegebenen Punkt geht. (2 Lösungen.)**

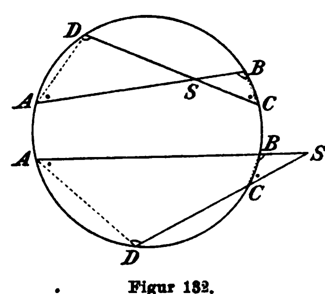
---

20. Glied. Gröfsenverhältnisse gerader Linien am Kreise.

1. Ls. **Schneiden sich zwei durch einen Kreis gehende Gerade innerhalb oder aufserhalb des Kreises, so sind die am Schnittpunkte anfangenden Abschnitte der einen die äufseren, die der andern die inneren Glieder einer Verhältnisgleichung.**

Bh. $\frac{SA}{SC} = \frac{SD}{SB}$.

Bw. Verbindet man die Endpunkte der Strecken, wie die Figur angiebt, so sind in den entstehenden Dreiecken die Winkel entsprechend gleich, im ersten Falle als Winkel am Kreisumfange auf demselben Bogen, im zweiten, weil der Aufsenwinkel am Sehnenviereck gleich dem inneren Gegenwinkel ist. (**12**, 6, Zs.) Deshalb ist $\triangle\ ASD \sim CSB$, woraus die Behauptung hervorgeht.



Figur 182.

Anmerk. Beseitigt man die Nenner der Verhältnisgleichung, so zeigt $SA \cdot SB = SC \cdot SD$, dafs man auch sagen kann, dafs das Produkt aus den Abschnitten der einen Geraden gleich dem Produkt aus den Abschnitten der andern ist. (Siehe die Anm. zu **18**, 1.)

Zusätze. Es werde CD um S gedreht, bis etwas Besonderes eintritt.

1) Für den inneren Punkt S ist es diejenige Lage, in welcher er CD halbiert. Dann ist CD die kleinste unter allen durch S gehenden Sehnen und ihre Hälfte Mittelglied von SA und SB. Ist dabei AB ein Durchmesser, so entsteht der **19**, 7, 2) aufgestellte Satz.

2) Für den äufseren Punkt ist es die Lage, bei welcher die Schnittpunkte in einen Berührungspunkt zusammenfliefsen. Dann hat man den wichtigen Satz:

Gehen von einem Punkte nach einem Kreise eine berührende und eine schneidende Gerade, so ist die Berührende Mittelglied von den am Ausgangspunkte anfangenden Abschnitten der Schneidenden.

Dieser Satz mufs (durch dieselben Hilfslinien) neu bewiesen werden, weil das zu einem Dreieck gewordene Sehnenviereck nicht mehr die Begründung geben kann. Dafür tritt der Satz **11**, 7, 1 ein, dafs der Abschnittswinkel gleich dem auf dem Bogen stehenden Winkel am Umfange ist.

3) Dieser letzte Satz giebt eine vierte Weise an, das Mittelglied x von zwei Strecken a und b zu zeichnen. (**19**, 8.)

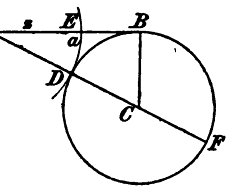
2. Umkehrung. Hat man auf zwei sich schneidenden Geraden je zwei am Schnittpunkte anfangende Abschnitte von solcher Gröfse, dafs die der einen Geraden die äufseren, die der andern die inneren Glieder einer Verhältnisgleichung sind, so geht durch die vier Endpunkte ein Kreis.

Bw. Zeichnet man den durch drei von den 4 Endpunkten bestimmten Kreis (**12**, 2, 1), so läfst sich durch Anwendung von **20**, 1 leicht zeigen, dafs der Punkt X, in welchem der Kreis die eine Gerade nun zum zweiten Male schneidet, kein anderer als der vierte Endpunkt ist.

Zusätze. 1) Ist eine auf einer Strecke zwischen ihren Endpunkten senkrecht stehende Strecke Mittelglied von den durch sie gebildeten Abschnitten, so liegt ihr Endpunkt auf dem Halbkreise über dieser Strecke.

2) Liegen, vom Scheitel eines Winkels an, auf dem einen Schenkel zwei Strecken und auf dem andern deren Mittelglied, so wird dieser Schenkel von dem durch die drei Endpunkte bestimmten Kreise berührt.

3. Der goldene Schnitt. **Eine Strecke so in zwei Teile zu zerlegen, dafs der gröfsere Teil Mittelglied ist von der ganzen Strecke und dem kleineren Teile.**



Figur 133.

Ist AB die gegebene Strecke a, z ihr gröfserer Teil, so soll werden

$$a : z = z : (a - z).$$

Ausführung. Im Endpunkte B der Strecke a errichte man $^1/_2 a$, beschreibe mit $^1/_2 a$ um seinen Endpunkt C einen Kreis und ziehe durch den Mittelpunkt vom Anfangspunkte A der Strecke her eine Gerade. Ihr äufserer Teil AD giebt den verlangten gröfseren Abschnitt, wenn man ihn auf die Strecke überträgt. E ist der gesuchte Teilpunkt.

Bw. Nach **20**, 1, 2 ist

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AD}, \text{ woraus } (\mathbf{18}, 2) \ \frac{AF - AB}{AB - AD} = \frac{AB}{AD}.$$

Der erste Zähler wird, da $DF = AB$ gemacht ist, zu AD, und das ist AE, also $\frac{AE}{EB} = \frac{AB}{AE}$ oder, in kleinen Buchstaben, mit dem rechts stehenden Bruche anfangend, $a : z = z : (a - z)$.

Anmerk. Da die Verhältnisgleichung $\frac{a}{z} = \frac{z}{a - z}$ eine stetige ist, so sagt man auch, AB wird in E stetig geteilt.

Zusatz. Aus der Verhältnisgleichung folgt 1) durch Zusammenzählen $\frac{a + z}{a} = \frac{a}{z}$ und dies lehrt: Verlängert man eine stetig geteilte Linie um ihren gröfseren Abschnitt, so ist die ganze Linie auch stetig geteilt.

Dann 2) durch Abziehen $\frac{a - z}{z - (a - z)} = \frac{z}{a - z}$ woraus ersichtlich ist, wenn man erst den rechts stehenden Bruch ansieht: Schneidet man den

kleineren Abschnitt einer stetig geteilten Linie auf dem gröfseren ab, so wird der gröfsere Abschnitt auch stetig geteilt.

4. Ls. Bei zwei Kreisen schneiden sich die Verbindungslinien der Endpunkte je zweier entgegengesetzt gerichteter Halbmesser in einem Punkte der Verbindungslinie der Mittelpunkte, und die Verbindungslinien der Endpunkte je zweier gleichgerichteter Halbmesser schneiden sich in einem Punkte der verlängerten Achse. Die Schnittpunkte sind (gemäfs **19**, 15, Anm.) der innere und der äufsere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Sie teilen den Mittelpunksabstand innen und aufsen nach dem Verhältnis der Halbmesser.

Bw. durch den Ls. in **18**, 6, Anm. 2.

Zusätze. 1) Von den gemeinsamen Berührungslinien zweier Kreise schneiden sich die inneren im inneren, die äufseren im äufseren Ähnlichkeitspunkte. Hiernach kann man in bequemerer Weise, als **13**, 5, die gemeinsamen Berührungslinien zweier Kreise finden.

2) Legt man von einem Ähnlichkeitspunkte aus eine Gerade durch beide Kreise, so sind die Halbmesser nach den entsprechenden Schnittpunkten gleichlaufend.

5. Übungen.

a) Lehrsätze.

1) Zieht man an zwei sich schneidende Kreise von einem Punkt der Verlängerung der gemeinsamen Sehne die Berührenden, so werden diese für beide Kreise gleich.

2) Legt man zwischen gleichlaufende Berührungslinien eines Kreises andere Berührungslinien, so haben die Abschnitte bei allen dasselbe Mittelglied in stetiger Verhältnisgleichung, nämlich den Halbmesser des Kreises.

3) Bei zwei sich von aufsen berührenden Kreisen ist der Teil einer gemeinsamen äufseren Berührungslinie, welcher zwischen den Berührungspunkten liegt, Mittelglied der Durchmesser. (Bw. durch ähnliche Dreiecke.)

4) Mittels der Umkehrung des Satzes von Menelaus [**18**, 11, 3] ist leicht zu beweisen: Bei drei Kreisen liegen von den sechs Ähnlichkeitspunkten die drei äufseren, sowie jeder äufsere mit zwei inneren, auf einer Geraden. [Man bezeichne die Mittelpunkte mit A, B, C; bei den Kreisen um A und B den äufseren Ähnlichkeitspunkt mit C_1, den inneren mit C_2, und entsprechend weiter.]

b) Aufgaben.

5) Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade berührt. [Man verlängere die Verbindungslinie der beiden Punkte.] (2 Lösungen.)

6) Durch einen gegebenen Kreis eine Gerade von einem aufsen nicht weit von ihm gegebenen Punkte P so zu ziehen, dafs die Sehne Mittelglied von den bei P anfangenden Abschnitten der Schneidenden wird. Und darauf die Aufgabe zu lösen: Die Strecken zu finden, deren Unterschied und Mittelglied gegeben ist.

7) Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt eine Sehne zu ziehen, deren Abschnitte sich wie $p : q$ verhalten.

8) Einen gegebenen Kreisbogen so zu teilen, dafs die zu den Teilen gehörigen Sehnen sich wie die Abschnitte einer stetig geteilten Strecke verhalten.

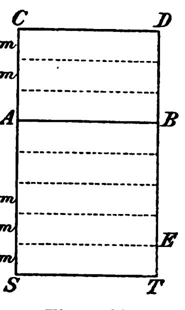


2. Abschnitt. Verhältnisgleichheit begrenzter Flächen. Inhaltsbestimmung.

21. Glied. Inhalt der Dreiecke und Vierecke.

1. Ls. Das Gröfsenverhältnis zweier Rechtecke von gleichen Grundseiten ist gleich dem ihrer Höhen.

Man lege das zweite Rechteck auf das erste, so dafs die gleichen Grundseiten sich decken; dann kommen die Nebenseiten in die des andern, weil in einem Punkte der gemeinsamen Grundlinie nur eine Senkrechte möglich ist, und nun erscheint das kleinere Rechteck als ein Teil des gröfseren.



Figur 134.

Bh. Rechteck $\frac{SB}{SD} = \frac{SA}{SC}$.

Der Beweis entspricht dem des „Verhältnissatzes" **18**, 3.

Erster Fall: die Höhen SA und SC haben ein gemeinsames Mafs m. Die Messung ergiebt $SA = p \cdot m$ und $SC = q \cdot m$, also

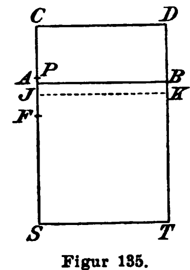
$$\frac{SA}{SC} = \frac{p}{q}.$$

Nun lege man durch jeden Teilpunkt die der Grundseite ST gleichgerichtete Gerade bis zu den Gegenseiten der geteilten Seiten. Die entstehenden Rechtecke sind deckbar wegen Gleichheit anstofsender Seiten und der Winkel. Eines derselben, SE, nimmt man als Mafs M für die gegebenen Rechtecke. Es ist das Rechteck $SB = p \cdot M$ und $SD = q \cdot M$ mit denselben Zahlen p und q, weil jede Strecke m die Höhe eines Mafsrechtecks M ist. Daher ist auch ihr Gröfsenverhältnis

$$\frac{SB}{SD} = \frac{p}{q}, \text{ also } \frac{SB}{SD} = \frac{SA}{SC}.$$

Zweiter Fall: die Höhen SA und SC haben kein gemeinsames Mafs. Auch dann sind die beiden Brüche gleich. Denn wäre $\frac{SB}{SD} < \frac{SA}{SC}$, so könnte man den zu grofsen Bruch $\frac{SA}{SC}$ um so viel verkleinert denken (durch Verminderung des Zählers um AF), dafs er dem ersten gleich wird,

$$\frac{SB}{SD} = \frac{SF}{SC}.$$



Figur 135.

Nun könnte man die Höhe SC mit einem Mafse messen, welches in dieser Strecke aufgeht und kleiner ist, als der Abschnitt AF. Bei dem von C anfangenden Messen kann kein Teilpunkt in A kommen, weil sonst SA und SC doch ein gemeinsames Mafs hätten; es mufs aber, da das Mafs kleiner als AF ist, wenigstens ein Teilpunkt (wie **18**, 3 näher angegeben wurde) zwischen A und F fallen. Durch solchen zwischen A und F liegenden Teilpunkt J ziehe man $JK \parallel ST$. Das

hierdurch abgegrenzte Rechteck SK und das gegebene SD haben Höhen, welche ein gemeinsames Mafs (das gebrauchte) besitzen; deshalb ist ihr Gröfsenverhältnis

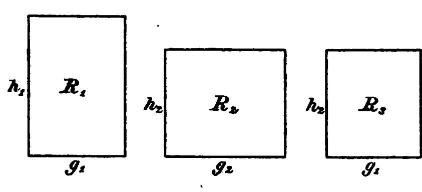
$$\frac{SK}{SD} = \frac{SJ}{SC}.$$

Dividiert man nun jene Gleichung durch diese, so zeigt sich $\frac{SB}{SK} = \frac{SF}{SJ}$, was nicht möglich ist, weil der erste Bruch unecht, der zweite echt ist. Auf denselben Widerspruch stöfst man bei der Annahme, es könnte $\frac{SB}{SD} > \frac{SA}{SC}$ sein. Daher müssen beide Brüche gleichen Wert haben (der sich durch Kürzen der Brüche herausstellt).

Zusatz. Das Gröfsenverhältnis zweier gleich hoher Rechtecke ist gleich dem ihrer Grundseiten.

Denn wendet man die eben betrachteten Figuren um, so dafs SA und SC Grundseiten werden, so ist ST die gemeinsame Höhe der auf einander gelegten gleich hohen Rechtecke. Daher kann der vorhin bewiesene Satz auch so ausgesprochen werden, wie nun geschah.

2. Ls. Das Gröfsenverhältnis zweier Rechtecke ist gleich dem Verhältnis der beiden Produkte aus den Mafszahlen der zusammengehörigen Grundseite und Höhe.



Figur 136.

Bh. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{g_1 \cdot h_1}{g_2 \cdot h_2}$.

Bw. Man zeichne ein drittes Rechteck, welches mit dem ersten gleiche Grundseite und mit dem zweiten gleiche Höhe hat. Dann ist nach dem vorigen Satze und Zusatze

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{und} \quad \frac{R_3}{R_2} = \frac{g_1}{g_2}$$

deren Produkt ergiebt

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{g_1 \cdot h_1}{g_2 \cdot h_2}.$$

3. Erklärung. Der Inhalt einer begrenzten Figur ist die Zahl, welche beim Messen ihrer Flächengröfse sich ergiebt. Da eine Gröfse nur mit einer gleichartigen Gröfse gemessen werden kann, so mufs das Mafs für Flächen eine Fläche sein. Man nimmt dazu das Quadrat über dem zum Messen der Strecken gebrauchten Längenmafse m (z. B. Quadratmeter, Quadratcentimeter).

Es werde, wie in **18**, 1, Anm., auch hier nochmals darauf hingewiesen, dafs, wenn in verkürzter Ausdrucksweise vom Produkt zweier Strecken gesprochen wird, stets darunter zu verstehen ist das Produkt der unbenannten Zahlen, welche durch das Messen dieser Strecken gefunden wurden. (Vergleich die Ausdrucksweise am Ende der Lehrsätze in 2 und 4.)

4. Ls. **Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt von Grundseite und Höhe.**

$$J = g \cdot h.$$

Bw. Zum gegebenen Rechteck R ist das Quadrat M über dem Maſse m das zweite Rechteck, für welche der letzte Lehrsatz, beim Messen der Strecken mit irgend einem Maſse s, liefert

$$\frac{R}{M} = \frac{g_1 \cdot h_1}{m \cdot m} \text{ oder, getrennt geschrieben, } \frac{R}{M} = \frac{g_1}{m} \cdot \frac{h_1}{m}.$$

Der links stehende Bruch giebt an, wie oft das Flächenmaſs M in dem Rechteck R enthalten ist und dies Ergebnis der Messung war die Zahl J, die Inhaltszahl; und $\frac{g_1}{m}$ ist die Maſszahl g, welche das Messen der Grundseite mit dem Maſse m liefert, sowie $\frac{h_1}{m}$ die Zahl h für die Höhe. (Siehe **17**, 2, Anm.) Daher ist

$$J = g \cdot h.$$

Anmerkungen. 1) Es hat sich also ergeben, daſs das Produkt zweier Strecken den Inhalt eines Rechtecks ausdrückt, welches diese Strecken zu Seiten hat. Die Bezeichnung eines Rechtecks mit den Seiten DE und DB, welche **16**, 2, Anm. als „$DE \cdot DB$, gelesen DE mal DB“ eingeführt wurde, bedeutet demnach in der That ein Produkt. — Für den Inhalt eines Quadrates über der Seite a ist die Maſszahl a der Grundseite und der Höhe mit sich selbst zu multiplizieren. Es giebt also die zweite Potenz a^2 den Inhalt eines Quadrates an, und deswegen liest man a^2, „a hoch 2“, gewöhnlich „a-Quadrat“.

2) Es wurde der Satz des Pythagoras **16**, 3 in Zeichen hingeschrieben: $a^2 + b^2 = c^2$. Dort bezeichnete c^2 eine Figur. Jetzt erst wissen wir, daſs c^2 die zweite Potenz der Zahl c für die Länge der gröſsten Seite ist, so daſs nun die Gröſse dieser Seite durch Quadratwurzelausziehen gefunden werden kann

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Der Satz: „das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Höhenabschnitten der gröſsten Seite“ wurde **16**, 4 in Zeichen geschrieben: $h^2 = p \cdot q$, und in **19**, 7, 2) fanden wir: „die Höhe ist Mittelglied zwischen den Höhenabschnitten“. Nun sehen wir, daſs beide Sätze dasselbe aussagen; daſs also die Höhe selbst aus gegebenen Höhenabschnitten p und q zu berechnen ist als $h = \sqrt{p \cdot q}$.

3) In der Gleichung $h^2 = p \cdot q$ haben beide Seiten als Benennung den Namen des Flächenmaſses. Während des Rechnens bleibt die Benennung fort. Erst dem Ergebnis giebt man die ihm zukommende Benennung: $h = \sqrt{pq}$ Längeneinheiten.

4) Um die Benennung durch die Bezeichnung kenntlich zu machen, bezeichnen wir die Gröſsen, welche Flächen bedeuten, mit groſsen Buchstaben, und die Längen mit kleinen Buchstaben. Also: Umfang mit u oder $2s$, Inhalt eines Trapezes T.

5. Ls. **Der Inhalt einer Raute ist gleich dem Produkte von Grundseite und Höhe.**

Bw. Die Raute ist gleich einem Rechtecke von gleicher Grundseite und Höhe. (**14**, 3.)

Anmerk. Das Messen einer schiefwinkligen Raute durch wiederholtes Auflegen des rechtwinkligen Flächenmaſses würde an zwei Gegenseiten kleine dreieckige Reste lassen, welche, zusammengeschoben, nachträglich auch noch zu messen wären. Diesen Übelstand beseitigt der Satz, daſs Raute und Rechteck von gleichen Grundseiten und Höhen gleiche Gröſse haben.

6. Ls. **Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte von Grundseite und Höhe:**

$$\triangle = {}^1/_2\, gh.$$

Bw. durch **14**, 4.

Zusätze. 1) Die Inhalte zweier Dreiecke von gleichen Grundseiten verhalten sich, wie die Höhen. Gleich hohe Dreiecke verhalten sich wie die Grundseiten.

Beispiel. Die durch die drei Mittellinien eines Dreiecks entstehenden Teile sind Sechstel des Dreiecks.

2) **Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ist**

$$J = {}^1/_4\, a^2 \sqrt{3}.$$

3) Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Produkt der kleinen Seiten, ${}^1/_2\, ab$; aber auch ${}^1/_2\, ch$. Also ist ${}^1/_2\, ch = {}^1/_2\, ab$, woraus folgt $\frac{h}{a} = \frac{b}{c}$ oder $h : a = b : c$, wie **19**, 17, 1) aus ähnlichen Dreiecken gefunden wurde.

7. Ls. **Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und der halben Summe der Hauptseiten:**

$$T = {}^1/_2\,(a + b) \cdot h.$$

Bw. Die Figur in **8**, 17 zeigt, daſs ein Trapez gleiche Flächengröſse hat mit einer ebenso hohen Raute, deren Grundseite gleich der Mittellinie m des Trapezes ist; also $T = m \cdot h$, und da dort $m = {}^1/_2\,(a + b)$ gefunden wurde, ist $T = {}^1/_2\,(a + b) \cdot h$. Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man eine Eckenlinie des Trapezes zieht und die Inhalte beider Dreiecke addiert.

8. Ls. **Der Inhalt eines um einen Kreis beschriebenen Vielecks ist gleich dem halben Produkt aus seinem Umfange und dem Halbmesser des (einbeschriebenen) Kreises:**

$$J = {}^1/_2\, u\varrho \text{ oder } \varrho s.$$

Bw. Man zerlegt das Vieleck durch die vom Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises nach den Ecken gehenden Strahlen in Dreiecke und zählt deren Inhalte zusammen. (**10**, 12.) Solches Vieleck ist gleich einem Dreiecke, dessen . . . . .

Beispiel. Der Inhalt eines um den Kreis vom Halbmesser ϱ beschriebenen regelmäſsigen Sechsecks ist $S = 2\varrho^2 \sqrt{3}$.

Anmerk. Den Inhalt eines beliebigen Vielecks findet man, indem man von einer Ecke aus alle Eckenlinien zieht, durch Messen der Grundseiten und zugehörigen Höhen die Inhalte der entstandenen Dreiecke bestimmt und alle zusammenzählt. Da diese Gröſsen durch kein Gesetz mit einander verbunden sind, läſst sich keine allgemeine Inhaltsformel aufstellen.

9. Ls. Die Inhalte zweier Dreiecke, welche einen Winkel gleich haben (oder in denen ein Winkel des einen einen Winkel des andern zu zwei Rechten ergänzt) verhalten sich wie die Produkte aus den diese Winkel einschliefsenden Seiten.

Bw. mittels ähnlicher Dreiecke.

10. Ls. **Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.**

Bw. durch den vorhergehenden Satz.

Anmerk. Man beachte die Worte „wie die Quadrate" und merke: Flächen verhalten sich wie Flächen, Linien wie Linien! Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie gleichliegende Seiten. (**19**, 14.) Das Verhältnis zweier Flächen wird nur dadurch gleich dem zweier Linien, dafs sich in solchem besonderen Falle zwei gleiche Strecken aus dem Bruche fortgehoben haben. (**21**, 6, 1.)

Zusätze. 1) Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich auch wie die Quadrate gleichliegender Höhen. — Die mitten durch die Höhe mit der Grundseite gleichlaufende Gerade schneidet vom Dreieck den vierten Teil ab; und die nur 3 Zehntel der Höhe von der Grundseite entfernt bleibende noch nicht die Hälfte. — Bei welchem Bruchteile der Höhe, von der Spitze an gerechnet, läuft in Richtung der Grundseite die das Dreieck halbierende Gerade? Bestimme ihre Lage durch Rechnung und Zeichnung. (**19**, 8.)

Antwort. $x = \sqrt{{}^1\!/_2 h \cdot h} = {}^1\!/_2 \sqrt{2} \cdot h = 0{,}707 \ldots h$; also fast 71 Hundertstel der Höhe von der Spitze des Dreiecks entfernt.

2) Die Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Eckenlinien. (**19**, 14, Zs.)

3) Erweiterung des Satzes von Pythagoras. Beschreibt man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, als entsprechenden Seiten, ähnliche Vielecke, so werden die beiden kleinen zusammen gleich dem gröfsten. (**19**, 12.)

Bw. Entsprechend den kleinen Seiten a und b und der gröfsten Seite c, bezeichne man die ähnlichen Vielecke mit A, B und C, und bestimme die Summe der Werte der Brüche $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$.

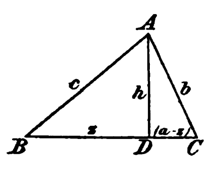
11. Aufgabe. Den Inhalt eines Dreiecks durch die Seiten auszudrücken.

Ausführung. Der unter c liegende Höhenabschnitt von a werde mit z bezeichnet. Für h^2 hat man aus beiden Teildreiecken

$$b^2 - (a - z)^2 = h^2 = c^2 - z^2,$$

woraus durch $b^2 - a^2 + 2az = c^2$

hervorgeht $z = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$.



Figur 137.

Nun wird $h^2 = c^2 - z^2 = (c + z)(c - z)$

und zwar $c + z = \dfrac{(a + c)^2 - b^2}{2a} = \dfrac{(a + c + b)(a + c - b)}{2a}$.

Es sei der Umfang des Dreiecks $a + b + c = 2s$
zieht man hiervon ab $2b = 2b$

so bleibt $a - b + c = 2(s - b)$.

Dies macht $c + z = \frac{2s(s - b)}{a}$ und ebenso kommt $c - z = \frac{2(s - a)(s - c)}{a}$.
Setzt man diese Werte beider Faktoren in h^2 ein und zieht die Wurzel aus, so zeigt sich

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

also ist

$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist.

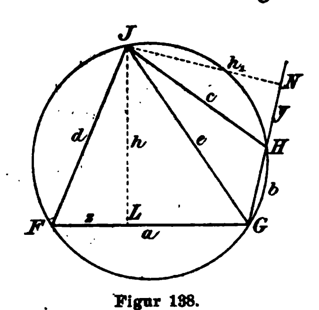
Beispiel. Sind die Maſszahlen der Seiten 13, 14, 15, so wird der Inhalt dieses Dreiecks 84 Quadrateinheiten.

12. Aufgabe. Den Inhalt eines Sehnenvierecks durch die vier Seiten zu bestimmen.

Die Ausführung entspricht der vorhergehenden. Man zerlege das Viereck durch eine Eckenlinie, $GJ = e$, in zwei Dreiecke und fälle von ihrem Endpunkte J die Höhen derselben. Es giebt e^2 aus dem ersten Dreiecke FGJ

$$e^2 = (a - z)^2 + h^2 = a^2 + d^2 - 2az$$

und aus dem andern $e^2 = b^2 + c^2 + 2by$. Es verhält sich aber $\frac{y}{z} = \frac{c}{d}$. Setzt man $y = \frac{c}{d}z$ ein und bildet aus den beiden Ausdrücken von e^2 eine Gleichung, so liefert diese



Figur 138.

$$z = \frac{d(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{2(ad + bc)}.$$

Hierdurch wird in $h^2 = d^2 - z^2 = (d + z)(d - z)$,
wenn man den Umfang $a + b + c + d = 2s$ einführt,

$$d + z = \frac{2d(s-c)(s-b)}{ad + bc} \quad \text{und} \quad d - z = \frac{2d(s-d)(s-a)}{ad + bc}$$

daher $$h = \frac{2d}{ad + bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Da auch $\frac{h_1}{h} = \frac{c}{d}$, so wird der Inhalt des Sehnenvierecks

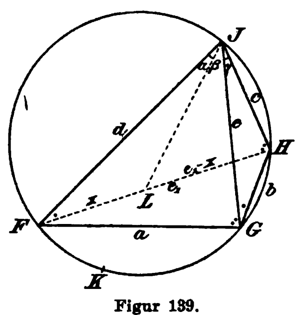
$$S = \frac{ad + bc}{2d} \cdot h$$

mithin $$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Anmerk. Läſst man die Seite d bis zum Verschwinden abnehmen, so geht hieraus für das entstandene Dreieck die in 11 abgeleitete Formel hervor.

13. Satz des Ptolemäus.*) **Im Sehnenviereck ist die Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten gleich dem Rechtecke aus den Eckenlinien.**

*) Claudius Ptolemäus, Astronom und Mathematiker, von Geburt ein Ägypter, lebte zu Alexandria in der ersten Hälfte des 2. Jahrhunderts nach Christus.



Figur 139.

Bh. $ac + bd = ee_1$.

Bw. Bei der vierten Ecke J trage man den an der dritten Seite liegenden Winkel HJG an die vierte Seite dadurch an, dafs man den Bogen GH als FK abschneidet und dann JK nur bis zur Eckenlinie zieht. Dieser Schenkel JL zerlegt das an der vierten Ecke liegende Dreieck FJH in zwei Dreiecke, welche den durch die Eckenlinie JG entstandenen Teilen des Vierecks ähnlich sind. (Warum?)

$\triangle\, FLJ \sim GHJ$ liefert $\dfrac{x}{b} = \dfrac{d}{e}$, also $bd = ex$

$\triangle\, LHJ \sim FGJ$ $\dfrac{e_1 - x}{a} = \dfrac{c}{e}$ $\quad ac = ee_1 - ex$

$$\overline{ac + bd = ee_1.}$$

Anmerk. Für ein Rechteck geht aus diesem Satze der des Pythagoras hervor.

14. Aufgabenlösen mittels Rechnung. (Zu **8**, 20, **10**, 18 und **19**, 16.)

Das vierte Verfahren, die Ausführung einer Aufgabe sicherlich zu finden, ist die Anwendung der Buchstabenrechnung.

1) In einer vorläufig entworfenen Figur bezeichnet man die zur Bestimmung des Gesuchten dienende Strecke mit x oder, wenn zwei erforderlich werden, mit x und y, die mit ihnen nach den Eigenschaften der Figur in Beziehung tretenden bekannten (mefsbaren) Strecken derselben mit a, b, c, ... und meint mit diesen Buchstaben die Mafszahlen dieser Längen. Die Beziehungen zwischen den unbekannten und bekannten Gröfsen drückt man nach den Bedingungen der Aufgabe und nach den Eigenschaften der Figur in so vielen von einander unabhängigen Gleichungen aus, als Unbekannte eingeführt werden mufsten, und löst diese Buchstabengleichungen nach den Unbekannten auf. Das Ergebnis könnte dazu benutzt werden, aus den einem Beispiele entnommenen Mafszahlen der bekannten Gröfsen die Zahlen für die Länge der Unbekannten wirklich zu berechnen und diese nach dem gebrauchten Längenmafse hinzuzeichnen. Dies thut man aber nicht, weil schon die Form der Ausdrücke im Ergebnisse angiebt, wie mit den gegebenen Strecken zu verfahren ist, um die Unbekannten sogleich als Strecken fertig zu erhalten.

2) Was zur Herstellung des Gesuchten zu thun ist, sagt die Mathematik (aufser dem selbstverständlichen $a \pm b$) durch folgende vier Formeln, die in ihrer Form sich wesentlich von einander unterscheiden und deren Bedeutung und Ausführungsweisen man sich fest einprägen mufs.

Es ist 1) $x = \dfrac{bc}{a}$ das Verhältnisglied zu a, b und c, herzustellen nach **18**, 5 oder **18**, 10, 4; wozu auch $x = \dfrac{b^2}{a}$ gehört (**19**, 9);

2) $x = \sqrt{ab}$ das Mittelglied von a und b, zu zeichnen nach **19**, 8 oder **20**, 1, 2;

3) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ die gröſste Seite des rechtwinkligen Dreiecks mit den kleinen Seiten a und b,

und 4) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist mit b eine kleine Seite des rechtwinkligen Dreiecks mit der gröſsten Seite a; man zeichnet sie, mit b anfangend, bequemer als durch den Halbkreis über a.

Auf bequemere Herstellungsart ist noch hinzuweisen bei

$x = a\sqrt{2}$, zu nehmen als $x = \sqrt{a^2 + a^2}$, und ebenso

$$x = a\sqrt{{}^1/_2} = \sqrt{({}^1/_2 a)^2 + ({}^1/_2 a)^2},$$

und $x = a\sqrt{3}$ als $x = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$, die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite $2a$. [Vergl. **16**, 8, 4) und 5).]

Jedes irgendwie zusammengesetzte Formelergebnis geht durch leichte Zerlegung in diese wenigen Formeln über. Zum Beispiel:

bei $x = \sqrt{a^2 + b^2 - cd}$ setzt man $a^2 + b^2 = e^2$ und $cd = f^2$, dann ist $x = \sqrt{e^2 - f^2}$ zu finden durch die Formeln 3, 2 und 4.

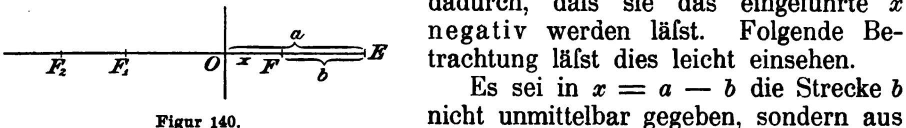
$x = \frac{a^2b}{c^2}$ wird durch $d = \frac{ab}{c}$ zu $x = \frac{ad}{c}$.

$x = a\sqrt[4]{5}$ war $x = a\sqrt{\sqrt{5}}$, wird also $x = \sqrt{a\sqrt{5a^2}}$ und mit

$b = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$ zu $x = \sqrt{ab}$.

3) Da die Glieder einer Summe dieselbe Benennung haben müssen, so kann man hierdurch prüfen, ob etwa bei der Formelentwicklung Schreibfehler gemacht sind. Ein Ergebnis $x = a + bc$ muſs unrichtig sein, weil zu einer Linie sich nicht eine Fläche addieren läſst. Bei $x^2 = (a + b)c$ haben beide Seiten der Gleichung Flächenbenennung. In $x = a + \frac{bc}{d}$ ist auch der zweite Posten eine Linie. Das Produkt der Maſszahlen zweier Längen hat Flächenbenennung. Es besitzt bc für sich, als Rechteck, die Benennung „Quadrateinheiten"; das Dividieren des Produkts bc durch d liefert $\frac{bc}{d}$ als eine Linie. Das Multiplizieren mit der Maſszahl einer Strecke fügt eine Ausdehnung hinzu, das Dividieren beseitigt sie wieder. In $y = \frac{bce}{df}$ werden von den drei Ausdehnungen des Zählers zwei durch die beiden des Nenners aufgehoben; es ist y (mit $\frac{bc}{d} = g$) als $\frac{ge}{f}$ eine Linie. Auch das Quadratwurzelausziehen bringt aus einer Gröſse von zwei Ausdehnungen eine Länge hervor: $x = \sqrt{ab}$ und $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ sind Linien, während die unter dem Wurzelzeichen stehenden Gröſsen für sich Flächenbenennung haben.

4) Die Mathematik belehrt hierbei auch darüber, daſs die gesuchte Strecke eine andere Richtung hat, als man erwartete. Dies thut sie dadurch, daſs sie das eingeführte x negativ werden läſst. Folgende Betrachtung läſst dies leicht einsehen.



Figur 140.

Es sei in $x = a - b$ die Strecke b nicht unmittelbar gegeben, sondern aus

mehreren aufser a noch bekannten Gröfsen, denen man verschiedene Werte geben kann, durch obige Formeln erst herzustellen. Wird bei solcher Abänderung die Strecke b kleiner, als in vorstehender Figur zuerst gezeichnet, so rückt F nach rechts, x verlängert sich nach rechts; also ist O der Anfangspunkt der Strecke x. Wird bei anderer Abänderung der zu wählenden Gröfsen die Strecke b länger, so rückt F nach links und vermindert x. Ergiebt sich b gleich a, so kommt F in O an und macht x zu Null. Hat die Abänderung den Erfolg gehabt, dafs b nun gröfser als a geworden ist, so setzt F seine Wanderung nach links fort auf der Verlängerung jenseit O und kommt nach F_1 oder F_2. Dann ist $x = a - b$ durch das zu EF_1 vergröfserte b nun negativ: $x = -(b - a) = -OF_1$ und noch weiter $x = -OF_2$. Es hat also das negative Zeichen vor einer Längenzahl die Bedeutung, dafs die Strecke x, nicht mehr, wie man anzunehmen Grund hatte, nach rechts als OF, sondern in entgegengesetzter Richtung, als OF_1 oder OF_2 abzutragen ist. Also: das Minuszeichen fordert die entgegengesetzte Lage.*) Bedeutet x die Länge der Seite einer Figur ohne Beziehung auf Lage, dann ist der negative Wert abzuweisen, weil er dem Wortlaute der Aufgabe nicht entspricht.

5) Ferner ist eine oft anwendbare erheblich abkürzende Herstellungsweise zu besprechen.

Führt die Aufgabe zu der geordneten Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten

$$x^2 - dx \pm ef = 0$$

so kann man, ohne die Gleichung aufzulösen, sofort zeichnen nach dem Satze von zwei innerhalb oder aufserhalb des Kreises sich schneidenden Geraden (**20**, 1); denn die Gleichung giebt durch ihre bekannten Gröfsen Summe und Produkt der beiden Wurzeln der Gleichung an. Es ist d der Durchmesser des Kreises. Im Falle $+ ef$ zeigt $ef = x(d - x)$, dafs man $e + f$ als Sehne in den Kreis eintragen, diese Sehne in e und f zerlegen und durch den Teilpunkt den Durchmesser ziehen mufs. Seine Abschnitte sind der eine und der andere Wert von x. Im Falle $- ef$ zeigt $x(x - d) = ef$, dafs man $e - f$ als Sehne in den Kreis eintragen, sie um f nach aufsen verlängern und vom Endpunkte aus die schneidende Gerade durch den Mittelpunkt ziehen mufs. Die ganze Schneidende ist x_1, ihr äufserer Abschnitt ist x_2, aber negativ genommen. [Letzteres sieht man, wenn man dieses negative x in die Gleichung einsetzt: $-x(-x - d) = ef$ wird $x(x + d) = ef$.] Ist beim zweiten Falle $e = f$, also $e - f = 0$, so geht die Schneidende in eine Berührungslinie über.

Ist in der geordneten Gleichung zweiten Grades d selbst negativ, so dafs dasteht

$$x^2 + dx \pm ef = 0$$

so kann im Falle $+ ef$ die mit lauter Pluszeichen versehene Gleichung nur durch negative Werte von x auf Null gebracht werden; beide Abschnitte der Sehne sind negativ zu nehmen. Dies tritt vor Augen, wenn man in $ef = -dx - x^2 = -(d + x) \cdot x$ den negativen Wert x hinschreibt: $ef = [-(d - x)] \cdot (-x)$. Im Falle $- ef$ sieht man aus $x(x + d) = ef$,

*) Dafs die entgegengesetzte Lage das Minuszeichen bringt, zeigte sich schon bei der Erweiterung des Lehrsatzes **14**, 10, 12.

dafs x_1 der positive äufsere Teil der Schneidenden, x_2 aber die negativ zu nehmende ganze Schneidende ist. Also bei der Schneidenden ist immer nur der eine Abschnitt positiv, und zwar derjenige, welcher unmittelbar erkannt wird aus $x(x - d)$ oder $x(x + d)$.

Diese Abkürzung der Behandlung kann nicht eintreten, wenn die Kleinheit des Durchmessers das Eintragen der Sehne stets verhindert. Dann mufs die Gleichung aufgelöst und die Herstellung in gewöhnlicher Weise ausgeführt werden.

6) Dadurch, dafs die in den Kreis einzutragende Sehne nicht gröfser werden kann, als der Durchmesser, und durch den vierten Formelausdruck, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, giebt die Mathematik auch an, hinter welchen Grenzwerten der zu gebenden Gröfsen die Aufgabe gar nicht mehr möglich ist. In $y = d + \sqrt{a^2 - b^2}$ darf b nur bis zur Gröfse von a wachsen, weil das rechtwinklige Dreieck mit a als gröfster Seite bei $b = a$ verschwindet; oder a darf nur bis zur Gröfse von b abnehmen. Durch Überschreiten des Grenzfalles, in welchem die Quadratwurzel gleich Null ist, würde y imaginär. Hierdurch läfst sich also aus der ungelösten geordneten Gleichung oder aus dem Schlufswerte ablesen, was als Abschlufs der Aufgabe anzugeben ist. Der Grenzwert, gröfste Sehne, oder kleinster Durchmesser, gröfstes b, oder kleinstes a, weist auf eine besondere unter den betrachteten Figuren, welche diesen gröfsten oder kleinsten Wert besitzt. Dieselbe zeichnet sich gewöhnlich auch durch besondere Gestalt unter ihnen aus, und man wird diese durch den Formelausdruck schon bewiesene Erkenntnis am Ende des Abschlusses in Form eines Lehrsatzes ausdrücklich angeben.

7) Da die Ansatzgleichungen auf Grund erwiesener Sätze aufgestellt sind und ihre Verbindung und die Umgestaltung auf die Gesetze der Buchstabenrechnung sich stützt, so liegt hierin der Beweis, dafs das Ergebnis den Forderungen der Aufgabe entspricht. Ein besonderer „Beweis" ist also nicht erforderlich. Lassen sich zur Bestätigung Eigenschaften der Figur verwenden, so wird man nicht unterlassen, dies anzugeben, auch, wenn die Möglichkeit sich bietet, die Güte der Zeichnung prüfen durch Abmessen einer durch die Ausführung entstandenen Strecke zum Vergleich mit ihrer gegebenen Gröfse.

Es hat dieses letzte Verfahren des Aufgabenlösens vor den übrigen den Vorzug, dafs es den zum Ziele führenden Weg ohne tiefere Überlegung erkennen und mit Sicherheit verfolgen läfst; aber auch den Nachteil, dafs seine Herstellungsweisen oft umständlicher sind, als es, besonders durch Antragen von Winkeln oder durch Beschreiben von Kreisen, möglich ist.

1. Beispiel. Eine Strecke a so zu teilen, dafs der Unterschied der Quadrate der Abschnitte gleich dem Quadrate über der Strecke b sei.

Rechnung. Auf der gegebenen Strecke $DE = a$ wird die Lage des gesuchten Teilpunktes X bestimmt durch den Abstand $DX = x$. Da hierdurch der zweite Abschnitt der Strecke a zu $EX = a - x$ wird, lautet die Ansatzgleichung nach der Bedingung der Aufgabe

$$x^2 - (a - x)^2 = b^2$$

deren Lösung ergiebt

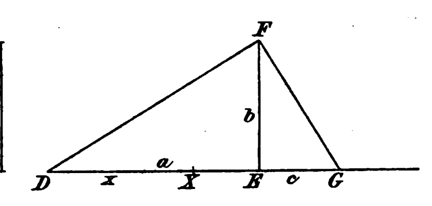
$$x = \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{b^2}{a}\right).$$

D x X a-x E (a)

Figur 141.

Ausführung. Es sei $\frac{b^2}{a} = c$. Zur Herstellung bietet sich der Satz von der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks hier am günstigsten. (**19**, 7, 2; **16**, 4.)

Auf DE errichtet man im Endpunkte $EF = b$, verbindet D mit F und errichtet auf DF in F die Senkrechte FG, welche auf der Verlängerung von DE die eingeführte Gröfse $c = EG$ abschneidet. Nun ist $x = \frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{2} DG$. Durch Halbieren von DG erhält man den gesuchten Teilpunkt X.



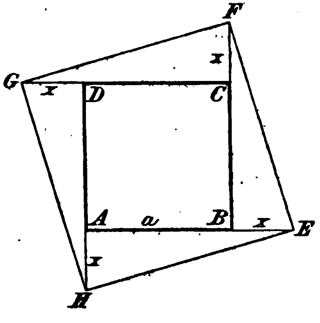
Figur 142.

Die Rechnungsprobe mit $\frac{1}{2}(a + \frac{b^2}{a})$ und $a - x = \frac{1}{2}(a - \frac{b^2}{a})$ würde die Richtigkeit der Lösung bestätigen.

Abschlufs. Da die Ausführung bei jeder beliebigen Länge von a und b dieselbe ist, so giebt es immer einen Wert für x. Ist b nur klein, so kommt X nahe an den Halbierungspunkt der Strecke a. Wird b sehr grofs gewählt, so rückt die Mitte von DG über E hinaus und X wird zum äufseren Teilpunkt. Er ist innerer Teilpunkt, so lange $x < a$ bleibt; also liefert $\frac{1}{2}(a + \frac{b^2}{a}) < a$ die hierzu erforderliche Abhängigkeit von b und a; nämlich durch $a + \frac{b^2}{a} < 2a$, $b^2 < a^2$, also $b < a$. Bei $b = a$ wird auch $c = a$ und X kommt in den Endpunkt E von a, wie notwendig ist, da in diesem Falle nach der Aufgabe von a^2 nichts abgezogen werden soll. Je mehr b die Strecke a an Gröfse übertrifft, desto schneller rückt X als äufserer Teilpunkt auf der Verlängerung in die Ferne, um $XD^2 - XE^2 = b^2$ werden zu lassen.

2. Beispiel. Jede Seite eines Quadrates in gleichem Sinne um dieselbe Strecke so weit zu verlängern, dafs das durch Verbindung der Endpunkte entstehende Viereck das Doppelte des Quadrates werde.

Entwicklung. Es werde die Grundseite AB über den Endpunkt B nach rechts um eine Strecke $BE = x$ verlängert, die anstofsende Seite BC über C um ebenso viel bis F, und so weiter rings herum. Durch Verbindung der Endpunkte entstehen 4 rechtwinklige Dreiecke, welche nach dem zweiten Satze übereinstimmen. Da also ihre gröfsten Seiten gleich sind, ist das erhaltene Viereck $EFGH$ gleichseitig. Jeder Winkel desselben ist die Summe zweier Winkel, die als spitze Winkel der übereinstimmenden rechtwinkligen Dreiecke zusammen einen Rechten betragen. Daher ist das Viereck ein Quadrat. Es soll werden $EH^2 = 2a^2$ oder nach Pythag.



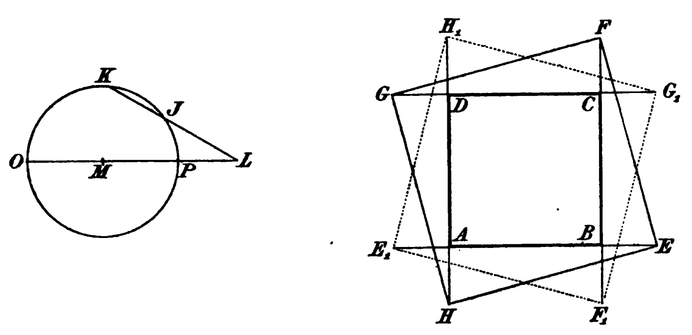
Figur 143.

$$x^2 + (a + x)^2 = 2a^2.$$

Diese Ansatzgleichung lautet geordnet

$$x^2 + ax - {}^1/_2 a^2 = 0.$$

Nach dem unter 5) Besprochenen braucht man sie nicht aufzulösen, weil sie die Herstellungsweise schon erkennen läfst. Wegen $+ a$ und $- {}^1/_2 a \cdot a$ ist es der in 5) zuletzt behandelte Fall: $x(x + a) = {}^1/_2 a \cdot a$.



Figur 144.

Ausführung. Man beschreibt mit der Quadratseite a als Durchmesser den Kreis um M, schneidet von einem seiner Punkte, J, mit $a - {}^1/_2 a = {}^1/_2 a$ bei K ein und markiert sogleich für die Verlängerung bei L. Die Sehne KJ giebt den Punkt L, von welchem durch M die Schneidende LO zu ziehen ist. Ihr äufserer Abschnitt LP ist x. Diese Strecke x trägt man nun auf die Verlängerung jeder Quadratseite nach rechts auf und hat nach Verbinden der Endpunkte das verlangte Viereck.

Die Güte der Zeichnung läfst sich prüfen, da die Seite des Vierecks nach der Aufgabe gleich einer Eckenlinie des gegebenen Quadrats sein mufs.

Abschlufs. Die andere Wurzel der Gleichung zweiten Grades wird geliefert von der negativ zu nehmenden ganzen Schneidenden LO. Ihr entgegengesetztes Vorzeichen verlangt, dafs man sie von B aus nach links abtrage und von den übrigen Eckpunkten der Ordnung nach herum dem entsprechend. Die Verbindung dieser Punkte liefert ein zweites Viereck, $E_1F_1G_1H_1$, welches der Forderung der Aufgabe genügt. Seine Spitzen haben vom Anfangspunkte jeder Seite des gegebenen Quadrats ebenso grofsen Abstand, wie die Spitzen des ersten Vierecks vom Endpunkte; denn es ist $BA + AE_1 = OP + PL$, also $AE_1 = PL = BE$. Dies mufste so kommen, weil man auch mit der Verlängerung bei A hätte beginnen können.

3. Beispiel. Um die Endpunkte der Strecke a zwei sich schneidende Kreise so zu zeichnen, dafs die gemeinsame Sehne $= b$ und die Summe der beiden Halbmesser $= s$ wird.

Rechnung. Die nach einem Schnittpunkte gehenden Halbmesser bilden mit dem Mittelpunktsabstande a ein Dreieck, in welchem die Hälfte der gemeinsamen Sehne b die Höhe zur Grundseite a ist. (**13**, 2.) Diese kann auf a selbst stehen, oder erst auf der Verlängerung. Beide Fälle sind in der Ansatzgleichung zu berücksichtigen. Sie lautet, wenn x den Halbmesser

des ersten Kreises, also $(s - x)$ den des zweiten bezeichnet, (siehe *BD* und *CD* in der folgenden Figur)

$$\sqrt{x^2 - (\tfrac{1}{2}b)^2} \pm \sqrt{(s - x)^2 - (\tfrac{1}{2}b)^2} = a.$$

Da ein Quadratwurzelzeichen durch Quadrieren nur dann verschwindet, wenn die Wurzel auf einer Seite des Gleichheitszeichens allein steht, so werde die erste Wurzel nach rechts gesetzt; dann geht durch das Quadrieren auch das Doppelzeichen $\pm$ fort. Die Endgleichung mufs also für beide Fälle passen.

Nach dem Fortheben der gleichen Glieder heifst die Gleichung

$$s^2 - 2sx = a^2 - 2a\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$

und man hat sie, um nun auch das noch gebliebene Wurzelzeichen zu beseitigen, umzuschreiben in

$$2a\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}b^2} = 2sx - s^2 + a^2.$$

Da rechts ein Ausdruck von drei Gliedern steht, welcher für das Quadrieren unbequem ist, so fafst man dort die beiden gegebenen Gröfsen zusammen, $-s^2 + a^2 = -(s^2 - a^2)$ und führt schon hier eine neue Gröfse für sie ein; es sei $s^2 - a^2 = c^2$.

Aus $2a\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}b^2} = 2sx - c^2$

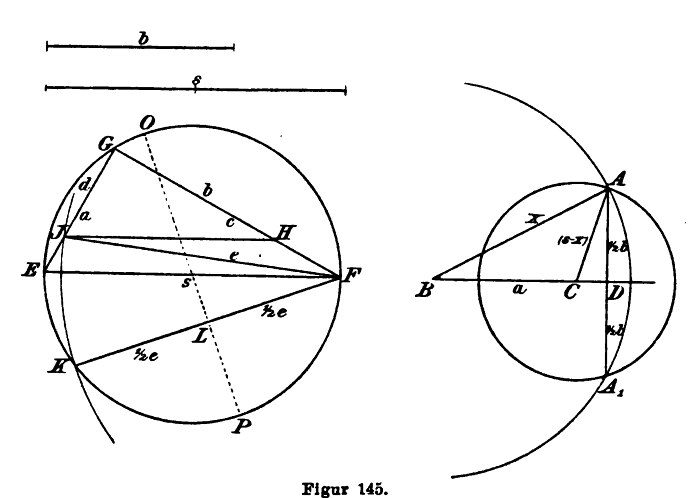
wird nun $$0 = 4c^2x^2 - 4c^2sx + c^4 + a^2b^2$$

oder $$0 = x^2 - sx + \tfrac{1}{4}\left[c^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2\right].$$

Es sei $\frac{ab}{c} = d$ und $c^2 + d^2 = e^2$, also

$$0 = x^2 - sx + (\tfrac{1}{2}e)^2 \quad \text{oder} \quad x(s - x) = (\tfrac{1}{2}e)^2.$$

Da das von x freie Glied das positive Vorzeichen hat, so ist die Aufgabe ein Beispiel für den unter 5) zuerst behandelten Fall, bei welchem in den Kreis vom Durchmesser s die Summe $\tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}e$, also e, als Sehne eingetragen wird.



Figur 145.

Ausführung. In den Kreis vom Durchmesser s trägt man zur Herstellung der eingeführten Linie $c = \sqrt{s^2 - a^2}$ vom Anfangspunkte E des

Durchmessers EF die Strecke $BC = a$ als Sehne EG ein und verbindet ihren Endpunkt G mit F; FG ist c. Auf ihr wird, um $d = \frac{ab}{c}$ zu erhalten, von G aus die für die Gröfse der gemeinsamen Sehne gegebene Strecke b als GH abgetragen; HJ, gleichlaufend mit FE, schneidet GJ von GE als d ab, und die Verbindungslinie JF wird $e = \sqrt{c^2 + d^2}$. Wegen $x(s - x) = \frac{e}{2} \cdot \frac{e}{2}$ wird diese Linie e als Sehne FK in den Kreis eingetragen. Der senkrecht auf FK gezogene Durchmesser OP giebt in seinen Abschnitten LO und LP die gesuchten Halbmesser, mit denen man nun um die Endpunkte B und C der gegebenen Strecke a die verlangten Kreise beschreibt.

Als Probe für die Güte der Zeichnung mifst man die gemeinsame Sehne AA_1 mit dem Zirkel ab zum Vergleiche mit der gegebenen Strecke b. (Beim Zeichnen ist der Halbmesser des kleineren Kreises besonders genau in den Zirkel zu nehmen.)

Abschlufs. Als Summe zweier Seiten des Dreiecks ABC mufs $s > a$ sein. Die Verbindungslinie $JF = e$ darf höchstens gleich dem Durchmesser EF werden. Der Punkt J kommt in E an, wenn JH mit EF zusammenfällt, also wenn b gleich c ist. Mithin lautet die Grenzbedingung der Aufgabe

$$s > a \quad \text{und} \quad b \leqq \sqrt{s^2 - a^2}.$$

Im Grenzfalle werden die Halbmesser der beiden Kreise gleich, jeder $= \frac{1}{2}s$. Dies lehrt: 1) Unter allen paarweise um zwei feste Punkte zu beschreibenden Kreisen, deren Halbmesser zusammen $= s$ sind, haben die beiden gleichen Kreise die gemeinsame Sehne so grofs wie möglich. 2) Unter den gleichschenkligen Vierecken mit derselben Mittellinie und von gleichem Umfange ist das gleichseitige das gröfste. 3) Unter den Dreiecken von gleicher Grundseite und derselben Summe der beiden Nebenseiten ist das gleichschenklige das gröfste.

15. Übungen zu 1 bis 13.

a) Lehrsätze.

1) Die Quadrate über den kleinen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie die Höhenabschnitte der gröfsten Seite.

2) In einer Raute ist die Summe der Quadrate der Eckenlinien gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

3) Die Summe der Quadrate zweier Seiten eines Dreiecks ist gleich dem doppelten Quadrate der Mittellinie der dritten, vermehrt um das halbe Quadrat der dritten Seite.

b) Aufgaben.

4) Wie grofs ist der Inhalt eines gleichschenkligen Vierecks mit den Eckenlinien e und e_1?

5) Von einem Sechseck sind fünf auf einander folgende Seiten a, b, c, d, e in abnehmender Gröfse gegeben, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind rechte. Wie grofs ist sein Inhalt und die sechste Seite?

Seite $x = \sqrt{(a - c + e)^2 + (b - d)^2}$.

6) Drei Kreise mit den Halbmessern r_1, r_2, r_3 berühren sich gegenseitig. Wie grofs ist die von den drei Achsen umschlossene Fläche, wenn die sich von

aufsen berührenden Kreise r_2 und r_3 den Kreis r_1 1) von aufsen und 2) von innen berühren?

Antwort: 1) $$F = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3) \cdot r_1 r_2 r_3}.$$
2) $$F(-r_2, -r_3) = \sqrt{(r_1 - r_2 - r_3) \cdot r_1 r_2 r_3}.$$

7) Von einem Trapeze sind die Hauptseiten a und b, sowie die Höhe h, gegeben. Man soll durch diese Gröfsen die Flächeninhalte der beiden Teile angeben, in welche die Mittellinie das Trapez zerlegt. Wie grofs ist der Unterschied der beiden Teile?

$$T_b = \tfrac{1}{8}(a + 3b)h; \quad T_a - T_b = \tfrac{1}{4}(a - b)h.$$

8) Den Inhalt eines Dreiecks durch den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises ϱ und durch den halben Umfang s anzugeben und damit ϱ durch die Seiten zu bestimmen. Beispiel: Das Dreieck mit den Mafszahlen der Seiten 13, 14, 15. [Man verbinde den Mittelpunkt mit den drei Eckpunkten.]

$$\triangle = \varrho s. \qquad \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \qquad \varrho = 4.$$

9) In der Inhaltsformel für das Dreieck die Höhe h durch den von ihrem Anfangspunkte ausgehenden Durchmesser $2r$ des umbeschriebenen Kreises und durch Seiten zu ersetzen, und dann r durch die Seiten zu bestimmen. Beispiel: Das Dreieck mit den Mafszahlen der Seiten 13, 14, 15.

$$\triangle = \frac{abc}{4r}. \qquad r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}. \qquad r = 8\tfrac{1}{8}.$$

10) Wie grofs ist der durch die Seiten ausgedrückte Inhalt eines Sehnenvierecks, in welches sich ein Kreis beschreiben läfst? Prüfung der Formel an einem gleichschenkligen Viereck, dessen gleiche Winkel rechte sind. [**12**, 8.]

$$J = \sqrt{abcd}.$$

---

11) Der Inhalt eines gleichseitigen Vierecks ist 120 qcm, und eine Eckenlinie 10 cm. Wie lang ist die andere und jede Seite des Vierecks?

12) Den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus den Höhenabschnitten 2,8 und 17,5 cm zu berechnen. ($J = 71{,}05$ qcm.)

13) Die gröfste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist 136,9 und ein Höhenabschnitt derselben 14,4 cm. Welchen Inhalt hat das Dreieck? ($J = 2\,874{,}9$ qcm.)

14) Den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen aus der gröfsten Seite $c = 39\tfrac{1}{4}$ und einer andern Seite $a = 33$ cm. ($J = 350\tfrac{5}{8}$ qcm.)

15) Eine kleine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist 2,9 cm und der anliegende Höhenabschnitt 2 cm. Wie grofs ist der Inhalt des Dreiecks? ($J = 4{,}41\,525$ qcm.)

16) Den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen aus der Höhe $h = 8$ und einer kleinen Seite $a = 17$ cm. ($J = 77\tfrac{1}{15}$ qcm.)

---

17) Wie lang ist die von der Mitte der Quadratseite a auf eine Eckenlinie gefällte Senkrechte? ($x = 0{,}35\,355\,a$.)

18) Wie grofs ist der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks von 12 cm Umfang? ($J = 6{,}9282$ qcm.)

19) Die Höhe eines regelmäfsigen Sechsecks (der kleine Durchmesser) ist h. Wie grofs ist sein Inhalt? ($J = \tfrac{1}{2} h^2 \sqrt{3}$.)

20) Aus dem 3 qcm grofsen Inhalte eines gleichseitigen Dreiecks die Seite zu berechnen. ($a = 2{,}632$ cm.)

21) Den Inhalt eines Quadrates aus der Summe s der Eckenlinie und Seite zu berechnen. ($J = 0{,}17\,157 s^2$.)

22) Den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Summe s der Seite und Höhe zu bestimmen. ($J = (7\sqrt{3} - 12) s^2 = 0{,}12\,435 s^2$.)

---

23) Unter welcher Bedingung ist ein Rechteck seiner Hälfte ähnlich?

Antwort: Es mufs ein Rechteck schönster Form sein, weil seine Seiten sich verhalten, wie Seite und Eckenlinie eines Quadrats.

24) Den dritten Teil eines Rechtecks als ein ihm ähnliches abzugrenzen durch zwei den anstofsenden Seiten gleichgerichtete Gerade.

25) Eine Eckenlinie des Quadrats mit der Seite a ist in drei gleiche Abschnitte geteilt und durch die beiden Teilpunkte sind, senkrecht zur Eckenlinie, gerade Linien hindurch gelegt. Wie grofs ist das Mittelstück des Quadrats?

26) Welche Bruchteile eines Dreiecks entstehen, wenn man eine Seite in 5 gleiche Strecken zerlegt und durch die Teilpunkte Linien in Richtung einer andern Seite hindurchzieht? Läfst sich eine Linie zeichnen, welche den fortschreitenden Zuwachs der Teile erkennen läfst?

27) Ein gegebenes Dreieck durch gerade Linien, welche der Grundseite gleichgerichtet sind, in 5 gleiche Teile zu zerlegen.

---

28) Mit Benutzung des Satzes, dafs die Quadrate über den kleinen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sich wie die Höhenabschnitte der gröfsten Seite verhalten, soll man eine gegebene Strecke s so teilen, dafs die Quadrate der Teile sich wie $p : q$ verhalten.

29) Die drei Seiten eines Dreiecks sind in derselben Ordnung nach dem Verhältnis $p : q$ (3 : 1) geteilt, und die drei Teilpunkte sind mit einander verbunden. Welchen Bruchteil des ganzen nimmt das innere Dreieck ein? (**21**, 9.) [Man zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck.]

$$J = \frac{p^2 - pq + q^2}{(p + q)^2} \triangle.$$

(In dem Ergebnis für das Dreieck, dessen Spitzen die äufseren Teilpunkte sind, erscheint q mit dem umgekehrten Vorzeichen.)

30) Den Ort der gemeinsamen Spitze paarweise gleicher Dreiecke zu finden, deren Grundseiten die Strecken a und b sind, welche verlängert sich schneiden. (Zwei Gerade.)

---

16. Übungen zur Aufgabenlösung mittels Rechnung. (**21**, 14.)

a) unmittelbar durch die Formeln in **21**, 14, 2).

1) Das Quadrat mit der Seite a in ein gleichschenkliges Dreieck zu verwandeln, dessen Grundseite und Höhe gleich sind.

2) Es sind drei Strecken a, b und c gegeben. Man soll c so teilen, dafs das Rechteck aus a und dem einen Stück gleich dem Rechteck aus b und dem andern Stück ist.

3) Durch ein gegebenes Dreieck in Richtung einer Seite eine Gerade so zu legen, dafs der untere Abschnitt der einen Seite dem oberen der andern gleich wird.

4) Auf einer Geraden sind hinter einander die Punkte A, B, C gegeben durch ihre Abstände $AB = p$, $BC = q$, und zwar ist $p > q$. Man soll in der

Verlängerung über C hinaus einen Punkt X so bestimmen, dafs XA, XB, XC Glieder einer stetigen Verhältnisgleichung werden.

5) Ein Dreieck zu zeichnen, von dem gegeben sind die Höhenabschnitte p und q der Grundseite und die Summe s der beiden andern Seiten.

6) Einem gegebenen Dreiecke ein Rechteck einzuzeichnen, dessen anstofsende Seiten im Verhältnis $p : q$ stehen.

7) Zwischen zwei Seiten eines Dreiecks eine Gerade hinüber zu ziehen, so dafs ein Sehnenviereck abgeschnitten wird und die beiden Teile des Dreiecks gleiche Umfänge haben.

8) Auf einer geraden Linie sind vier Punkte durch die auf einander folgenden Abstände a, b und c gegeben. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden, dessen Seiten durch die vier Punkte gehen. (Zur Vorbereitung lege man durch die Verlängerungen der Seiten eines Quadrates eine Gerade und bestimme eine kleine Seite des rechtwinkligen Dreiecks über der mittleren Strecke b durch die herzustellenden rechtwinkligen Dreiecke über a und über c.)

$$\text{Entweder } \frac{ab}{\sqrt{a^2 + c^2}} \text{ oder } \frac{bc}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

---

9) Einem Kreise mit dem Durchmesser $2r$ ist ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben. Man soll eine Sehne in Richtung einer Seite desselben so ziehen, dafs sie von den beiden andern Seiten in drei gleiche Stücke zerlegt wird. (**16**, 6, 1.)

10) In einem Halbkreise sind über den Hälften seines Durchmessers Halbkreise gezeichnet. Man soll den Kreis beschreiben, welcher die drei Halbkreise berührt.

11) Über der Strecke a und über ihrer Hälfte sind Halbkreise nach derselben Seite gezeichnet. Man soll den Kreis beschreiben, welcher beide Halbkreise und die Strecke berührt. (Für die Figur $a = 9$ cm.)

---

12) Durch einen gegebenen Kreis von einem aufserhalb gegebenen Punkte eine Gerade so zu ziehen, dafs ihr äufserer Teil dem im Kreise liegenden gleich ist.

13) Zu einem gegebenen Dreieck ein ihm ähnliches von doppelter Gröfse zu zeichnen.

14) Man bestimme in der zur Grundseite gehörigen Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln b den Punkt, von welchem auf die drei Seiten Senkrechte zu fällen sind, um das Dreieck in drei gleiche Teile zu zerlegen. (Man lasse schliefslich bei unveränderter Schenkellänge die Grundseite wachsen.)

15) Ein gegebenes Dreieck durch eine in vorgeschriebener Richtung laufende gerade Linie zu halbieren. (Man gebe die Richtung an durch eine von der Spitze durch das Dreieck gehende Gerade.) [**21**, 9.]

---

16) Die Ecken eines Quadrates so abzustumpfen, dafs ein regelmäfsiges Achteck entsteht. (Der negative Wert von x fordert Erweiterung des Wortlautes der Aufgabe.)

17) In ein Quadrat fünf gleiche Kreise zu zeichnen, so dafs von vieren jeder zwei anstofsende Seiten des Quadrats und den in der Mitte liegenden fünften Kreis berührt.

18) Ein gegebenes Trapez durch eine den Hauptseiten gleichlaufende Gerade x

so zu teilen, dafs die Teile den Dreiecken gleich werden, welche eine Eckenlinie giebt; und zwar, wenn das Viereck an der Hauptseite a 1) dem auf a stehenden Dreiecke oder 2) dem mit der Grundseite b gleich sein soll.

19) Ein gegebenes Trapez durch eine in Richtung der Hauptseiten laufende Gerade zu halbieren. (Man nehme die Halbierende als Unbekannte und ziehe eine Hilfslinie in Richtung einer Nebenseite.)

20) Zur Herstellung eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben die Unterschiede d und e zwischen der gröfsten Seite und jeder kleinen. Man bezeichne die gröfste Seite mit $d + x + e$.

21) Zur Herstellung eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben die Summen s und t der gröfsten Seite und jeder kleinen. Man bezeichne den Umfang des Dreiecks mit x.

---

22) Über einer Seite eines gegebenen Dreiecks ein Rechteck zu zeichnen, welches gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ist.

23) Ein Quadrat in ein gerades Trapez zu verwandeln, von welchem die beiden Hauptseiten gegeben sind.

24) In ein gegebenes Rechteck ein gleichseitiges Viereck so zu beschreiben, dafs von zwei Gegenecken des Rechtecks gleichschenklige Dreiecke abgeschnitten werden.

25) Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus der Höhe h und dem Umfange $2s$.

---

26) Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Seiten sich wie $p : q$ verhalten.

27) Durch den Berührungspunkt zweier Kreise mit den Durchmessern d und d_1 eine Gerade zu legen, dafs das Rechteck aus den entstehenden Sehnen einem gegebenen Quadrate a^2 gleich wird.

28) Ein gleichschenkliges Dreieck aus den beiden Höhen herzustellen.

29) Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

30) In ein gegebenes Dreieck dasjenige Trapez vom Inhalte f^2 zu beschreiben, dessen Eckenlinien den Nebenseiten des Dreiecks gleichgerichtet sind. Die Höhe des Trapezes, welche gröfser als die halbe Dreieckshöhe sein mufs, ist zu bestimmen.

$$\left[y = \sqrt{\frac{2hf^2}{a}}, \text{ wo } {}^1/_4 \triangle < f^2 < \triangle \text{ sein mufs.}\right]$$

31) Ein rechtwinkliges Dreieck aus den Mittellinien m und m_1 der kleinen Seiten herzustellen. (Zur Vermeidung beschwerlicher Teilung multipliziere und dividiere man den Schlufsausdruck mit einer der gegebenen Strecken und benutze die 4. Formel.)

---

32) Ein Quadrat in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

33) Den Kreis zu finden, für welchen der Unterschied des umbeschriebenen und einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks gleich d^2 ist. [$x = {}^2/_3\, d \sqrt[4]{{}^1/_3}$. Zur Ausführung beschreibe man den Kreis mit d als Durchmesser. Die Zeichnung mufs x fast genau gleich ${}^1/_2\, d$ liefern; denn die Rechnung giebt $x = 0{,}50\,656\,d$, so dafs schon der zuerst beschriebene Kreis den gesuchten gut darstellt.]

---

34) In einen Kreis vom Durchmesser d ein Rechteck mit dem Inhalte f^2 zu beschreiben. (Man verschaffe sich x mittels $x + y$ und $x - y$.) Welches ist das gröfste Rechteck im Kreise?

35) In einen Kreis vom Durchmesser d ein Rechteck zu beschreiben, von welchem der Umfang $2s$ gegeben ist. (Man berechne $x - y$.) Unter den Rechtecken mit gleicher Eckenlinie hat welches den gröfsten Umfang?

36) Über der Strecke c als gröfster Seite das rechtwinklige Dreieck zu zeichnen, in welchem das Rechteck aus den kleinen Seiten dem Quadrate ihres Unterschiedes gleich ist. (Aus den Ansatzgleichungen stelle man zunächst eine Gleichung für $(x - y)^2$ her und bestimme dann auch $x + y$.)

---

b) Zeichnung nach der geordneten Gleichung 2. Grades. (**21**, 14, 5.)

37) Das Rechteck zu zeichnen, welches den Umfang $2s$ und den Inhalt f^2 besitzt. (Beim Abschlufs sind nach der Hilfsfigur die Fragen zu beantworten: Welches von allen Rechtecken mit gegebenem Umfang hat den gröfsten Inhalt? Welches von allen Rechtecken mit gegebenem Inhalt hat den kleinsten Umfang?)

38) Ein gegebenes Rechteck in ein anderes zu verwandeln, von welchem der Unterschied u zweier anstofsenden Seiten gegeben ist.

39) Für eine Gerade a einen Teilpunkt so zu bestimmen, dafs das Quadrat über dem einen Abschnitt das Doppelte des Quadrates über dem andern ist. (Probe für die Güte der Figur bei beiden Teilpunkten mittels der Eckenlinie des kleineren Quadrates.)

---

40) Eine gegebene Sehne eines Kreises so weit zu verlängern, dafs die von dort aus an den Kreis zu legende Berührungslinie gleich der Sehne wird. [Der negative Wert geht von demselben Ausgangspunkte ab in entgegengesetzter Richtung.]

41) Von einem Endpunkte des Durchmessers d nach der im andern Endpunkte auf ihm errichteten Senkrechten eine Gerade so durch den Kreis zu ziehen, dafs ihr äufserer Abschnitt gleich der gegebenen Strecke a wird. [Die Schneidende und ihre Sehne befinden sich zusammen in derselben Gleichung.]

42) Das rechtwinklige Dreieck mit der gröfsten Seite c zu zeichnen, dessen Seiten eine stetige Verhältnisgleichung geben.

43) Über der Strecke c, als der gröfsten Seite, das rechtwinklige Dreieck zu zeichnen, in welchem eine kleine Seite gleich dem zur andern gehörigen Höhenabschnitt ist.

44) Einen Kreis zu beschreiben, welcher die eine von zwei sich schneidenden Geraden in einem bestimmten Punkte berührt und von der andern eine Sehne von gegebener Länge abschneidet. [Die beiden Werte von x treten in den verlangten Kreisen in derselben Weise auf, wie beim Hilfskreise.]

45) Ein rechtwinkliges Dreieck mittels der zu bestimmenden gröfsten Seite zu zeichnen aus der Höhe h und der Summe s der kleinen Seiten. [Damit h in den Halbkreis über z eingetragen werden könne, mufs $s \geqq 2h\sqrt{2}$ sein.]

---

46) Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus der Summe der gröfsten und kleinsten Seite und dem Unterschiede der mittleren und kleinsten.

47) Von der Spitze eines gleichseitigen Dreiecks nach der Grundseite (oder deren Verlängerung) eine Gerade zu ziehen, welche sich zu einem der entstehenden Abschnitte dieser Seite verhält, wie die Dreieckseite zur Höhe. [Auch die negative Wurzel der Gleichung hat Bedeutung. Zur Probe für die Güte der Zeichnung kann man über der nach dem äufseren Teilpunkte gehenden Geraden ein gleich-

seitiges Dreieck beschreiben; dessen Höhe mufs $= x_2$ werden. Wer die gelöste Gleichung zu weit umständlicherer Darstellung benutzen will, wird das Ergebnis umschreiben in $x = -\,{}^3/_2\,a \pm \sqrt{({}^5/_2\,a)^2 - a^2}$.]

48) Auf der gröfsten Seite c eines rechtwinkligen Dreiecks eine Senkrechte zu errichten, so dafs das Rechteck aus den Abständen ihres Fufspunktes von den Schnittpunkten mit der einen kleinen Seite und mit der Verlängerung der andern einem gegebenen Rechtecke gleich wird. (Man nehme einen Abschnitt von c als x, und ziehe zuletzt einen Schlufs daraus, dafs in dem Endausdruck für x vom rechtwinkligen Dreieck kein anderes Bestimmungsstück, als c, vorkommt.) [Die Güte der Zeichnung kann mit den Seiten des gegebenen Rechtecks geprüft werden.]

---

c) Zeichnung nach den Ergebnissen der Gleichung 2. Grades.

49) Eine Strecke a so in zwei Abschnitte zu teilen, dafs das Rechteck aus den Abschnitten gleich dem Quadrate über ihrem Unterschiede ist.

50) Durch den Mittelpunkt eines Rechtecks von sehr ungleichen anstofsenden Seiten eine Gerade so zu ziehen, dafs sie von jeder der längeren Seiten eine Strecke abgrenzt, die ihr gleich ist. [Es mufs sein $a \geqq b\sqrt{3}$.]

51) Zur Herstellung eines Trapezes sind die Höhe und eine Hauptseite gegeben; die drei andern Seiten sollen gleich grofs werden.*)

52) Zwei sich schneidende Kreise, beide vom Halbmesser r, haben den Mittelpunktsabstand a. Man soll ein Quadrat beschreiben, dessen Mittelpunkt die Mitte von a ist und welches auf jedem der beiden Kreise zwei Eckpunkte hat. (Für die sehr sorgfältig zu zeichnende Figur $a = 2$ und $r = 3$ cm.) [Wenn $r > {}^1/_2\,a$ ist, giebt es stets zwei verlangte Quadrate.]

---

53) In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck vom Inhalte f^2 zu beschreiben.

54) In ein gegebenes Quadrat ein Rechteck vom Inhalte f^2 zu beschreiben.

55) Ein gegebenes Dreieck durch eine Gerade in zwei Stücke von gleichem Inhalt und Umfang zu teilen. (**21**, 9.)

56) In ein gleichseitiges Dreieck ein halbsogrofses gleichseitiges Dreieck zu beschreiben. (**21**, 9.)

57) Im Abstande a vom Anfangspunkte eines Kreisdurchmessers d steht eine Sehne senkrecht auf ihm. Man soll vom Anfangspunkte aus eine Sehne so ziehen, dafs ihr hinter der gegebenen Sehne liegender Abschnitt gleich einer gegebenen Strecke s ist.

---

*) Man denke sich drei Drähte, an den Enden zu Ösen umgebogen und dadurch zusammengehakt, jeden von der Länge x_2, und zum Schliefsen der Kette einen Draht von der Länge der gegebenen Hauptseite a. Nun stelle man sich vor, dafs man den mittleren Draht x in seiner Mitte erfafst und, während a festgehalten wird, wende man ihn, so dafs seine Endpunkte, aus der Ebene des Trapezes heraustretend, Halbkreise beschreiben und so die Plätze wechseln. Infolge dieser Wendung kreuzen sich nun die beiden Nebenseiten x und es ist ein „überschlagenes" Trapez von der vorgeschriebenen Höhe h entstanden, in welchem die Gegenseite von a, im Vergleich mit dem durch x_1 erhaltenen Trapeze, die entgegengesetzte Richtung erhalten hat, wie es das negative Vorzeichen von x_2 vorschrieb. Beim Zeichnen der beiden Trapeze wird man h auf a errichten, durch den Endpunkt die mit a gleichlaufende Gerade ziehen und in ihr von den Endpunkten der Grundseite a aus mittels der Nebenseiten x die beiden andern Eckpunkte des Trapezes markieren. Die so abgesteckte Strecke mufs sich $= x$ erweisen, auch beim überschlagenen Trapez, welches also auch den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

58) Durch die Höhe auf der gröfsten Seite c das rechtwinklige Dreieck herzustellen, in welchem der Unterschied der kleinen Seiten gleich der Höhe ist.

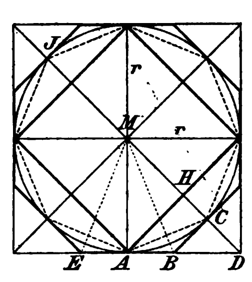
59) Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt eine Sehne zu ziehen, so dafs sie in diesem Punkte nach dem goldenen Schnitte geteilt wird.

60) Über $2a$ als Grundseite ein gleichschenkliges Dreieck herzustellen, so dafs $2a$ Mittelglied zwischen Schenkel und Höhe ist.

22. Glied. Ausmessung regelmäfsiger Vielecke und des Kreises.

1. Die um- und in den Kreis vom Halbmesser r beschriebenen regelmäfsigen Vier- und Achtecke.

Das Zeichnen derselben ist, von zwei auf einander senkrecht stehenden Durchmessern ausgehend, leicht anzugeben. (**12**, 10 und 14 mit Zs.) — Aus dem grofsen Quadrate geht durch Abstumpfen der Ecken das umbeschriebene Achteck hervor. Jeder Winkel desselben ist $1^1/_2$ Rechte. Das Viereck $MABC$ ist gleichschenklig; seine Mittellinie MB macht $\angle AMB = {}^1/_4$ R. Dadurch stimmt $\triangle AME \cong AMB$ (1. Satz) und es ist $EA = AB = BC$. Daher sind auch die Seiten des grofsen Achtecks gleich; also ist es ein regelmäfsiges.



Figur 146.

Wir bezeichnen die Seite eines einbeschriebenen regelmäfsigen Vielecks mit s, die eines umbeschriebenen mit S; den Flächeninhalt eines umbeschriebenen mit F, den eines einbeschriebenen mit f und fügen diesen Buchstaben die Anzahl der Seiten als Zeiger bei.

Es ist die Seite des umbeschriebenen regelmäfsigen Vierecks $S_4 = 2r$, sein Flächeninhalt $F_4 = 4r^2$;
der des einbeschriebenen ist die Hälfte davon, $f_4 = 2r^2$
also die Seite des einbeschriebenen Quadrates

$$s_4 = r\sqrt{2} = 1{,}414\, r.^{*)}$$

Aus den Werten f_4 und F_4 ist zu ersehen, dafs der Flächeninhalt des Kreises gröfser ist als zwei r^2 und kleiner als vier r^2, also wahrscheinlich etwa drei r^2 betragen wird.

Ferner ist $CD = MD - MC = r\sqrt{2} - r$,
also $BC = CD = (\sqrt{2} - 1)\, r$ und

$$S_8 = 2\,(\sqrt{2} - 1)\, r = 0{,}828\, r$$

und nach der Formel $J = {}^1/_2\, u\varrho$ (**21**, 8)

$$F_8 = 8\,(\sqrt{2} - 1)\, r^2 = 3{,}314\, r^2.$$

Es giebt $MH = {}^1/_2\, MD = {}^1/_2\, r\sqrt{2}$

$$CH = r - {}^1/_2\, r\sqrt{2}$$

*) Der oft vorkommende Zahlenwert $\sqrt{2} = 1{,}4\,14\,21\,35$ ist leicht zu behalten durch die Produkte $2 \cdot 7$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 7$, $5 \cdot 7$; dabei ist die Stellung des Kommas selbstverständlich.

also (nach **16**, 6, 2) $AC^2 = CJ \cdot CH = 2r\,(r - {}^1/_2\, r\sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})\, r^2$

$$s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0{,}765\, r \quad \text{(wenig über } {}^3/_4\, r)$$

und $\triangle\ AMC = {}^1/_2\, MC \cdot AH = {}^1/_2\, r \cdot {}^1/_2\, r\sqrt{2} = {}^1/_4\, r^2\sqrt{2}$

bringt $f_8 = 2r^2\sqrt{2} = 2{,}828\, r^2$.

Anmerk. Durch fortgesetztes Halbieren der Bogen (mittels Halbieren des auf ihm stehenden Winkels am Mittelpunkte) bekommt man die um und in den Kreis beschriebenen regelmäfsigen Vielecke von 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ... 2^k Seiten, wo k jede ganze Zahl von 2 bis ins Unendliche bezeichnet.

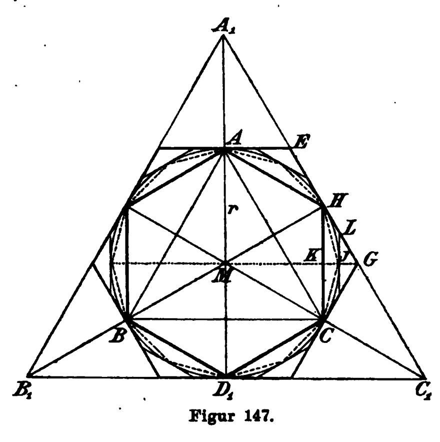
2. Sechseck, Dreieck und Zwölfeck. Hier ist beim Zeichnen mit dem einbeschriebenen Sechseck anzufangen. (**12**, 11, Zs.) Nach **12**, **14** liegen die Eckpunkte des umbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks auf den Verlängerungen der Halbmesser MA, MB, MC. Da M Schwerpunkt der gleichseitigen Dreiecke ist, wird

$$A_1M = 2\,MD_1 = 2r,$$

also $A_1A = r.$

Es ist $s_6 = r$ und (nach **21**, 6, 2)

$$f_6 = {}^3/_2\, r^2\sqrt{3} = 2{,}598\, r^2.$$



Figur 147.

Das einbeschriebene Dreieck ist halb so grofs

$$f_3 = {}^3/_4\, r^2\sqrt{3} = 1{,}299\, r^2.$$

Da dies auch sein mufs ${}^1/_4\, s_3^2\sqrt{3}$, so folgt $s_3^2 = 3r^2$

$$s_3 = r\sqrt{3} = 1{,}732\, r$$

und S_3 ist doppelt so grofs

$$S_3 = 2r\sqrt{3} = 3{,}464\, r$$

und deshalb F_3 das Vierfache von f_3 (**21**, 10)

$$F_3 = 3r^2\sqrt{3} = 5{,}196\, r^2$$

und da A_1A nur ${}^1/_3\, A_1D_1$ ist, wird $A_1E = {}^1/_3\, A_1C_1$ und ebenso C_1G, also bleibt für EG das letzte Drittel von S_3

$$S_6 = {}^2/_3\, r\sqrt{3} = 1{,}155\, r.$$

Deshalb fällt an jeder Ecke ${}^1/_9\, F_3$ ab und läfst für F_6 ${}^2/_3\, F_3$

$$F_6 = 2r^2\sqrt{3} = 3{,}464\, r^2.$$

Vom einbeschriebenen regelmäfsigen Zwölfeck ist der Inhalt des Bestimmungsdreiecks $MJH = {}^1/_2\, MJ \cdot HK = {}^1/_2\, r \cdot {}^1/_2\, r = {}^1/_4\, r^2$,

also $f_{12} = 3r^2.$

Der Flächeninhalt des Kreises ist daher nur wenig gröfser als drei r^2.

Die Höhe MK ist ${}^1/_2\, r\sqrt{3}$, also $JK = r - {}^1/_2\, r\sqrt{3}$ und daher

$$HJ^2 = 2r \cdot JK = 2r^2 - r^2\sqrt{3}$$

$s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Das doppelte Wurzelausziehen ist unbequem und hier zu vermeiden. Es ist nämlich

$$2 - \sqrt{3} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}$$

also $s_{12} = r\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ oder, mit $\sqrt{2}$ erweitert,

$$s_{12} = {}^1/_2(\sqrt{6} - \sqrt{2})r = 0{,}518\,r.$$

Endlich ist $\triangle\ LJG$ durch seine Winkel ein halbes gleichseitiges Dreieck; $LG = 2\,JG$, $LJ^2 = 3\,JG^2$, also ${}^1/_2\,S_{12} = JG\sqrt{3}$. Als grofser Halbmesser eines regelmäfsigen Sechsecks ist

$MG = S_6 = {}^2/_3\,r\sqrt{3}$, daher $JG = MG - r = ({}^2/_3\sqrt{3} - 1)\,r$

und mithin $S_{12} = 2\,JG\sqrt{3}$

$$S_{12} = 2\,(2 - \sqrt{3})\,r = 0{,}536\,r$$

und $F_{12} = 12\,(2 - \sqrt{3})\,r^2 = 3{,}215\,r^2$.

Anmerk. Durch fortgesetztes Halbieren der Bogen gehen hieraus hervor die regelmäfsigen Vielecke von 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536 ..... $2^k \cdot 3$ Seiten, also unzählig viele Paare von in und um den Kreis beschriebenen regelmäfsigen Vielecken.

3. Aufgabe. **In einen Kreis ein regelmäfsiges Zehneck zu beschreiben.**

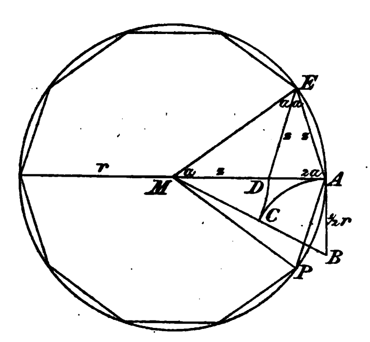
Vorbereitung. Im Bestimmungsdreiecke des regelmäfsigen Zehnecks ist der Winkel am Mittelpunkte der zehnte Teil von 4 Rechten, also ${}^2/_5$ Rechte, deshalb jeder Grundwinkel ${}^4/_5$ R, das Doppelte von dem an der Spitze. Die Halbierungslinie ED eines dieser Grundwinkel zerlegt also das Bestimmungsdreieck AME in zwei gleichschenklige Dreiecke, von denen das eine dem ganzen ähnlich ist (1. Satz). Daher

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AM} \text{ oder } AD : DM = DM : AM$$

Figur 148.

also teilt die Winkelhalbierende den Halbmesser in D stetig und der gröfsere Abschnitt ist gleich der Zehnecksseite.

Ausführung. Man teile einen Halbmesser MA nach dem goldenen Schnitte (**20**, 3), trage den gröfseren Abschnitt DM als Sehne von A aus neunmal hinter einander in den Kreis ein und verbinde den letzten Punkt P mit dem Ausgangspunkte A. Das entstandene Zehneck ist regelmäfsig.



Figur 149.

Bw. Man verbinde den Teilpunkt D mit dem Endpunkte E der ersten Seite. Nach Zeichnung verhält sich

$$AD : DM = DM : AM,$$

also ist auch $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AE}{AM}$,

dazu $\angle\ DAE = MAE$,

macht $\triangle\ DAE \sim AEM$ (**19**, 4),

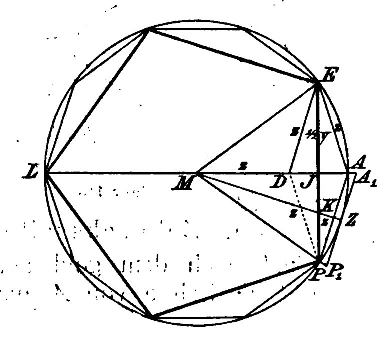
also ist $\angle\ DEA = EMA = \alpha$. $\triangle\ AME$ ist gleichschenklig, mithin das ihm ähnliche Dreieck auch: $DE = AE$, also wurde auch $DE = DM$; daher ist im gleichschenkligen Dreieck DEM $\angle\ DEM = \alpha$; endlich $\angle\ MAE = MEA = 2\alpha$. Die Summe der Winkel des Dreiecks AME ist $5\alpha = 2$ R, folglich $\alpha = {}^2/_5$ R. Die Halbmesser nach den Endpunkten der neun Sehnen liefern bei M

$9\alpha = {}^{18}/_5$ R; daher bleiben von 4 R um *M* für den Winkel *PMA* $^2/_5$ R; er wird also $= \alpha = \angle AME$; mithin ist die Verbindungslinie *PA* den 9 Sehnen gleich; das Zehneck ist gleichseitig. Weil jeder seiner Winkel auf 8 Zehnteln des Kreises steht, sind auch die Winkel gleich. Das Zehneck ist das verlangte regelmäſsige.

Anmerk. 1. Ein um den Kreis beschriebenes regelmäſsiges Zehneck kann nun leicht gezeichnet werden. Aus dem Zehneck geht hervor eine dritte unendliche Reihe von Vieleckspaaren, deren Seitenzahlen sind 5, 20, 40, 80, 160, ... $2^k \cdot 5$.

Anmerk. 2. Trägt man in den Kreis von einem seiner Punkte aus nach derselben Seite ein die Seite des regelmäſsigen Sechsecks und Zehnecks, so ist die ihre Endpunkte verbindende Sehne die Seite des regelmäſsigen Fünfzehnecks im Kreise. Denn der Bogen zwischen den Endpunkten ist $^1/_6 - {}^1/_{10} = {}^1/_{15}$ des Kreises. Das Fünfzehneck liefert die vierte unendliche Reihe regelmäſsiger Vielecke mit 30, 60, 120, 240 .... $2^k \cdot 15$ Seiten.*)

4. Aufgabe. Für das ein- und umbeschriebene regelmäſsige Zehneck die Seite und den Inhalt zu berechnen.



Figur 150.

Ausführung. Aus dem Dreieck *MAB* der vorigen Figur hat man

$$z + {}^1/_2 r = \sqrt{r^2 + {}^1/_4 r^2}$$

also ist die Seite des einbeschriebenen Zehnecks

$$z = {}^1/_2 (\sqrt{5} - 1) r = 0{,}618\, r.$$

Zieht man noch *DP*, so hat man das gleichseitige Viereck *DEAP*, in welchem $EP = y$ die Seite des einbeschriebenen regelmäſsigen Fünfecks ist. $\triangle$ *AEJ* giebt

$$({}^1/_2 y)^2 + \left(\frac{r - z}{2}\right)^2 = z^2,$$

oder durch Beseitigen der Nenner

$$1) \quad y^2 + (r - z)^2 = 4 z^2$$

und die Sehne *AE* (16, 6, 2) liefert $AE^2 = AL \cdot AJ$, $z^2 = 2 r \cdot \frac{r - z}{2}$

also $$2) \quad 2 z^2 = 2 r (r - z).$$

*) Mit der so bestimmten Seite wird man das regelmäſsige Fünfzehneck nicht zeichnen. Denn wenn man diese kleine Sehne 14mal im Kreise rings herum abträgt, würde bei nur geringer Ungenauigkeit der Zirkelspannung zuletzt eine recht merkliche Abweichung hervortreten. Dasselbe gilt vom regelmäſsigen 17-Eck, dessen Herstellbarkeit Gauſs 1796 fand. Bei diesen wird man die Zeichnung ebenso machen, wie bei den hier nicht genannten regelmäſsigen Vielecken (deren genaue Herstellung mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Geraden und Kreisen nicht ausführbar ist) durch Benutzung des in 180° geteilten Winkelmessers, nach Berechnung des Mittelpunktswinkels im Bestimmungsdreiecke. Dieser ist für das regelmäſsige Neuneck 40°. Man markiert also bei dem im gegebenen Kreismittelpunkte angelegten Gradbogen bei 0°, 40°, 80°, 120°, 160° und, nach Wenden des Winkelmessers, vom Anfangspunkte aus ebenso nach der andern Seite herum. Für das regelmäſsige Siebeneck mit Abrundung der Brüche bei $51^3/_7{}^\circ$ (es wäre $^3/_6 = {}^1/_2$), $102^6/_7{}^\circ$, $154^2/_7{}^\circ$ und ebenso in entgegengesetzter Richtung.

Die Summe der Gleichungen 1) und 2) wird

$$3)\ y^2 = r^2 + z^2$$

und dies lehrt: in einem Kreise ist das Quadrat der Seite des regelmäfsigen Fünfecks gleich der Summe der Quadrate der Seite des regelmäfsigen Sechsecks und Zehnecks. Bildet man aus diesen Seiten ein Dreieck, so wird dasselbe rechtwinklig. (Vergl. **16**, 8, 10.)

Einsetzen des Wertes von z in 3) ergiebt die Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen Fünfecks

$$4)\ y = \tfrac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 1{,}176 r.$$

Durch ihre Hälfte hat man den Inhalt des einbeschriebenen regelmäfsigen Zehnecks $= 10 \cdot \tfrac{1}{2} r \cdot \tfrac{1}{2} y$, das ist

$$f_{10} = \tfrac{5}{4} r^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2{,}939 r^2.$$

Zur Bestimmung der Seite des umbeschriebenen regelmäfsigen Zehnecks, $A_1P_1 = Z$, hat man

$$\frac{Z}{z} = \frac{r}{MK}$$

und da $\triangle\ MKA \sim AEJ$ ist, $\dfrac{r}{MK} = \dfrac{z}{\tfrac{1}{2} y}$, also $\dfrac{Z}{z} = \dfrac{z}{\tfrac{1}{2} y}$

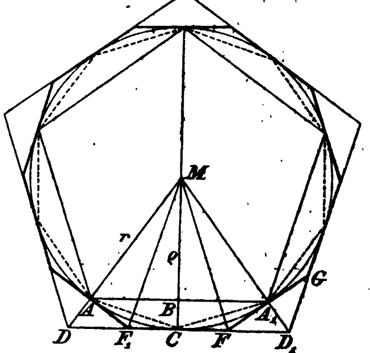
$$Z = \frac{z^2}{\tfrac{1}{2} y} = \frac{\tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 r^2}{\tfrac{1}{4} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = r \sqrt{\frac{(\sqrt{5} - 1)^4}{2\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 1)}} = r \sqrt{\frac{(\sqrt{5} - 1)^3}{2\sqrt{5}}}$$

$$Z = 2r \sqrt{1 - 0{,}4\sqrt{5}} = 0{,}650 r$$

und der Inhalt ist $F_{10} = 10 r^2 \sqrt{1 - 0{,}4\sqrt{5}} = 3{,}249 r^2$.

5. Aufgabe. Aus den umgekehrten Werten der Umfänge des einbeschriebenen und des umbeschriebenen regelmäfsigen Vielecks von n Seiten die umgekehrten Werte der Umfänge des um- und einbeschriebenen regelmäfsigen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu bestimmen.

Ausführung. Es sei AA_1 eine Seite des dem Kreise vom Halbmesser r einbeschriebenen und DD_1 die ihr gleichlaufende Seite des umbeschriebenen regelmäfsigen Vielecks von n Seiten; AC und CA_1 sind Seiten des einbeschriebenen $2n$-Ecks. Um eine Seite des umbeschriebenen $2n$-Ecks auf der Seite DD_1 zu erhalten, werden die Winkel CMD und CMD_1 halbiert; dann ist F_1F eine Seite des umbeschriebenen regelmäfsigen $2n$-Ecks.



Figur 151.

Aus $\triangle\ MCF \sim ABC$ (1. Satz) erhält man

$$\frac{CF}{BC} = \frac{MC}{AB}, \text{ also } AB \cdot CF = MC \cdot BC.$$

Dies setzt man ein in $AC^2 = 2 MC \cdot BC$ und hat
$AC^2 = 2 \cdot AB \cdot CF$, oder durch Multiplizieren dieser Gleichung mit $2n \cdot 2n$

$$(2n AC)^2 = 2n AB \cdot 2n \cdot 2 CF = n AA_1 \cdot 2n FF_1$$

und das ist, wenn man die Umfänge der einbeschriebenen Vielecke mit e, die der umbeschriebenen mit u und dabei die von doppelter Seitenzahl mit der Marke 2 bezeichnet,

$$\text{a)} \quad e_2^2 = e \cdot u_2.$$

Ferner ist durch den Halbmesser $MB = \varrho$

$$AB^2 = r^2 - \varrho^2 = (r + \varrho)(r - \varrho)$$

und wie vorher

$$AC^2 = 2r(r - \varrho)$$

also

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{r + \varrho}{2r} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)$$

oder, da $\frac{\varrho}{r} = \frac{AB}{CD}$ ist,

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{AB}{CD}\right)$$

daher auch

$$\frac{(2nAB)^2}{(2nAC)^2} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{2nAB}{2nCD}\right)$$

das ist

$$\frac{e^2}{e_2^2} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{e}{u}\right)$$

oder, wenn man e_2^2 aus Gleichung a) einsetzt,

$$\frac{e}{u_2} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{e}{u}\right)$$

also, durch e dividiert,

$$1) \quad \frac{1}{u_2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{u}\right)$$

und dem entsprechend wird geschrieben, indem man $1 = 1$ durch Gleichung a) dividiert,

$$\frac{1}{e_2^2} = \frac{1}{e \cdot u_2}$$

oder

$$2) \quad \frac{1}{e_2} = \sqrt{\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{u_2}}.$$

Die erste Formel giebt eine Mittelgröfse, die zweite ein Mittelglied an. Es ist

1) der umgekehrte Wert vom Umfange des umbeschriebenen regelmäfsigen $2n$-Ecks die Mittelgröfse der umgekehrten Werte von den Umfängen der beiden n-Ecke, und

2) der umgekehrte Wert vom Umfange des einbeschriebenen regelmäfsigen $2n$-Ecks ist das Mittelglied der umgekehrten Werte vom Umfange des einbeschriebenen n-Ecks und des umbeschriebenen $2n$-Ecks.

Anmerk. Geht man bei den einbeschriebenen Vielecken vom Umfange des regelmäfsigen n-Ecks über zu dem des $2n$-Ecks, so ersetzt man die Seite AA_1 durch $AC + CA_1$. Diese Summe zweier Dreiecksseiten ist gröfser als die dritte Seite AA_1. Solche Vergröfserung tritt an allen n Seiten ein; mithin ist der Umfang des einbeschriebenen $2n$-Ecks gröfser, als der des n-Ecks. Verdoppelt man die Zahl der Seiten abermals, indem man den Halbierungspunkt des Bogens AC mit A und C verbindet und mit den übrigen ebenso verfährt, so wird der Umfang des einbeschriebenen $4n$-Ecks gröfser als der des $2n$-Ecks. Fährt man so mit Verdoppeln fort, so kommt man in der Figur bald dahin, dafs man den Umfang des Vielecks vom Kreisumfange nicht mehr unterscheiden kann, und mit Zeichnen aufhören mufs; in der Rechnung aber kann man die Annäherung beliebig weit fort-

führen. Der Kreisumfang ist die obere Grenze der Umfänge aller einbeschriebenen Vielecke.

Beim umbeschriebenen Vieleck wird beim Übergehen vom n-Eck zum $2n$-Eck die Summe $FD_1 + D_1G$ ersetzt durch die Gerade FG. Diese $n$mal eintretende Verminderung macht den Umfang des umbeschriebenen $2n$-Ecks kleiner, als den des n-Ecks. Der Umfang des umbeschriebenen $4n$-Ecks wird kleiner, als der des $2n$-Ecks; und so legen sich die Umfänge des $8n$-Ecks, $16n$-Ecks, usw. immer enger um den Kreis herum, dem man also durch Berechnen derselben beliebig nahe kommen kann. Der Kreisumfang ist die untere Grenze aller umbeschriebenen Vielecke.

Wie weit man dem Kreise, der zwischen den ein- und umbeschriebenen Vielecken liegenden Grenze, von innen und aufsen sich genähert hat, ersieht man bei der Rechnung aus der Menge der in den Zahlenwerten der Umfänge übereinstimmenden Bruchstellen.

Man führe eine der unter Nr. 6 stehenden 4 Berechnungen aus, indem man abkürzend rechnet. Eine der gröfseren Rechnungen, 3) oder 4), ist in zwei Schulstunden zu erledigen.

6. Berechnung von π.

1) Viereck, als Anfang.

Jede Seite des um den Kreis beschriebenen Quadrates ist gleich dem Durchmesser d, also sein Umfang $u = 4d$. Die Seite x des einbeschriebenen Quadrates folgt aus $x^2 = 2r^2$, $x = r\sqrt{2}$, also der Umfang $e = 4r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cdot d = 2{,}828\,d$. Die Umfänge aller durch fortgesetztes Verdoppeln entstehenden Vielecke werden ebenso durch den Kreisdurchmesser d ausgedrückt. Um das fortwährende Schreiben des d zu ersparen, lassen wir es während der Rechnung fort und fügen es erst der Schlufsangabe wieder bei.

Für die Formeln 1) und 2) in Nr. 5 wird

$\frac{1}{u} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ und $\frac{1}{e} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, mit $\sqrt{2}$ im Zähler und Nenner multipliziert, $\frac{1}{e} = {}^1/_4\sqrt{2} = 0{,}3536$. Hieraus nach Formel 1) und 2) für die Achtecke

$$\begin{array}{r} 1 : e_4 = 0{,}3536 \\ 1 : u_4 = 0{,}25 \\ \hline 0{,}6036 \\ 1 : u_8 = 0{,}3018 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 : e_4 = 0{,}3536 \\ 1 : u_8 = 0{,}3018 \end{array}\Bigg\}\text{ multipl.}$$

$$\begin{array}{rrl} & 0{,}10\,608 & \\ & 35 & \\ & 28 & \\ \hline 1 : e_8 = & \sqrt{0{,}10\,671} & = 0{,}326\bar{7}\text{*)} \\ 62. & 1\,67 & 0{,}3018 = 1 : u_8 \\ 646 & 431 & 0{,}628\bar{5} \\ 652 & 43 & 0{,}3142 = 1 : u_{16} \end{array}$$

und so fort. Die Ergebnisse werden in eine Tabelle gebracht:

*) Der Strich über der 7 giebt an, dafs 7 durch Erhöhen entstanden ist. Der über oder unter eine Ziffer gesetzte Punkt sagt, dafs das Rechnen mit ihr erledigt ist.

n	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{e}$	Unterschied
4	0,25	$0{,}353\overline{6}$	0,1036
8	0,3018	$0{,}326\overline{7}$	0,0249
16	0,3142	0,3204	0,0062
32	0,3173	0,3188	0,0015
64	$0{,}318\overline{1}$	0,3184	0,0003

Es zeigt sich, dafs jeder folgende Unterschied nur etwa den vierten Teil des vorhergehenden beträgt. Also ist hier aufzuhören.

Aus $\frac{1}{u_{64}} = 0{,}3181$ folgt

$1 : 0{,}3181 = u_{64} = 3{,}144\,d$ [wo d wieder beigefügt ist]

und $1 : 0{,}3184 = e_{64} = 3{,}141\,d$.

Will man Tausendstel des Durchmessers nicht berücksichtigen, so ist anzugeben

Umfang des umbeschriebenen 64-Ecks $= 3{,}14\,d$

" " einbeschriebenen 64-Ecks $= 3{,}14\,d$

also ist, bis auf Hundertstel des Durchmessers, auch

der zwischen beiden liegende Kreisumfang $= 3{,}14\,d$.

Die Zahl (3,14), mit welcher der Durchmesser zu multiplizieren ist zur Angabe der Länge des Kreisumfangs, wird mit π (dem griechischen Buchstaben Pi) bezeichnet. Also ist, auf zwei Bruchstellen,

$$\pi = 3{,}14.$$

2) Sechseck, als Anfang.

Die Seite x des umbeschriebenen regelmäfsigen Sechsecks ist Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe r. Aus $\frac{3}{4}x^2 = r^2$ folgt $x = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}$, also der Umfang $u = \frac{6}{\sqrt{3}}\,d$ und der des einbeschriebenen regelmäfsigen Sechsecks $e = 6r = 3d$. Also ist, wenn man, während der Rechnung, d nicht immer wieder hinschreibt,

$\frac{1}{u} = \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}288\overline{7}$ und $\frac{1}{e} = \frac{1}{3}$, und es folgt nach Formel 1) und 2) aus

$$\begin{aligned} 1 : u_6 &= 0{,}288\overline{7} \\ 1 : e_6 &= 0{,}3333 \\ \hline &\ 0{,}6220 \\ 1 : u_{12} &= 0{,}3110 \end{aligned} \qquad 1 : e_{12} = \sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 0{,}3110} = \sqrt{0{,}10\,36\,7} = 0{,}3220$$

$$\begin{matrix} 62 & 1\,36 \\ 64 & 12\,7 \end{matrix}$$

und so fort mit den Ergebnissen

n	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{e}$	Unterschied
6	$0{,}288\overline{7}$	0,3333	0,0446
12	0,3110	0,3220	0,0110
24	0,3165	0,3192	0,0027
48	$0{,}317\overline{9}$	0,3185	0,0006
96	0,3182	$0{,}318\overline{4}$	0,0002

Aus $1 : u_{96} = 0{,}3182$ folgt $1 : 0{,}3182 = u_{96} = 3{,}143\,d$
und aus $1 : e_{96} = 0{,}3184$ $\qquad e_{96} = 3{,}141\,d$
also, wenn es auf Tausendstel des Durchmessers nicht mehr ankommt, ist

$$u_{96} = 3{,}14\,d = e_{96}$$

mithin auch der zwischen diesen Umfängen befindliche

$$\text{Kreisumfang} = 3{,}14\,d$$

also, wie unter 1), der Faktor von d, auf 2 Bruchstellen,

$$\pi = 3{,}14.$$

3) Will man π auf mehr Bruchstellen mit Sicherheit finden, so ist die Rechnung von Anfang an auf mehr Bruchstellen anzulegen. Bei 1) und 2) gab die mit 4 Bruchstellen angesetzte Rechnung 3 Ziffern von π, die Ganzen und 2 Bruchstellen. Wünscht man π auf 5 Bruchstellen zu finden, so ist die Rechnung auf 7 Bruchstellen auszuführen.*)

Das Viereck liefert bei der Rechnung auf 7 Bruchstellen folgende Ergebnisse:

n	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{e}$	Unterschied
4	0,25	0,353 5534	0,103 5534
8	0,301 7767	0,326 6407	0,024 8640
16	0,314 2087	0,320 3644	0,006 1557
32	0,317 286$\overline{6}$	0,318 821$\overline{8}$	0,001 5352
64	0,318 054$\overline{2}$	0,318 4378	0,000 3836
128	0,318 2460	0,318 341$\overline{9}$	0,000 0959
256	0,318 2939	0,318 317$\overline{9}$	0,000 0240
512	0,318 3059	0,318 311$\overline{9}$	0,000 0060
1024	0,318 3089	0,318 310$\overline{4}$	0,000 0015
2048	0,318 3096	0,318 3100	0,000 0004

Demnach ist

$$u_{2048} = 3{,}14\,159\,5\,d$$
$$\text{und } e_{2048} = 3{,}14\,159\,\overline{2}\,d$$

ohne Millionstel des Durchmessers ist der zwischen ihnen liegende Kreisumfang sicher

$$k = 3{,}14\,159\,d$$

also auf 5 Bruchstellen

$$\pi = 3{,}14\,159.$$

*) Die auf 5 oder 6 Bruchstellen angesetzte Rechnung führt zu Ergebnissen, deren nicht befriedigende Genauigkeit den erheblich gröſseren Zeitaufwand nicht lohnt. Dasselbe gilt von der mit 7 Bruchstellen durchgeführten Rechnung, die vom regelmäſsigen Sechseck ausgeht und welche abzuschlieſsen ist mit

$$1 : u_{1536} = 0{,}318\,3093$$
$$\text{und } 1 : e_{1536} = 0{,}318\,3099$$

woraus hervorgeht

$$u_{1536} = 3{,}14\,159\,\overline{9}\,d$$
$$\text{und } e_{1536} = 3{,}14\,159\,\overline{3}\,d,$$

so daſs der Zweifel bleibt, ob für π in der fünften Bruchstelle Erhöhung eintreten müsse.

4) Zehneck, als Anfang, mit 7 Bruchstellen.

Nach Nr. 4 ist der Umfang des einbeschriebenen regelmäſsigen Zehnecks

$$e = 10z = {}^5/_2 (\sqrt{5} - 1)\, d$$

und der des umbeschriebenen

$$u = 10\,Z = 10\,d \sqrt{1 - 0{,}4\sqrt{5}}.$$

Also wird, mit Fortlassen des d,

$$\frac{1}{e} = \frac{2}{5(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 \cdot 4}$$

$$1 : e_{10} = 0{,}1\,(1 + \sqrt{5}) = 0{,}323\,6068$$

und

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{10\sqrt{1 - 0{,}4\sqrt{5}}} = 0{,}1\,\frac{\sqrt{1 + 0{,}4\sqrt{5}}}{\sqrt{0{,}2}}$$

$$1 : u_{10} = 0{,}1 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 0{,}307\,768\bar{4}.$$

Damit erhält man:

n	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{e}$	Unterschied
10	0,307 768$\bar{4}$	0,323 6068	0,015 8384
20	0,315 6876	0,319 622$\bar{7}$	0,003 9351
40	0,317 6551	0,318 637$\bar{4}$	0,000 9823
80	0,318 1462	0,318 3917	0,000 2455
160	0,318 269$\bar{0}$	0,318 3303	0,000 0613
320	0,318 2996	0,318 3149	0,000 0153
640	0,318 3073	0,318 3111	0,000 0038
1280	0,318 3092	0,318 3101	0,000 0009
2560	0,318 309$\bar{7}$	0,318 3099	0,000 0002

Zur Bestimmung der letzten Umfänge werde beim Dividieren eine Null angehängt und dann erst abgekürzt gerechnet. Es wird

$$u_{2560} = 3{,}14\,159\,45\,d$$
$$e_{2560} = 3{,}14\,159\,25\,d$$

also ist auf 5 Bruchstellen zuverlässig

$$\pi = 3{,}14\,159.$$

Anmerk. 1. Man merke sich π auf 8 Bruchstellen

$$\pi = \mathbf{3{,}1415\,9265}$$

Leicht zu behalten ist der Anfang wegen der durch 1 1 getrennten Zahlenfolge 3 4 5; dann kommen von 11 die äuſserste einzifferige Zerlegung und die innerste, 9 + 2 und 6 + 5, in absteigender Ordnung der Posten.

Anmerk. 2. Archimedes (287—212 vor Christus, in Syrakus) hat zuerst das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser zu bestimmen gesucht. Aus dem Umfange des um- und einbeschriebenen regelmäſsigen 96-Ecks fand er, daſs es weniger als $3^{10}/_{70}$ und mehr als $3^{10}/_{71}$ sei. Nach ihm nennt man $3^1/_7 = {}^{22}/_7$ den Archimedischen Näherungswert von π. Er ist um 0,00 126 zu groſs, kann

also nur in solchen Fällen der Anwendung gebraucht werden, wo es auf Tausendstel des Durchmessers nicht ankommt.*)

Der niederländische Mathematiker Ludolph van Ceulen (1539—1610) berechnete in einer 1596 erschienenen Schrift die Verhältniszahl π auf 20, später auf 35 Bruchstellen. Bei seiner auf 20 Bruchstellen angelegten Rechnung, die vom regelmäfsigen Sechseck ausging, hatte er 30 Paare von Vielecken zu berechnen, bis zu den von $2^{30} \cdot 3 = 3\,221\,225\,472$ Seiten, und erhielt deren Umfänge (mit obiger Bezeichnung)

$$u = 3{,}14159\,26535\,89793\,23847\,d$$
$$e = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,d$$

die sich in der letzten Bruchstelle nur um 1 unterscheiden. Da nun [wie aus obigen Ergebnissen in 1) bis 4) zu ersehen ist] der Kreisumfang dem Umfange des einbeschriebenen regelmäfsigen Vielecks viel näher kommt, als dem des umbeschriebenen, so hatte er auf 20 Bruchstellen

$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846$$

denen folgen 26433 83 und andere immer weiter.

Ihm zu Ehren nennt man π die Ludolphsche Zahl.**)

7. Das Ergebnis der Berechnungen in Nr. 6 werde hier noch besonders hingestellt:

π ist die Zahl, mit welcher der Durchmesser zu multiplizieren ist, um die Länge des Kreisumfanges zu erhalten:

$$\textbf{Kreisumfang } k = \pi d = 2\pi r.$$

---

*) Den gemeinen Bruch $^{355}/_{113}$, dessen Wert erst in der siebenten Bruchstelle wenig über π hinausgeht, hat Metius in der Mitte des 16. Jahrhunderts gefunden. Dies Verhältnis ist in der Ordnung

Durchmesser zu Kreisumfang = 113 : 355

leicht zu merken: man schreibt jede der ersten drei ungeraden Zahlen zweimal hin und trennt sie in der Mitte durch den Doppelpunkt. Aber zum Rechnen ist der gemeine Bruch schwerlich mit Vorteil zu benutzen.

) Um das Jahr 1850 wurden veröffentlicht nur als Beispiele geschickter Ausführung von Reihenentwickelungen Berechnungen der Zahl π vom Kopfrechner Dase aus Hamburg auf 200, vom Astronomen Clausen in Dorpat auf 250, vom Astronomen Dr. Lehmann in Potsdam auf 260 und vom Professor Richter in Elbing sogar auf 500 Bruchstellen. Sie wufsten sehr wohl, dafs in irgendwelcher Rechnung-Anwendung von so vielen Bruchstellen **niemals zu machen ist; weil schon mit den früher bekannten Bruchstellen jede erwünschte Genauigkeit des Rechnungsergebnisses erreicht werden kann. Dies wollen wir durch folgendes Beispiel erläutern.

Der Erdmittelpunkt beschreibt im Laufe eines Jahres um die Sonne eine Bahn, welche einer kreisrunden sehr nahe kommt. Der grofse Durchmesser derselben beträgt 297 340 000 Kilometer. Nicht die Gröfse dieser Bahn-Ellipse, sondern den Umfang eines Kreises, welcher ihr an Länge vergleichbar ist, wollen wir berechnen, nur als besonderes Beispiel eines sehr grofsen Kreises. — Auf wieviele Bruchstellen ist π zu nehmen, wenn die Länge des Kreisumfanges, von genau 297 340 000 km Durchmesser, bis auf Zehntausendstel-Millimeter richtig angegeben werden soll? — Verwandelt man die Kilometerzahl des Durchmessers in Zehntausendstel-Millimeter, so erhält sie 19 Ziffern. Also ist π auf 19 Bruchstellen zu nehmen. Diese geben die Antwort: Der Umfang des Kreises, dessen Durchmesser genau 297 340 000 km ist, hat eine Länge von 934 121 159 km 618 m 389 mm und 1215 Zehntausendstel-Millimeter. Die nun noch kommenden 0,000 024 mm, nebst dem, was dann noch fehlt, müfste man mit stärkstem Mikroskope suchen! Und jene Antwort haben erst neunzehn Bruchstellen von π geleistet! (Um die Zugabe mit völliger Sicherheit hinschreiben zu können, wurde mit 23 Bruchstellen noch einmal gerechnet.) Aus den Worten „nebst dem, was dann noch fehlt," ist zu schliefsen, dafs, wer der erweiterten Längenangabe noch ein halbes Millionstel-Millimeter hinzufügen wollte, den Umfang des Kreises etwas zu grofs angeben würde.

Zusatz. Ist der Durchmesser gleich der Längeneinheit, z. B. 1 Meter, so ist die Gröfse des Kreisumfanges π Meter, also 3 Meter 14 Centimeter 1 Millimeter 5 Zehntelmillimeter 9 Hundertstelmillimeter, und wer den hinter dieser Angabe noch verbleibenden Fehler sehen wollte, müfste ein starkes Vergröfserungsglas anwenden.

Man sagt: 1) Der Kreisumfang vom Durchmesser Eins ist $= \pi$.

2) Der Halbkreis vom Halbmesser Eins ist $= \pi$.

Anmerk. Da die Zahl π unzählig viele Bruchstellen hat*), so mufs mit π stets abgekürzt gerechnet werden. Beim Multiplizieren sind von π mindestens so viele Bruchstellen zu nehmen, als der andere Faktor geltende Ziffern besitzt. (Hat er deren mehr als 10, so ist noch eine Stelle mehr zu verwenden, weil dann die Summe der Fehler der letzten Stelle aller Teilprodukte möglicherweise mehr als eine halbe Einheit dieser Stelle betragen kann. Bei einer gröfseren Anzahl wird es immer wahrscheinlicher, dafs Ausgleichung eintritt.)

a) Man vergleiche in den folgenden drei Berechnungen des Kreisumfanges vom Durchmesser 98 765 m die vollständige Multiplikation 1) mit den abgekürzten 2) und 3).

1)	2)	3)
3,14 159	3,14 159 265	3,14 159
98 765	98 765	98 765
282 743,1	282 743,338 5	282 743,1
25 132 72	25 132 741 2	25 132 7
2 199 113	2 199 114 8	2 199 1
188 495 4	188 495 5	188 5
15 707 95	15 708 0	15 7
310 279,136 35	310 279,398 0	310 279,1
	also 310 279,398 m	also 310 279 m.
	(bis auf Millimeter).	

Das vollständige Multiplizieren unter 1) hat dem Ergebnis einen Stellenbruch geliefert, dessen richtig berechnete Ziffern falsch sein müssen, weil der darüber gezeichnete Winkel mit Ziffern ausgefüllt sein müfste, die von nicht mehr benutzten Bruchstellen von π herkommen würden und mit den hingeschriebenen Ziffern eine ganz andere Summe ergeben, wie unter 2) zu sehen ist. Das abgekürzte Multiplizieren unter 3) liefert das Ergebnis 310 279 m richtig und so genau, wie es bei dem eingeschränkten Werte von π möglich ist. Unter 1) unrichtige Ziffern zu berechnen, ist Zeitverschwendung.

b) Wie grofs ist der Durchmesser eines Kreises von 10 Kilometer Umfang? $d = k : \pi$.

1) 10 000,000 000 : 3,14 159 = 3 183,101 55
575 230
261 071 0
9 743 80
319 030
4 871 00
1 729 410
158 615 0

*) Deshalb gehört π zu den „irrationalen“ Zahlen.

2)

10 000,000 00 : 3,14 159 265 = 3 183,098 87
575 222 05
261 062 78
9 735 37
310 59
27 85
2 72
21

3)

10 000,00 : 3,14 159 = 3 183,1
575 23
261 07
9 74
32

Das vollständige Dividieren bei 1) giebt schon unter der zweiten Bruchstelle Reste, welche zu grofs sind, weil die aus den nicht mehr benutzten Bruchstellen von π entstehenden Ziffern auch noch hätten abgezogen werden müssen. Sind nun die voranstehenden richtigen Ziffern verbraucht, und die unrichtigen Reste an die vorderste Stelle gekommen, so müssen auch bei richtigem Weiterrechnen in das Ergebnis falsche Ziffern treten. Der Vergleich mit der genauen Rechnung unter 2) zeigt, dafs alle Bruchstellen im Ergebnis anders lauten. Die kurze Rechnung unter 3) aber bringt das richtige Ergebnis 3 183,1 m, welches, trotzdem π nur auf 5 Bruchstellen genommen wurde, nur um 1 mm zu grofs ausfiel.

Demnach mufs mit π immer abgekürzt gerechnet werden.

8. Ls. **Die vom Kreise umschlossene Fläche hat den Inhalt**

$$J = {}^1/_2 kr = \pi r^2.$$

Bw. Ein dem Kreise einbeschriebenes regelmäfsiges n-Eck ist kleiner, als die Kreisscheibe, in welcher es liegt, und diese ist, als Teil der Fläche, kleiner als das umbeschriebene n-Eck. Also hat man (nach **21**, 8)

$$^1/_2 e\varrho < J < {}^1/_2 ur.$$

Verdoppelt man immerfort die Seitenzahl, so dafs solche Reihe von Vieleckspaaren entsteht, wie in den Anmerkungen zu Nr. 1, 2 und 3 angegeben ist, so schmiegen sich die Umfänge e und u immer enger an den Kreisumfang k an. Ist man von den beiden regelmäfsigen Sechsecken ausgegangen, so kommt man an das in Nr. 6 Anm. 2 erwähnte Paar von $2^{30} \cdot 3 = 3\,221\,225\,472$ Seiten. Dieses Paar ist aber erst das dreifsigste in der Reihe; das vierzigste hat $2^{10} = 1024$ mal soviel Seiten, also über drei Billionen Seiten, das sechzigste weit über drei Trillionen. Man soll die Reihe immer weiter sich entwickeln lassen, das 300ste, das 3000ste Paar von $2^{3000} \cdot n$ Seiten, das dreimillionste denken und so in der Vorstellung ohne Aufhören fortschreiten, dann sieht man ein, dafs (auch bei einem sehr grofsen Kreise) sowohl e, als u in den Kreisumfang k, und ϱ in r übergeht, und aus vorstehender Zusammenstellung die Grenzen werden

$$^1/_2 kr \quad J \quad {}^1/_2 kr.$$

Die gleich gewordenen Grenzen zeigen also die Gröfse des Kreisinhaltes, die mit Einsetzen von $k = 2\pi r$ ist

$$J = {}^1/_2 kr = \pi r^2.$$

Anmerk. 1. Der Ausdruck $J = {}^1/_2 kr$ erinnert an die Formel $\triangle = {}^1/_2 gh$ (**21**, 6). Die Übereinstimmung lehrt, dafs die Kreisscheibe gleich einem Dreieck ist, dessen Grundseite der durchgeschnittene und zur geraden Linie gestreckte Kreisumfang, und dessen Höhe gleich dem Halbmesser des Kreises ist. — Den Wert $J = \pi r^2$ vergleiche man mit der unter Nr. 2 ge-

machten Bemerkung zum Flächeninhalte des einbeschriebenen regelmäfsigen Zwölfecks $f_{12} = 3r^2$.

Anmerk. 2. Wie sich durch Ziehen von geraden Linien oder Kreisen keine gerade Linie so abgrenzen läfst, dafs sie der Länge des Kreisumfanges genau gleich wird, so ist es auch unmöglich, die Kreisfläche in ein Quadrat (oder in eine andere geradlinige Figur) zu verwandeln.*) Einige von Kreisbogen begrenzte Figuren aber lassen sich in ein Quadrat verwandeln. (Beispiele **22,** 14, 48—50.)

Zusatz 1. Der Inhalt des Kreises vom Halbmesser Eins ist $= \pi$ Quadrateinheiten. — Beschreibt man mit dem Durchmesser eines Kreises einen neuen Kreis, so wird die Scheibe viermal so grofs, wie die Fläche des ersten. Ein Kreis mit zehnfachem Halbmesser umschliefst schon 100mal so viel von der Ebene, als der kleine Kreis; sein Umfang aber ist nur das Zehnfache des kleinen Kreises.

Zusatz 2. Man beschreibe um den Mittelpunkt mit dem Halbmesser r_1, welcher kleiner als r ist, noch einen Kreis. Beide begrenzen einen Kreisring. Sein Flächeninhalt ist

$$R = \pi\,(r^2 - r_1{}^2) \text{ und dies sei } = \pi x^2.$$

Die Linie x (besser $2x$) zeichne man von einem Punkte des inneren Kreises aus und beschreibe den Kreis, welchem der Ring an Inhalt gleich ist. Wie grofs ist r_1 zu nehmen, wenn sein Kreis die gegebene Kreisfläche halbieren soll?

9. Ls. Zwei Bogen eines Kreises verhalten sich wie die auf ihnen stehenden Winkel am Mittelpunkte.

Bw. Entweder haben die beiden Winkel ein gemeinsames Mafs, oder nicht. Im ersten Falle messe man beide mit dem gemeinsamen Mafse, dem Winkel α. Die Schenkel aller eingelegten Winkel α grenzen auf den beiden Bogen gleiche Teile ab (**11,** 4); einen derselben nimmt man als Mafs für die Bogen. Dann ergiebt sich die Behauptung. Auch im andern Falle ist der Beweis ganz wie der zu **18,** 3 und **21,** 1.

Anmerk. Der in **3,** 4 beschriebene Winkelmesser zeigt die Teilung eines gestreckten Winkels in 180 Winkelgrade, sowie die Teilung eines Halbkreises in 180 Bogengrade. Der sechzigste Teil eines Grades heifst eine Minute, der 60ste Teil einer Minute eine Sekunde; also, mit der für beide Arten von Graden geltenden Bezeichnung geschrieben: $1^0 = 60'$, $1' = 60''$. Hat ein Bogen so und so viele Bogengrade, Bogenminuten und Bogensekunden, so hat der zugehörige Winkel am Mittelpunkte ebenso viele Winkelgrade, Winkelminuten und Winkelsekunden. (Nr. 9.)

10. Ls. Zwei Ausschnitte eines Kreises verhalten sich wie ihre Winkel am Mittelpunkte oder wie ihre Bogen.

Der Beweis ist wie der von Nr. 9; man braucht nur Ausschnitt statt Bogen zu sagen.

11. Aufgabe. Die Länge b eines Bogens mit dem Halbmesser r aus seinem Winkel am Mittelpunkte zu bestimmen.

Ausführung. Ist der Winkel nicht allein in Graden, $= \alpha^0$, sondern auch mit Minuten und Sekunden gegeben, so ist es besser, seine Grade und

*) Dies hat Prof. F. Lindemann 1882 bewiesen.

Minuten in Sekunden zu verwandeln; dies möge β'' ergeben. Zu dem zu berechnenden Bogen ist der Halbkreis der zweite Bogen für Anwendung von Nr. 9:

$$\frac{b}{\pi r} = \frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{648\,000}; \text{ daher}$$

$$b = \alpha \frac{\pi}{180} r = \beta \frac{\pi}{648\,000} r.$$

Anmerk. Winkelgrade sind immer gleich, als die 90sten Teile von einem Rechten; aber Bogengrade mit ungleichen Halbmessern sind ungleich. Sie haben das Verhältnis ihrer Halbmesser.

12. Aufgabe. Den Flächeninhalt A eines Ausschnitts mit dem Halbmesser r aus seinem Mittelpunktswinkel oder aus dem Bogen zu bestimmen.

Ausführung. Man denke die Kreisfläche durch zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser in 4 Viertel zerlegt. Eines derselben ist zum gegebenen der zweite Ausschnitt für Anwendung von Nr. 10:

$$\frac{A}{{}^1/_4 \pi r^2} = \frac{b}{{}^1/_2 \pi r} = \frac{\alpha}{90} = \frac{\beta}{324\,000}, \text{ folglich}$$

$$A = {}^1/_2 br = \alpha \frac{\pi}{360} r^2 = \beta \frac{\pi}{1\,296\,000} r^2.$$

Anmerkungen. 1) Der erste Ausdruck, $A = {}^1/_2 br$, stimmt in seiner Form überein mit der Formel $\triangle = {}^1/_2 gh$. Dies lehrt, dafs man in dem dreieckigen Ausschnitt den Bogen als seine Grundseite und irgend einen seiner Halbmesser als zugehörige Höhe nehmen könne. In der That steht dieser senkrecht auf ihm. Denn als der Endpunkt des Halbmessers den Kreis beschrieb, bewegte sich an dieser Stelle der Punkt augenblicklich in der Richtung, welche die Berührungslinie fortsetzt, und auf dieser steht der Halbmesser senkrecht.

2) Zieht man in den um denselben Mittelpunkt mit r und r_1 beschriebenen Kreisen zwei Halbmesser r des gröfseren Kreises, welche den Winkel α einschliefsen, so schneiden sie aus dem Kreisringe ein viereckiges Stück heraus, dessen Flächeninhalt ist

$$T = \alpha \frac{\pi}{360} r^2 - \alpha \frac{\pi}{360} r_1^2 = \alpha \frac{\pi}{360} (r^2 - r_1^2) =$$

$$^1/_2 \cdot \alpha \frac{\pi}{180} (r + r_1)(r - r_1)$$

und das ist nach Nr. 11, wenn man noch $r - r_1$ mit h bezeichnet,

$$T = {}^1/_2 (b + b_1) h$$

ein Ausdruck von der Gestalt der Inhaltsformel des Trapezes. (**21**, 7.) Und wirklich sind die das Viereck begrenzenden Kreisbogen zwei gleichlaufende Linien, da ihr senkrechter Abstand $r - r_1 = h$ überall gleich ist, und deshalb ist h die Höhe.

13. Den Inhalt eines Kreisabschnitts erhält man, wenn man vom zugehörigen Ausschnitt das ergänzende Dreieck abzieht.

Beispiel. Der Inhalt des Abschnitts, welchen eine Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen Zwölfecks liefert, ist (**22**, 2)

$$J = {}^1/_{12} (\pi - 3) r^2 = 0{,}0118\, r^2.$$

14. Übungen.

a) Regelmäſsige Vielecke.

1) Aus der Seite a eines regelmäſsigen Zehnecks den groſsen und kleinen Halbmesser und den Inhalt zu berechnen.

$$r = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\, a = 1{,}618\, a, \qquad \varrho = \tfrac{1}{2} a \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 1{,}539\, a,$$
$$J = \tfrac{5}{2} a^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 7{,}694\, a^2.$$

2) Über der gegebenen Seite a ein regelmäſsiges Achteck zu zeichnen und seinen Inhalt als Vielfaches von a^2 auf 3 Bruchstellen zu bestimmen.

$$J = 4{,}828\, a^2.$$

3) Ein regelmäſsiges Zwölfeck mit der Seite a zu zeichnen und seinen Inhalt als ein Vielfaches von a^2 auf 3 Bruchstellen zu berechnen. $J = 11{,}196\, a^2$.

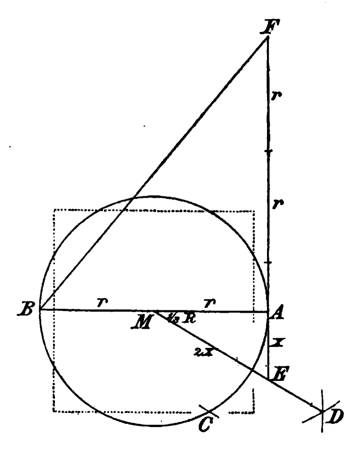
4) Aus der Seite a eines regelmäſsigen Fünfecks den groſsen und kleinen Halbmesser und den Inhalt auf 3 Bruchstellen zu berechnen. (Die innere Wurzel ist auf 5 Bruchstellen zu nehmen.)

$$r = a \sqrt{0{,}1\,(5 + \sqrt{5})} = 0{,}851\, a$$
$$\varrho = 0{,}1\, a \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 0{,}688\, a$$
$$J = \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 1{,}720\, a^2.$$

---

b) Zur Darstellung der Länge des Halbkreises.

5) Unter den Angaben, wie eine gerade Linie zu zeichnen ist, daſs ihre Länge dem Umfange eines gegebenen Kreises recht nahe gleich wird, ist die, welche Kochanski 1685 bekannt machte, die beste, weil sie mit unveränderter Zirkelöffnung ausgeführt wird und ein sehr genaues Ergebnis hat.



Figur 152.

An den Durchmesser AB trage man im Mittelpunkte den Winkel $AMD = \tfrac{1}{3}$ R dadurch an, daſs man mit dem Halbmesser r von A nach C in den Kreis einschneidet und die Kreuzbogen bei D schlägt. Von dem Punkte E aus, in welchem sein Schenkel die durch A gehende Berührungslinie schneidet, trage man auf ihr den Halbmesser r dreimal ab und verbinde den Endpunkt F mit dem Endpunkte B des Durchmessers. Die Länge dieser Strecke BF ist sehr nahe gleich dem Halbkreise. Man berechne, wie wenig ihr fehlt. (Beide Wurzeln auf 5 Bruchstellen.)

$$BF = r \sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}14\,153\, r$$

während der Halbkreis $= 3{,}14\,159\, r$

ist; ihr fehlen nur 6 Hunderttausendstel des Halbmessers r. (In der Figur ist $r = 15$ mm. Wie klein ist der Fehler, wenn die Zeichnung genau ausgeführt werden könnte?)

Wie kann man (um M) ein Quadrat zeichnen, welches der Kreisfläche nahe gleich ist?

Rechnen mit π. Es werde die Zahl π auf fünf Bruchstellen genommen, wenn nicht ausdrücklich eine andere Bestimmung getroffen ist.

c) Der Kreis und sein Inhalt.

6) Der Sekundenzeiger einer Pendeluhr hat, vom Drehpunkte an, eine Länge von 11,05 cm. Wie lang ist der Weg, welchen die Spitze des Zeigers täglich durchläuft?

7) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie 5 : 7. Wie verhalten sich die Inhalte dieser Kreise? Welcher Bruch von kleineren Zahlen würde das Inhaltsverhältnis anschaulicher machen?

8) Beim gleichseitigen Dreiecke ist der umbeschriebene Kreis wievielmal so grofs, als der einbeschriebene, a) für die Umfänge, b) für die Inhalte?

9) Wie grofs ist die Seite eines Quadrates, welches gleichen Inhalt hat mit einem Kreise von 1 m Durchmesser?

8 Bruchstellen geben 88 cm 6,2269 mm.

10) Wie lang wird der Kreisumfang, welcher $J = 7{,}95\,775$ qcm Fläche umspannen soll?

11) Mitten auf einer wagerechten geraden Linie nehme man einen Punkt O an und trage von O aus nach rechts und nach links Centimeter ab, setze an die rechts von O stehenden Teilpunkte von O aus die geraden Zahlen 2, 4, 6, ... und an die links, auch von O aus, die ungeraden 1, 3, 5, ... Dann beschreibe man Halbkreise von O nach 1 unterhalb der geraden Linie, von 1 nach 2 oberhalb, von 2 nach 3 unterhalb, dann oberhalb nach 4 und so beliebig weit fort. Der entstehende Bogenzug sieht aus wie eine Spirale. Wie lang ist die gewundene Linie von O bis zum Punkte n? Bis zu welcher Nummer kommt man, wenn man einen 1 Kilometer langen Faden von O aus wie diese Spirale herumlegen will? Wie weit ist diese Nummer von O entfernt? Wie lang ist das hinter der Nummer noch übrig bleibende Fadenende?

Antwort: $s = \frac{1}{4} n (n + 1) \pi$

$$n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{400\,000}{\pi}} = 356{,}3.$$

Es geht mit dem 1 km langen Faden zu Ende bei Nummer 356, und diese steht rechts von O nur 1 m 78 cm weit. Das übrig bleibende Fadenende ist 1 m 82 cm lang und reicht nicht ganz für $^1/_3$ des nächsten Halbkreises.

12) Um den Kreis vom Halbmesser r ist ein gleichseitiges Dreieck beschrieben. In eines der drei Eckstücke wird ein Kreis eingezeichnet, welcher zwei Seiten und den Bogen berührt. In das übrig gebliebene Eckstück ebenso ein Kreis; in das nun sich zeigende kleine Eckstück wieder und so fort ohne Aufhören. Welchen Bruchteil des ersten Kreises ergiebt die Summe aller unzählig vielen eingezeichneten Kreise, und zwar a) für den Umfang und b) für den Inhalt?

13) Der Umfang eines regelmäfsigen Sechsecks ist u. Wie grofs ist der Umfang eines Kreises, welcher mit dem Sechseck gleichen Inhalt hat?

$$k = u \sqrt{\tfrac{1}{6} \pi \sqrt{3}} = 0{,}95\,231\, u.$$

14) In ein gleichseitiges Dreieck über der Seite a sind drei gleiche Kreise beschrieben, welche die Seiten des Dreiecks und sich gegenseitig berühren. Welchen Bruchteil der Fläche des Dreiecks umschliefsen die drei Kreise?

$$\text{Br.} = (\sqrt{3} - \tfrac{3}{2})\, \pi = 0{,}729\,009.$$

15) Ls. Die Teile zweier sich rechtwinklig schneidenden Sehnen geben die Durchmesser von 4 Kreisen, deren Inhalte zusammen gleich dem des gegebenen Kreises sind. (Man trage einen der Bogen auf dem folgenden gröfseren von dem ihnen nicht gemeinsamen Endpunkte aus ab.)

---

d) Durchmesser.

16) Auf dem Ruinenberge bei Potsdam hat das Wasserbecken, aus welchem der grofse Springbrunnen vor dem Schlosse Sans-souci gespeist wird, einen Umfang von 150,96 m. Wie grofs ist der Durchmesser des Beckens? (π auf vier Bruchstellen.)

17) Wieviele Centimeter ist der Halbmesser des Kreises, dessen Umfang 1 Meter lang ist, und wieviele Quadratcentimeter beträgt der Inhalt dieses Kreises? (π auf 4 Bruchstellen.)

Antwort: Der Halbmesser ist nur 15,915 cm lang, der Inhalt aber 795,8 qcm. Der Weg, welchen der in kaum 16 cm Entfernung rundlaufende Endpunkt beschreibt, ist ein doch recht langer im Vergleich mit dem kurzen Halbmesser.

18) Wie grofs ist der Durchmesser eines Kreises von 1 qm Inhalt?

$d = 1{,}12\,838$ m.

19) Wie grofs ist der Halbmesser eines Kreises zu nehmen, damit die Sekunden seines Umfanges Zehntelmillimeter werden, also mit einer Lupe erkennbar sind? (4 Bruchstellen.)

Antwort: Zwanzig Meter und 63 cm. Das ist die Höhe des Brandenburger Thores in Berlin (ohne den Siegeswagen). Der Mittelpunkt des Kreises mufs sich oben auf dem Thore befinden, der Umfang vom Erdboden aus herum bis zur doppelten Thorhöhe empor gehen, damit man an der Kreisteilung unten mit einer Lupe Sekunden erkennen könne. Nach diesen Teilstrichen gehen die Halbmesser, welche Winkelsekunden einschliefsen!

---

e) Kreisring.

20) Einen Kreis zu beschreiben, dessen Umfang gleich der Summe zweier gegebenen Kreise ist, und einen, dessen Inhalt so grofs ist, wie die beiden Kreisflächen zusammen.

21) Den Unterschied zweier Kreise als Kreis darzustellen, a) für Umfang, b) für Inhalt.

22) Von einer gegebenen Kreisscheibe einen Ring abzutrennen, dessen Fläche gleich dem Inhalte des Kreises mit dem Durchmesser d wird.

23) Alle regelmäfsigen Vielecke über der Seite a haben zwischen dem um- und einbeschriebenen Kreise gleiche Ringe.

Allgemeiner: Beschreibt man um die Spitze eines auf der Grundseite a stehenden gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkel und Höhe Kreise, so ist der zwischen ihnen liegende ebene Ring den bei allen auf a stehenden gleichschenkligen Dreiecken ebenso zu zeichnenden Ringen gleich, trotz ihrer sehr verschiedenen Weite und Breite.

24) Der grofse Halbmesser eines regelmäfsigen Achtecks ist r. Wie grofs ist der Ring zwischen dem um- und einbeschriebenen Kreise? (4 Bruchstellen.)

$R = 0{,}4601\,r^2$.

25) Den Inhalt eines Kreisringes aus der Länge seiner Grenzkreise a und b zu bestimmen. $a = 12$, $b = 10$ cm.

26) Bei einem Ringe von der Breite b hat der Kreis, welcher mitten zwischen der äuſseren und der inneren Grenze läuft, den Umfang u. Welchen Inhalt haben die durch den Kreis entstandenen Teile und der ganze Ring? Was bedeutet die Abweichung der beiden Teile von seiner Hälfte, und die der Grenzen vom gegebenen Kreise u?

27) Einen Kreis mit dem Halbmesser r umgiebt ein Ring vom Inhalte nr^2, wo $n = 1{,}767\,144$ gegeben ist. Wie breit ist der Ring? (Fünf Bruchstellen.)

---

f) Bogen.

28) Wie lang ist im Kreise vom Halbmesser r der Bogen, auf welchem der Mittelpunktswinkel von $114^0\ 35{,}5'$ steht, und wie groſs ist der Kreisausschnitt?

29) Wie lang ist beim Kreise von 10 qcm Inhalt ein Bogen von 54^0? (π auf 4 Bruchstellen.)

30) Erklärung. Denken wir, beim Anblick eines fernen Gegenstandes, von dessen höchstem und tiefstem Punkte eine gerade Linie nach unserm Auge gezogen, so schlieſsen die beiden Linien am Auge den Winkel ein, unter welchem jener Gegenstand uns erscheint. Dieser Winkel heiſst die scheinbare Gröſse des Gegenstandes für unsern Standort. — Die Angabe „der scheinbare Durchmesser des Mondes ist 31 Minuten“ sagt: die von den Endpunkten eines Monddurchmessers in unser Auge kommenden Strahlen bilden am Auge einen Winkel von 31'. Seine Gröſse kann man als einen halben Grad sich merken. (Sie ändert sich ein wenig im Laufe jedes Monats.)

Frage. Welchen Abstand vom Auge muſs man einer Taschenuhr geben, damit sie ebenso groſs erscheine wie die Sonne? — Der scheinbare Sonnendurchmesser ist um den 1. Juli $\delta = 31^1/_2$ und um den 1. Januar $32^1/_2$ Minuten. Durchmesser einer Ankeruhr $d = 46$ mm, einer Damen-Cylinderuhr 32 mm. Der Uhrdurchmesser d ist als Bogen des Kreises vom Halbmesser x zu nehmen.*) (π auf 4 Bruchstellen.)

Antwort: $x = \frac{10\,800}{\pi}\,\frac{d}{\delta}$.

Ankeruhr, Abstand x zwischen 5 m 2 cm und 4 m 87 cm;
Damenuhr, „ x „ 3 m 49 cm und 3 m 38 cm.

Die Herren-Taschenuhr erhält erst in einer Entfernung von fünf Metern die scheinbare Gröſse der Sonne, wie wir sie an einem Sommerabende untergehen sehen — und $3^1/_3$ Meter weit vom Auge, kann die kleine Damenuhr die Sonne verdecken.

31) Richtet man auf den Stern γ im Sternbilde der Jungfrau ein groſses Fernrohr, so sieht man zwei gleich helle Sterne, die so nahe bei einander stehen, daſs sie beim Anblick mit freien Augen oder mit einem nur mäſsig vergröſsernden Fernrohre als ein Stern dritter Gröſse gesehen werden. Die vor dem Jahre 1835 ausgeführten Messungen des Zwischenraumes zwischen den beiden weiſsen Sternen zeigten fortschreitende Verminderung desselben; im Jahre 1835 lieſs auch das stärkste Fernrohr nur einen Stern erkennen (der eine befand sich also gerade vor dem andern) und seitdem nimmt ihr scheinbarer Abstand wieder zu. Aus diesen Ortsveränderungen hat Mädler berechnet, daſs die beiden Sterne in 170

---

*) Ein Bogen von 32 Minuten hat zwischen seinen Endpunkten die Seite eines regelmäſsigen 675-Ecks, die von ihm nicht meſsbar verschieden ist.

Jahren um einander herumlaufen. Ihr gegenseitiger Abstand a liegt demnach gegen Ende des 19. Jahrhunderts quer vor uns. Seine scheinbare Gröfse ist 5,0″; seine wahre Gröfse (in Kilometern) können wir nicht ermessen. Wohl aber ist leicht auszurechnen, wievielmal so grofs, als der Abstand a, ihre Entfernung von uns ist. Dazu wird a als der 5 Sekunden grofse Bogen des Kreises vom Halbmesser x genommen. (π auf 4 Bruchstellen.)

Durch das Fernrohr sieht der Doppelstern aus wie zwei ferne elektrische Kohlenlicht-Lampen. Wenn zwei solche Flammen im Abstande $a = 3$ Meter in Berlin vor einem Hause leuchten, in welcher Entfernung, rechtwinklig gegen die Vorderseite des Hauses, erscheinen die beiden hell strahlenden Flammen ebenso eng bei einander, wie die beiden Sonnen, welche Doppelstern γ der Jungfrau heifsen?

Antwort: Erst in einer Entfernung von $123^3/_4$ Kilometern. Magdeburg ist von Berlin geradeaus 124 Kilometer weit.*) Von Magdeburg aus würde man, wenn kein Hindernis dazwischen wäre, die beiden elektrischen Kohlenlicht-Lampen gerade vor sich am Hause in Berlin ebenso eng bei einander sehen, wie die beiden Sterne γ. Dieser Vergleich läfst erkennen, dafs der Doppelstern dem freien Auge als ein Stern erscheinen mufs. Hat also ein Winkel von 5 Sekunden seinen Scheitel in Magdeburg und seine Schenkel in der Richtung nach Berlin, so treten diese beiden geraden Linien, welche 20 Meter vom Scheitel $^1/_2$ mm Abstand von einander haben [nach der Berechnung in 19)] so langsam auseinander, dafs sie erst in Berlin drei Meter einspannen. — Wie weit aber mögen die Schenkel eines so schmalen Winkels laufen müssen, bis sie den gegenseitigen Abstand jenes Sonnenpaares zwischen sich fassen können! —

32) Wird um einen Halbmesser eines Kreises als Durchmesser ein Kreis beschrieben, so schneidet jeder Halbmesser des ersten Kreises von beiden Kreisen gleiche Bogen ab, die vom Berührungspunkte anfangen. — Daraus folgt: Rollt der kleine Kreis am Umfange des grofsen herum, so gleitet der Punkt, welcher anfangs Berührungspunkt war, auf seinem Durchmesser des grofsen Kreises hin und her. (Das zu sehen, zeichne man um den gewählten Halbmesser den Kreis in der dortigen Lage.) Dies gilt von jedem Berührungspunkte. Jeder Punkt des kleinen Kreisumfangs beschreibt beim Rollen der Scheibe einen geradlinigen Weg.

---

g) Ausschnitt.

33) Der Bogen eines Kreisausschnittes von 10^0 ist 1 m lang. Wie grofs ist der Halbmesser eines Kreises, welcher denselben Inhalt wie der Ausschnitt hat?

34) Wie grofs ist der Mittelpunktswinkel des Ausschnitts, dessen Umfang dem Kreisumfange gleich ist? (Beim Dividieren sind nicht Grade, sondern Sekunden zu nehmen, weil die Ungenauigkeit der letzten Bruchstelle durch die hohe Benennung eine gröfsere ist, was durch Verwandeln des Gradbruches in Minuten und Sekunden 3600mal so stark hervortritt.)

35) Ein Bogen von 12,5 cm Halbmesser ist 16 cm lang. Wie grofs ist der zugehörige Kreisausschnitt und der Winkel am Mittelpunkte?

---

*) 124 km Entfernung (in Luftlinie) haben auch Königsberg i. Pr. und Danzig, Dresden und Merseburg, Leipzig und Gotha, Frankfurt a. M. und Karlsruhe, Stuttgart und Darmstadt, und fast auch München und Ulm.

36) Der Inhalt eines Kreisausschnittes von $\alpha = 40^0$ ist $J = 1$ qm. Wie grofs ist der Halbmesser eines Kreises, welcher mit dem Ausschnitt gleichen Umfang hat?

$$x = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\alpha}{360}\right) \sqrt{\frac{360}{\alpha} \cdot \frac{J}{\pi}} = 0{,}72\,682 \text{ m.}$$

37) Wie grofs ist der Umfang eines Kreisausschnitts von 60^0, dessen Inhalt gleich dem eines gleichseitigen Dreiecks über der Seite a ist?

$$u = a\,(1 + {}^1/_6\,\pi) \sqrt{\frac{6\sqrt{3}}{\pi}} = 2{,}7711\,a.$$

---

h) Bogenfiguren.

38) Wie grofs ist ein Eckstück, welches vom Bogen und zwei halben Seiten begrenzt wird, bei dem um den Kreis vom Halbmesser r beschriebenen regelmäfsigen Sechseck?

39) Über den Seiten des dem Kreise vom Halbmesser r einbeschriebenen regelmäfsigen Sechsecks werden nach aufsen Halbkreise gezeichnet. Wie grofs ist der Umfang und der Inhalt des durch die Halbkreise begrenzten Flächenstücks?

40) Drei Kreise mit gleichem Halbmesser r berühren sich gegenseitig. Wie grofs ist Umfang und Inhalt der dreiseitigen Bogenfigur, deren Spitzen die 3 Berührungspunkte sind?

41) Über jeder Seite a eines gleichseitigen Dreiecks ist um die Gegenecke als Mittelpunkt ein Kreisbogen beschrieben. Wie grofs ist in dem Bogendreieck die Summe der Winkel, der Umfang und der Inhalt?

42) Um einen Punkt des Kreises vom Halbmesser r ziehe man mit r durch den ganzen Kreis einen Bogen, um beide Treffpunkte wieder und so noch ein paarmal. Die Bogen liefern das Bild einer sechsblättrigen Blüte. Wie grofs ist ihr Umfang, ihr Inhalt und jeder Winkel?

43) Von zwei Kreisen mit gleichen Halbmessern r liegt der Mittelpunkt des einen auf dem andern Kreise. Wie grofs sind die Winkel, der Umfang und der Inhalt des gemeinsamen Flächenstücks? (4 Bruchstellen.)

44) Um die Endpunkte eines Halbkreises beschreibe man mit dem Durchmesser zwei Bogen bis zu ihrem Treffpunkte, so dafs sie den Halbkreis überspannen. Man soll Umfang und Inhalt der Bogenfigur berechnen.

45) Setzt man an jeden Endpunkt eines Halbkreises einen Achtelkreis, dessen Mittelpunkt der andere Endpunkt ist, und schliefst man den Zug durch einen Viertelkreis, so hat die Figur das Aussehen eines Eies. Man soll ihren Umfang und Inhalt berechnen. (4 Bruchstellen.)

$$u = (3 - {}^1/_2\sqrt{2})\,\pi r = 7{,}2033\,r$$
$$J = [(3 - \sqrt{2})\,\pi - 1]\,r^2 = 3{,}9819\,r^2.$$

---

46) Sichel des Archimedes. Ist der Durchmesser eines Halbkreises durch einen Punkt in die Teile a und b zerlegt, und beschreibt man über diesen nach innen Halbkreise, so ist die Bogenfigur inhaltsgleich dem Kreise, welcher die im Teilpunkte auf dem Durchmesser stehende und bis zum Halbkreise reichende Senkrechte zum Durchmesser hat.

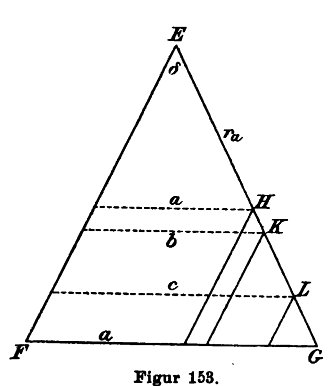
47) In einem Kreise ziehe man den senkrechten Durchmesser d, schneide auf ihm die Strecken a und b ($b > a$) beide von seinem oberen Anfangspunkte aus ab und beschreibe Halbkreise über a und b nach links und über $(d - a)$ und

(d — b) nach rechts; dann wird die Kreisfläche durch die Bogen in 3 Stücke geteilt, deren mittleres S-förmig ist und deren beide äufsere an das Fischblasenmuster der gotischen Kunstrichtung erinnern. Die drei Teile haben gleichen Umfang, den des gegebenen Kreises, und ihre Inhalte stehen in dem Verhältnis der in ihnen liegenden Abschnitte des Durchmessers. Anwendung auf den Fall, dafs der Durchmesser in n gleiche Teile zerlegt wird.

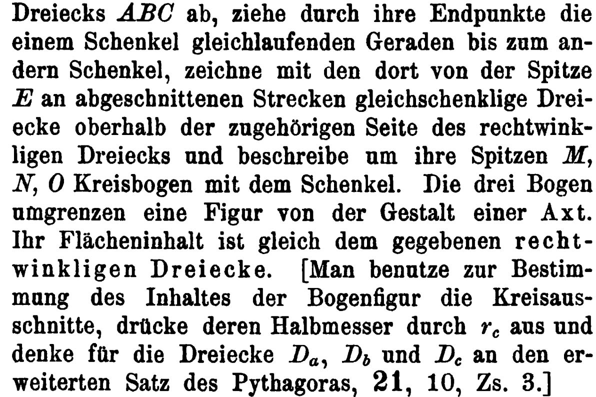
48) Mondsicheln des Hippokrates.*) Beschreibt man über den kleinen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nach aufsen Halbkreise und über der gröfsten den durch die Spitze des rechten Winkels gehenden, so sind die entstehenden Sicheln zusammen so grofs, wie das Dreieck. — Aufgabe: Eine der beim gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke entstehenden Sicheln in ein Quadrat zu verwandeln.

49) Beschreibt man über den Seiten des einem Kreise einbeschriebenen Quadrates Halbkreise nach innen, so entstehen vier Blätter, welche den Kreisabschnitten neben den Quadratseiten gleich sind. (Zum Beweise bezeichne man die Flächengröfse jedes Blattes mit B, eines Abschnitts mit A und die einer dreispitzigen Figur mit C.) — Aufgabe: Eine der von drei Viertelkreisen begrenzten Figuren in ein Quadrat zu verwandeln.

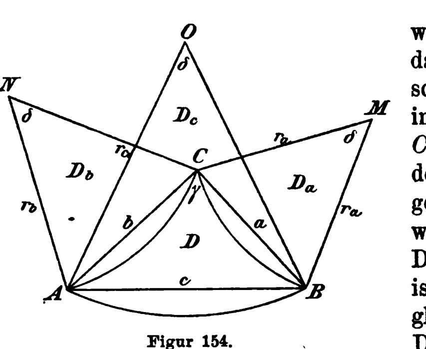
50) Man trage auf der Grundseite FG eines spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecks vom Anfangspunkte F aus die Seiten des gegebenen rechtwinkligen



Figur 153.


Dreiecks ABC ab, ziehe durch ihre Endpunkte die einem Schenkel gleichlaufenden Geraden bis zum andern Schenkel, zeichne mit den dort von der Spitze E an abgeschnittenen Strecken gleichschenklige Dreiecke oberhalb der zugehörigen Seite des rechtwinkligen Dreiecks und beschreibe um ihre Spitzen M, N, O Kreisbogen mit dem Schenkel. Die drei Bogen umgrenzen eine Figur von der Gestalt einer Axt. Ihr Flächeninhalt ist gleich dem gegebenen rechtwinkligen Dreiecke. [Man benutze zur Bestimmung des Inhaltes der Bogenfigur die Kreisausschnitte, drücke deren Halbmesser durch r_c aus und denke für die Dreiecke D_a, D_b und D_c an den erweiterten Satz des Pythagoras, 21, 10, Zs. 3.]

Der Winkel δ an der Spitze des gewählten gleichschenkligen Dreiecks EFG darf einen Rechten nicht überschreiten, weil sonst die Bogenfigur durch eine Schleife innerhalb des rechtwinkligen Dreiecks bei C ihre Gestalt verliert. Die recht verschieden gebogenen Axtfiguren, welche für das gegebene rechtwinklige Dreieck gezeichnet werden können, sind alle einander gleich. Der von den Bogen bei A gebildete Winkel ist in allen diesen Äxten gleich, nämlich gleich dem Winkel α des rechtwinkligen Dreiecks, die bei B sind immer $= \beta$; die



Figur 154.

*) Hippokrates von Chios, ein Arzt, lebte etwa 460—377 vor Christus.

bei C aber sind veränderlich; es ist der Axtwinkel $\gamma = R - \delta$. Also wird für $\delta = R \angle \gamma = 0$.

Man sieht, dafs der erweiterte Satz des Pythagoras auch für die Kreisabschnitte (und Ausschnitte) an den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks gilt. Sie sind in der That ähnlich: jeder Bogen hat δ Grad und jeder Abschnittswinkel ist $= {}^1/_2\,\delta$. [**11,** 1 am Ende und 7, Anm.]

Nachschlage-Verzeichnis

in Buchstabenordnung.

Druck von Velhagen & Klasing in Bielefeld.

Raumlehre

für

höhere Schulen.

Von

Prof. **H. C. E. Martus,**
Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

---

2. Teil:

Dreiecksrechnung und Körperlehre.



Bielefeld und Leipzig.
Verlag von Velhagen & Klasing.
1892.

Vorwort.

Unter den Übungen zur Dreiecksrechnung bringt das Buch mancherlei Aufgaben aus Messungen, welche ich im Sommer und Herbst 1867 in Potsdam und Berlin ausgeführt habe. Sie wurden in den seitdem vergangenen 24 Jahren von meinen Schülern, meist in den monatlichen häuslichen Arbeiten, besonders gern behandelt. Mag nun auch für diejenigen, welche die Bauwerke nicht aus eigener Anschauung kennen, die Höhen- oder Entfernungsbestimmung nicht ganz so hohen Reiz haben, so wird doch die Erkenntnis, wie solche Höhenmessungen genau auszuführen sind und wie die Grundlagen für eine zuverlässige Karte gewonnen werden, auf alle lebhaft anregend wirken. Dazu kommt, dafs die für die vorgelegten Aufgaben erforderliche Formelentwicklung stets gut, oft überraschend schön sich gestaltet. Den für die Winkelmessungen gebrauchten Theodoliten habe ich in meinem Lehrbuche „Astronomische Geographie"*) in Figur 19 in $^1/_3$ seiner Gröfse gezeichnet und in Nr. 23 ausführlich beschrieben. Hier ist er durch Figur 8 in $^1/_5$ seiner Gröfse bei anderer Stellung in seinen wesentlichsten Teilen wiedergegeben, und als Erklärung wurde so viel mitgeteilt, dafs man von der Winkelaufnahme eine deutliche Vorstellung gewinnt. Die stets doppelt ausgeführten Beobachtungen gewähren durch die Weite der Übereinstimmung in den Rechnungsergebnissen ein Urteil über die Güte der Messungen. Bei diesen Aufgaben der angewandten Mathematik sind die Zahlenergebnisse immer mitgeteilt; wo sie bei denen aus der reinen Mathematik nicht stehen (wie manche Lehrer es wünschen), wird man meist an der Einfachheit des Ergebnisses die Richtigkeit der Rechnung erkennen.

Da meine zuerst 1865 erschienene Sammlung „Mathematische Aufgaben" (aus Reifeprüfungen) seitdem sich weit verbreitet hat,**) habe ich, um noch mehr Übungsaufgaben für die Auswahl zur Verfügung zu stellen, hier auf

---

*) Martus, Astronomische Geographie. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Zweite Auflage mit vielen Zusätzen. Leipzig, 1888. Kochs Verlagsbuchhandlung (J. Sengbusch). 7,50 M.

**) Martus, Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. 1. Teil: Aufgaben. 8. Auflage, 1890. 3,60 M., und 2. Teil: Ergebnisse. 7. Auflage, 1891. 4,80 M. Leipzig. Kochs Verlagsbuchhandlung (J. Sengbusch).

die Nummern der hingehörigen Aufgaben verwiesen und sie so geordnet, dafs die leichter zu lösenden voranstehen. So ist das Buch mit Aufgaben so weit ausgestattet, dafs der Lehrer in mehreren Jahren damit wechseln kann.

Für den Unterricht im ganzen Gebiete der Körperlehre ist das Haupterfordernis gute Figuren. Sie sind so zu entwerfen, dafs sie die richtige räumliche Vorstellung sofort erzwingen. Schon im Jahre 1863 habe ich im Vorworte zu meiner Schrift über Kegelschnitt-Pyramiden darauf hingewiesen, dafs eine Figur die räumliche Vorstellung giebt, wenn, aufser dem schon bekannten Verstärken der in den Vordergrund tretenden Linien, Teile von Linien gar nicht gezeichnet werden, welche verdeckt werden durch Hauptebenen, besonders wagerechte Ebenen; nur in dringend notwendigen Fällen ist ihr Verlauf punktiert anzugeben. (Siehe Seite 114 in Figur 100 und 101 die sich kreuzenden Linien AB und CD). Benutzt man diese Hilfsmittel, wie mehr und mehr geschehen ist, so sind Körpermodelle gar nicht mehr erforderlich; selbst die Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei gleiche Pyramiden wird durch Figur 132 (Seite 141) vollkommen verständlich. Beim Zeichnen räumlicher Figuren sollte man aber die Hauptlehren der Perspektive nicht mehr ganz vernachlässigen. Sie finden sich noch in keinem Lehrbuche der Geometrie; in denen über Perspektive werden sie in unerträglicher Breite behandelt. Deshalb wurden hier, sogleich als Anwendung der Sätze über die Lage der geraden Linien zu einer Ebene (8, 13—16), die drei Sätze, mit denen man alle Darstellungen ausführen kann, aufgestellt und bewiesen, und ihre Benutzung an Beispielen gezeigt. Alle räumlichen Figuren vorliegenden Buches wurden nach diesen Gesetzen entworfen; die Verlagsbuchhandlung hat meine Zeichnungen in dankenswerter Weise völlig getreu im Druck wiedergeben lassen. Der Zeitaufwand, welcher zur Herstellung einer zusammengesetzten Figur erforderlich ist, sowie auch die beschränkte Gröfse der Wandtafel, hindert, beim Unterrichte die Figur genau nach den Gesetzen für Schaubilder an der Tafel entstehen zu lassen; man wird aber nach dem allgemeinen Eindrucke der im Buche gegebenen Darstellung die Figur nahezu richtig mit einem wenigstens ein Meter langen Lineal an der Schultafel zeichnen können. Beim Beweisen eines Satzes, welcher eine verwickelte Figur erfordert, wie z. B. Figur 89 oder 98, empfiehlt es sich wegen sehr bedeutender Zeitersparnis, die Schüler das Buch aufschlagen und, wo es nötig scheint, den zugehörigen Text mit einem Hefte zudecken zu lassen.

Der Mantel des Kegels, der Walze oder der Kugel wurde in keiner Figur gezeichnet; man halte die Nebenseiten des senkrechten Achsenschnitts nicht für die Seitenlinien, welche das Auge als Grenzlinien des Körpers erblickt. Wollte man diese hinzeichnen, so würde man die Figur nur

verderben durch entstehende Undeutlichkeit gedrängter Linien. Diese Grenzlinien müssen nämlich aufserhalb der Schnittfigur, die als Zeichenebene dient, zur Darstellung kommen, weil jene Stelle der Zeichenebene dem Auge verdeckt wird durch solche Grenzlinie, die wegen der Wölbung des Körpers aus der Zeichenebene heraustritt.

Zu dem im 20. Gliede Behandelten ist zu erwähnen, dafs ich schon im Jahre 1864 mir ausarbeitete, wie man die Gleichungen der Kegelschnitte durch einfache Betrachtung am Kegel selbst ablesen könne. Ich veröffentlichte dies bald darauf im Anhange (§ 7) zum 2. Teile des Lehrbuches meines Schwiegervaters, des Herrn Prof. Meyer, Prorektor am Gymnasium zu Potsdam.

Die in vorliegendem Lehrbuche weiter geführte Verwandlung fremdsprachlicher Bezeichnungen in Ausdrücke der Muttersprache vollzieht sich längst bei den Völkern; aber durch die hemmende Gewohnheit nur langsam; wie langsam, zeigt sich z. B. aus folgendem. Seit langer Zeit sagt jeder deutsche Mathematiker „Brennpunkt“ statt „Focus“; aber in den Figuren hat man den Buchstaben F noch nicht in den Anfangsbuchstaben B verwandelt. Man halte doch nicht mehr am Buchstaben fest!

Berlin, im September 1891.

Hermann Martus.

Inhaltsangabe vom zweiten Teile.

Dreiecksrechnung.

Körperlehre.

1. Abschnitt. Ebenen und gerade Linien im Raume.

2. Abschnitt. Körper.

3. Abschnitt. Figuren auf krummen Flächen.

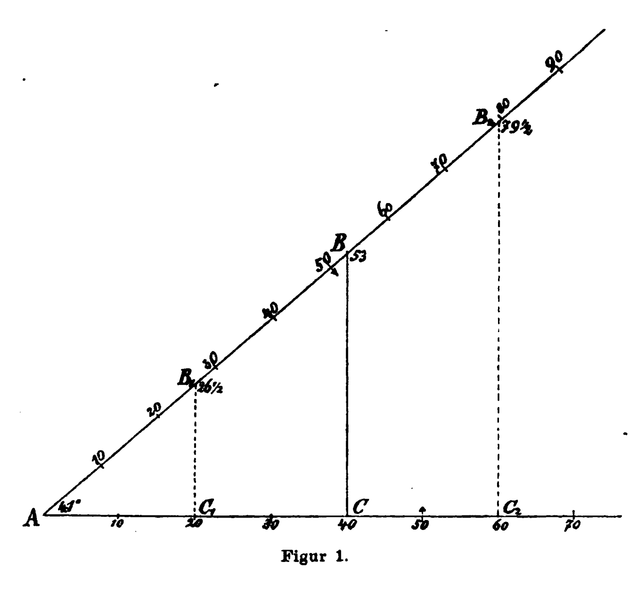
Dreiecksrechnung.

(Trigonometrie.)

1. Glied. Das rechtwinklige Dreieck.

1. Einleitung.*) Wir betrachten einen Winkel von 41 Grad.

1) Errichtet man auf dem einen Schenkel AC in demjenigen Punkte C, welcher vom Scheitel A 40 Millimeter entfernt ist, die Senkrechte, so schneidet sie vom andern Schenkel eine Strecke AB ab, welche genau 53 mm lang ist. Dieses Zahlenpaar, 40 und 53, ist das einfachste, welches man bei dem Winkel von 41^0 durch Errichten einer Senkrechten erhalten kann. Denn nimmt man den Abstand vom Scheitel A nur halb so grofs, $AC_1 = 20$ mm, so kommt auf dem andern Schenkel auch die Hälfte, $AB_1 = 26^1/_2$ mm, also eine gemischte Zahl; geht man um die Hälfte weiter, $AC_2 = 60$ mm, so liefert die in C_2 errichtete Senkrechte auf dem zweiten Schenkel die Strecke AB_2 auch um die Hälfte länger, $AB_2 = 53 + 26^1/_2 = 79^1/_2$ mm; in der doppelten Entfernung, bei 80 mm, würde auf dem andern Schenkel auch das Doppelte, 106 mm, gefunden werden. Nach dem Verhältnissatze



Figur 1.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} \quad \left(1.\ \text{Teil, } 18,\ 3.\right)$$

mufs jede Senkrechte Mafszahlen liefern, welche in gleichem Verhältnis stehen,

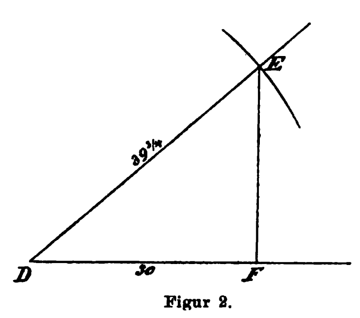
$$\frac{40}{53} = \frac{20}{26^1/_2} = \frac{60}{79^1/_2} = \frac{80}{106} = \ldots.$$

alle Brüche gehen durch Kürzen in den ersten über, welcher ihren Wert durch die einfachsten Zahlen angiebt.

---

*) Der Lehrer entwickle zunächst die ersten Sätze aus der Lehre von den Logarithmen und zeige das Aufschlagen der Logarithmen ein- bis vierstelliger Zahlen. In vorliegendem Buche sind die Rechnungen mit fünfstelligen Logarithmen ausgeführt.

Jedes rechtwinklige Dreieck, in welchem eine kleine und die gröſste Seite das Verhältnis 40 : 53 haben, besitzt zwischen diesen einen Winkel von 41°. Denn errichtet man z. B. im Endpunkte einer 30 mm langen Strecke *DF* auf ihr die Senkrechte und schneidet vom Anfangspunkte *D* aus in diese mit $39^{3}/_{4}$ mm Halbmesser ein, so liefert der nach dem Schnittpunkte *E* gezogene Halbmesser ein rechtwinkliges Dreieck, welches nach dem 4. Satze dem obigen Dreiecke *ABC* ähnlich ist; folglich sind ihre Winkel gleich. Das gezeichnete Dreieck *DEF* hat also den Zwischenwinkel *D* auch von 41°.



Figur 2.

Diesem echten Bruche $^{40}/_{53}$, welcher durch die einschlieſsenden Seiten dem Winkel von 41° angehört, hat man den Namen Kosinus von 41° gegeben. Man schreibt

$$\cos 41^0 = {}^{40}/_{53}.$$

Das Rechnen mit solchem gemeinen Bruche ist unbequem; seine Verwandlung in einen Zehnerbruch wird durch die Menge der Bruchstellen noch schlimmer. Da das Rechnen mit Logarithmen das Ziffernrechnen auſserordentlich erleichtert, hat man den Logarithmus dieses Bruches bestimmt und das Ergebnis in der Logarithmentafel zum Nachschlagen für den Gebrauch angegeben. Es ist

$$\log \cos 41^0 = \log 40 - \log 53.$$

Da $\log 40 = 1{,}60206 = 11{,}60206 - 10$
und $\log 53 = 1{,}72428$ ist,
so ergiebt sich $\log \cos 41^0 = 9{,}87778 - 10$
und so steht der Logarithmus von cos 41° in der Tafel ohne die hinten stets hinzuzudenkende — 10.

2) Man kann den Winkel von 41° auch durch Messen zweier anderer Seiten des rechtwinkligen Dreiecks bestimmen. Das Messen wird aber nur dann die erforderliche Genauigkeit liefern, wenn man eine solche Stelle aufsucht, bei welcher beide Seiten eine ganze Zahl von Millimetern ergeben. Für die Gegenseite und die gröſste Seite tritt dies ein, wenn man von demjenigen Punkte des Schenkels *AB*, welcher 157 mm vom Scheitel *A* entfernt ist, die Senkrechte auf den andern Schenkel *AC* fällt. Die Senkrechte ist genau 103 mm lang. Für Gegenseite und gröſste Seite ist dieses Zahlenpaar, 103 und 157, das einfachste. Nach dem Verhältnissatze muſs jedes andere Paar gleichliegender Seiten beim Winkel von 41° Maſszahlen liefern, welche auf den Bruchwert $^{103}/_{157}$ durch Kürzen zurückkommen. Und umgekehrt: stehen eine kleine und die gröſste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks im Verhältnis 103 : 157, so hat der Gegenwinkel der kleinen Seite die Gröſse von 41°, weil das Dreieck dem erstgedachten nach dem 4. Satze ähnlich ist. Dieses andere dem Winkel von 41° zukommende Verhältnis von Gegenseite und gröſster Seite, $^{103}/_{157}$, wird der Sinus von 41° genannt. Man schreibt

$$\sin 41^0 = {}^{103}/_{157}.$$

Zum Rechnen wird sein Logarithmus verwandt, den man erhält durch

$$\begin{array}{r} \log 103 = 2{,}01\,284 = 12{,}01\,284 - 10 \\ \log 157 = 2{,}19\,590 \\ \hline \log \sin 41^0 = 9{,}81\,694 - 10 \end{array}$$

wie er in der Logarithmentafel angegeben ist.

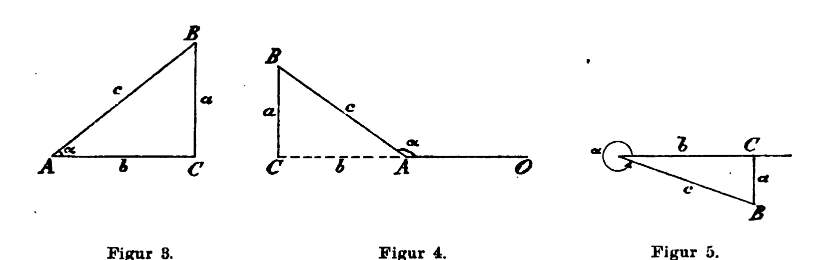
3) In jedem dieser beiden mit besonderen Namen belegten Verhältnisse wurde die größte Seite des rechtwinkligen Dreiecks benutzt. Nun wollen wir die beiden kleinen Seiten nehmen. Für beide findet man beim Messen eine ganze Zahl von Millimetern, wenn man auf dem Schenkel AC in dem 153 mm vom Scheitel entfernten Punkte die Senkrechte bis zum andern Schenkel errichtet. Sie wird genau 133 mm lang. In jedem rechtwinkligen Dreiecke, dessen kleine Seiten im Verhältnis 133 : 153 stehen, hat der kleinste Winkel die Gröfse von 41⁰, weil alle diese Dreiecke nun nach dem zweiten Satze jenem ähnlich sind. Bei den Namen der beiden ersten Verhältnisse entschied das Vorderglied; auch hier ist auf den Anfang zu achten. Beginnt man mit der Gegenseite des Winkels, so heifst das Verhältnis Tangens; kehrt man das Verhältnis um und fängt mit der anliegenden kleinen Seite an, so führt dieser andere Wert den Namen Kotangens.

Also

$$\begin{array}{rl} \operatorname{tg} 41^0 = & {}^{133}/_{153} \\ \log 133 = & 12{,}12\,385 - 10 \\ \log 153 = & 2{,}18\,469 \\ \hline \log \operatorname{tg} 41^0 = & 9{,}93\,916 - 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \operatorname{ctg} 41^0 = & {}^{153}/_{133} \\ \log 153 = & 2{,}18\,469 \\ \log 133 = & 2{,}12\,385 \\ \hline \log \operatorname{ctg} 41^0 = & 0{,}06\,0\text{ṡ}4. \end{array}$$

Anmerkung. Für die umgekehrten Werte von Kosinus und Sinus geben wir keine Namen an, da diese Gröfsen nicht nötig sind.

2. Erklärung der Winkelfunktionen. Fällt man bei irgend einem Winkel α von einem beliebigen Punkte B des einen Schenkels die



Figur 3. Figur 4. Figur 5.

Senkrechte auf den andern Schenkel, und ist in dem entstandenen rechtwinkligen Dreiecke a die Mafszahl der Gegenseite von α, b die der anliegenden kleinen und c die der gröfsten Seite, so nennt man das Verhältnis

$$\frac{\textbf{Gegenseite}}{\textbf{gröfste Seite}} \quad \textbf{Sinus}, \quad \text{also} \quad \textbf{1.} \quad \frac{a}{c} = \sin\alpha$$

$$\frac{\text{kleine } \textbf{Anseite}}{\textbf{gröfste Seite}} \quad \textbf{Kosinus}, \quad \textbf{2.} \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

$\frac{\text{Gegenseite}}{\text{kleine Anseite}}$	**Tangens,**	3.	$\frac{a}{b} = \text{tg}\ \alpha$
$\frac{\text{kleine Anseite}}{\text{Gegenseite}}$	**Kotangens,**	4.	$\frac{b}{a} = \text{ctg}\ \alpha.$

Zu merken: Fängt die **An**seite an, so fängt der Name mit **Ko** an.

Diese vier Gröſsen nennt man Winkelfunktionen.

Aus der Erklärung folgt:

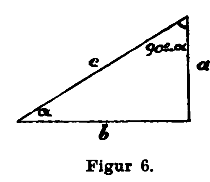
Sinus und Kosinus sind unbenannte **echte Brüche**; aber Tangens und Kotangens können auch über 1 hinaus wachsen.

Beispiele. 1) Errichtet man bei einem Winkel von 17° auf einem Schenkel in dem vom Scheitel 157 mm entfernten Punkte die Senkrechte bis zum andern Schenkel, so wird sie 48 mm lang. Errichtet man die Senkrechte in dem 197 mm vom Scheitel abstehenden Punkte, so schneidet sie vom andern Schenkel, vom Scheitel an, eine Strecke von 206 mm ab; und fällt man vom zweiten Schenkel von dem um 236 mm vom Scheitel entfernten Punkte die Senkrechte auf den ersten Schenkel, so erhält sie eine Länge von 69 mm. Man berechne die Logarithmen der 4 Funktionen des Winkels von 17°.

2) Von welchem Winkel hat der Kosinus den Wert 0,788? und wie groſs ist $\angle x$ in $\text{tg}\ x = 0{,}5317$?

3) Die kleinen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie 326 : 159. Wie groſs ist der Kosinus des kleinsten Dreieckswinkels?

3. Funktionen der spitzen Winkel, die sich zu 90° ergänzen.



Figur 6.

Weil der in demselben rechtwinkligen Dreiecke mit α befindliche andere spitze Winkel $(90^0 - \alpha)$ ist, so sind auch seine Funktionen durch a, b und c auszudrücken. Dadurch entstehen folgende Gleichungen:

$$5.\quad \begin{cases} \sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha & \text{tg}\,(90^0-\alpha) = \text{ctg}\,\alpha \\ \cos(90^0-\alpha) = \sin\alpha & \text{ctg}\,(90^0-\alpha) = \text{tg}\,\alpha. \end{cases}$$

Sinus und Kosinus sind, weil in beiden die Maſszahl der gröſsten Seite der Nenner ist, zusammengehörige Funktionen, also als Kofunktionen zu bezeichnen. Andererseits gehören Tangens und Kotangens zusammen; sie sind Kofunktionen. Deshalb kann man diese Formeln in dem Lehrsatze zusammenfassen:

Jede Funktion eines spitzen Winkels ist gleich ihrer Kofunktion von dem Winkel, der ihn zu 90° ergänzt.

Es ist also z. B. $\sin 60^0\ 30' = \cos 29^0\ 30'$ und $\text{tg}\ 60^0\ 30' = \text{ctg}\ 29^0\ 30'$. Deshalb stehen in den Logarithmentafeln die Winkel von 45° an unten und ihre Minuten gehen (rechts) nach oben.

Beispiele. 1) Von welchem Winkel hat der Sinus und von welchem der Kosinus den Wert $^{176}/_{181}$?

2) Wie groſs sind die Winkel x und y in der Gleichung

$$\text{ctg}\ x = \text{tg}\ y = {}^{333}/_{316}?$$

4. Berechnung zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aus einer Seite und Winkelfunktionen.

Beseitigt man in den Formeln 1 bis 4 unter Nr. 2 die Nenner, so ergiebt sich

$$6.\begin{cases} a = c \sin\alpha \\ a = b \operatorname{tg}\alpha \end{cases} \qquad 7.\begin{cases} b = c \cos\alpha \\ b = a \operatorname{ctg}\alpha \end{cases} \qquad \text{daher } 8.\begin{cases} c = \dfrac{a}{\sin\alpha} \\ c = \dfrac{b}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Besonders zu beachten sind in den Ausdrücken für c die **Nenner**; denn die kleinen Seiten *a* und *b* müssen durch einen echten Bruch **dividiert** werden, um eine längere Strecke zu liefern.

Beispiele. 1) Wie grofs ist in einem rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel 8^0 seine Gegenseite, wenn die kleine Anseite 185 mm lang ist, und wie grofs wird sie, wenn man der gröfsten Seite die Länge von 194 mm giebt?

2) Die gröfste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks mit einem Winkel von 16^0 aus dessen kleiner Anseite zu berechnen, die 27,3 cm lang ist.

3) Die kleinste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks mit einem Winkel von 44^0 beträgt 9,1 cm. Wie lang ist die gröfste Seite?

4) Eine kleine und die gröfste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie 77 : 94. Wie grofs ist die dritte Seite, wenn die Länge der gröfsten 265 mm beträgt?

5) Eine kleine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem der Sinus eines Winkels 0,9397 ist, hat 272 mm Länge. Wie grofs ist die kleinste Seite?

5. Messung eines Winkels bis auf Minuten genau.

Giebt man einem Winkelmesser den Halbmesser des äufseren Halbkreises etwas gröfser, als er in den gewöhnlichen Reifszeugen ist, nämlich 57,3 mm, so wird am Rande der Abstand je zweier Gradstriche

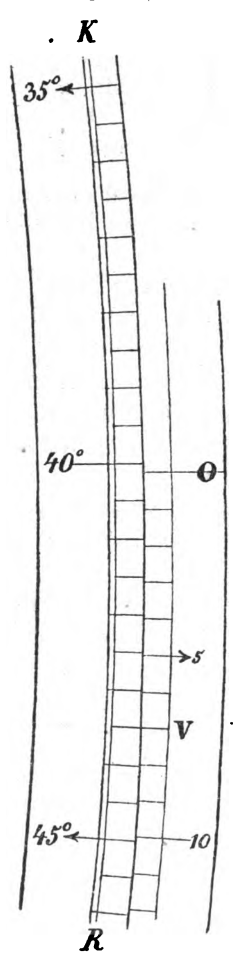
$$\frac{\pi}{180}\, r = 1 \text{ mm}.$$

Die Teilung solches ein **Millimeter** kleinen Abstandes in sechzig Minuten müfste man mit glasharter Stahlspitze mittels einer Teilmaschine ausführen lassen und dann, um die Teilstriche von einander unterscheiden zu können, ein Mikroskop anwenden. Die kostspielige wirkliche Teilung in 60 Minuten ist mithin zum Gebrauch ungeschickt.

Um an einem nur in halbe Grade geteilten Kreise von der angegebenen Gröfse ($r = 57$ mm) noch Minuten mit Sicherheit ablesen zu können, bedient man sich eines Hilfsmittels, Vernier genannt.*) Dieses besteht in einer Nebenteilung, welche aufsen auf einer besonderen Platte unmittelbar an der Hauptteilung angebracht ist. Die Figur 7 zeigt (in zehnfacher Gröfse)

*) Pierre Vernier beschrieb diese Vorrichtung in einer Schrift im Jahre 1631. Ein anderer Name wurde mit Unrecht auf sie übertragen.

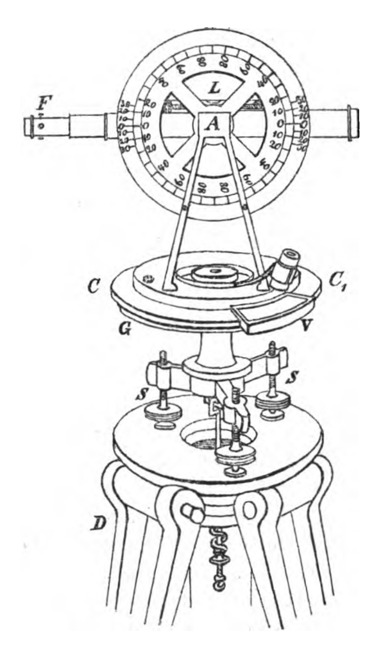
ein Stück *KR* des ganzen Kreises und daneben den Vernier *OV*. Auf diesen ist eine Strecke von 29 halben Graden vom Nullstrich *O* an nach unten übertragen und dort in 30 gleiche Teile zerlegt; so daſs hier der Abstand von Strich zu Strich $^{29}/_{2} : 30 = {}^{29}/_{60}$ Grad = **29** Minuten beträgt, während auf der Hauptteilung *KR* die Striche **30** Minuten Abstand haben. In der gezeichneten Stellung des Kreises trifft der siebente Strich des Vernier, an welchem der Buchstabe *V* steht, mit einem Striche der Hauptteilung zusammen; folglich treten der darüber befindliche Strich des Vernier und der des Kreises, welche von ihnen 29 und 30 Minuten abstehen, um 1 Minute auseinander; der folgende Strich der Hauptteilung übersteigt den Vernierstrich Nr. 5 um 2 Minuten, bei Nr. 4 ist der Zwischenraum 3 Minuten und so immer eine Minute mehr; so daſs der Abstand zwischen dem Nullstriche *O* des Vernier und dem Hauptstriche 40° 7 Minuten beträgt. Der eine Schenkel des zu messenden Winkels am Kreismittelpunkte geht durch den in der Figur weiter hinauf zu denkenden Nullpunkt der Hauptteilung, der andere durch den Nullstrich des Vernier; der Winkel hat also 40° und 7 Minuten. Man findet demnach ohne Mühe die Anzahl der Minuten, indem man mit der Lupe denjenigen Vernierstrich aufsucht, welcher mit einem Striche der Hauptteilung genau zusammenstimmt; seine Nummer ist die Zahl der Minuten. (S. 1. T., **22**, 14, 19.)



Figur 7.

6. Bestimmung der Höhe von Bauwerken. Die dazu nötige Winkelmessung wird mit einem **Theodoliten** ausgeführt. Derselbe besteht aus einem Fernrohre *F* (Figur 8), auf dessen Querachse (bei *A*) der in Nr. **5** besprochene eingeteilte Kreis *K* durch 4 Speichen festsitzt, so daſs er der auf- und niedergehenden Bewegung des Fernrohres folgt; der Vernier aber, rechts und links auf einem den Kreis umschlieſsenden Ringe nach unten und oben angebracht, ist angeschraubt an zweien von den vier Füſsen des Fernrohrträgers, steht also in der Stellung fest, daſs sein Nullstrich wagerecht ist. Bringt man das Fernrohr in die wagerechte Lage mit dem Nullpunkte der Kreisteilung an den Nullstrich des Vernier (wie es die Figur darstellt), so kann man dem Nullstriche des Vernier die genaue wagerechte Lage geben durch Drehen an den 3 Stellschrauben *S*, bis die Luftblase der Röhrenlibelle *L*, welche auf dem Fernrohre der Länge nach befestigt ist, in der Mitte steht.*)

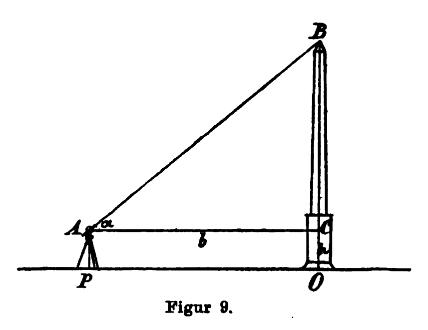
*) Zur annähernd guten Aufstellung des den Theodoliten tragenden Dreifuſses *D* dient die in der Mitte des Kreises CC_1 befestigte Dosenlibelle. Um den Standort des Theodoliten auf dem Erdboden genau zu bezeichnen, läſst man ein Senklot hinab von dem Häkchen unten an dem langen senkrechten Haken, mit welchem der Theodolit auf dem Dreifuſse festgemacht ist durch die gegen eine Zwischenplatte anstemmende Sprungfeder.



Figur 8. Theodolit, in 1/5 seiner Grösse.

Richtet man das Fernrohr auf nach dem höchsten Punkte *B* des Bauwerks (Figur 9), so gleiten die Kreisteilstriche 10°, 20°, 30° . . . . am Vernier-Nullstriche hin und man liest nach erfolgter Einstellung auf den Zielpunkt mit der Lupe am Vernier ab*) die Grade und Minuten des Winkels α, unter welchem die Richtung *AB* über der Wagerechten *AC* ansteigt.

Wie hoch der Scheitel des Winkels α über der Grundfläche *O* der Höhe sich befindet, sieht man vorher durch das noch wagerecht liegende Fernrohr an einer auf der Grundfläche *O* von einem Gehilfen senkrecht gehaltenen Nivellierlatte, das ist ein 2 m langer Mafsstab, auf welchem der Zwischenraum zwischen den Centimetern abwechselnd weifs und rot ausgefüllt ist, weil man aus gröfserer Entfernung Teilstriche durch das mäfsig vergröfsernde Fernrohr nicht deutlich würde erkennen können. Im Innern des Fernrohres befindet sich zwischen den mit *F* bezeichneten Schrauben (Figur 8) ein Ring, dessen wagerechter und senkrechter Durchmesser von zwei Spinnewebfäden gebildet wird. Ihr Kreuzpunkt giebt dem Beobachter die Längsachse des



Figur 9.

*) Die Lupe ist in Figur 8 nur bei einem Vernier *V* der Grundkreisteilung gezeichnet. Dieser befindet sich, durch eine Glasplatte gegen Staub geschützt, an dem mit dem Fernrohrträger drehbaren Deckel CC_1, welcher mit übergreifendem Rande den feststehenden, in 360° geteilten Grundkreis *G* bedeckt.

Fernrohrs an. Der Querfaden erscheint dann vor einem weifsen oder roten Centimeterfelde der Nivellierlatte, und man kann der Zerlegung des Feldes gemäfs nach einiger Übung die Millimeter gut abschätzen.

Endlich ist noch der Abstand CA von der Höhe, als OP bis zum Fufspunkte des unter dem Theodoliten herabgelassenen Senklotes AP, mit einer 20 m langen Mefskette zu messen. In ihre meist $^1/_2$ m langen Glieder aus starkem Eisendraht ist immer nach $2^1/_2$ Metern ein die Meterzahl angebendes längliches Messingstück eingeschaltet, auf welchem der Teilstrich quer eingeschnitten ist. Auf dem an den Standort des Theodoliten kommenden Kettengliede mifst man mit einem Handmafsstabe die bezeichnete Stelle in Centimetern und Millimetern ab, auf welche das Senklot AP mit seiner Spitze hinwies.

Beispiele. 1) Höhe des Gebäudes der Universität in Berlin. In dem Garten zwischen den beiden Seitenflügeln des Universitätsgebäudes wurde ein Theodolit aufgestellt, sein Fernrohr nach Angabe der darauf befestigten Röhrenlibelle genau wagerecht gerichtet auf eine Nivellierlatte, welche senkrecht gehalten wurde auf der in der Ebene des Gartens vor der Thür des östlichen Flügels liegenden Granitplatte (links von O in Figur 9 zu denken), und durch das Fernrohr abgelesen, dafs die Querachse A des Theodolitenfernrohrs sich $CO = h = 1{,}498$ m über dieser Grundebene befand. Darauf wurde das Fernrohr nach dem oberen Rande des steinernen Geländers auf dem flachen Dache des östlichen Seitenflügels emporgerichtet. Der bei diesem Aufrichten von der verlängerten Längsachse des Fernrohrs beschriebene Winkel CAB wurde am Seitenkreise des Theodoliten $\alpha = 40^0\ 29'$ abgelesen. Sein Scheitelpunkt A hatte von der zu bestimmenden Höhe BO den Abstand $CA = OP = b = 22{,}82$ m. — Ebenso wurde in etwas gröfserer Entfernung beobachtet $h_1 = 1{,}488$ m, $\alpha_1 = 35^0\ 23'$ und $b_1 = 27{,}43$ m. Wie grofs ergiebt sich aus diesen beiden Messungen die Höhe des Universitätsgebäudes über der durch jene Granitplatte fest bestimmten Ebene des Gartens?

Formelentwicklung. Ist OB x Meter lang, so liefert BC

$$x - h = AC \text{ tg } \alpha$$

also ist

$$x = b \text{ tg } \alpha + h.$$

Rechnung. (Jede Zeile ist sogleich für beide Messungen hinzuschreiben.)

	1.	2. Messung.
$\log b =$	1,35 832	1,43 823
$\log \text{tg } \alpha =$	9,93 124	9,85 140 [— 10]
$\log (x - h) =$	1,28 956	1,28 963
$x - h =$	19,479	19,482
$h =$	1,498	1,488
$x =$	20,977 m	20,970 m.

Die Ergebnisse unterscheiden sich nur um 7 mm, das ist rund $^1/_{3000}$ der zu bestimmenden Höhe.*) Der Mittelwert würde sein 20,9735 m. Da es aber

*) Solche Messungen müssen mindestens zweimal ausgeführt werden, um durch die Rechnung zu erkennen, wie weit das Ergebnis beeinflufst wird durch die begrenzte Genauigkeit der Messungen. Denn bei den Winkeln sind Sekunden gar nicht abzulesen, und bei der zweiten, in entgegengesetzter Richtung erfolgenden Messung einer über 20 m langen Strecke auf dem Erdboden erhält man trotz grofser Sorgfalt nicht etwa die Millimeter in gleicher Anzahl wieder.

auf Millimeter hier nicht ankommt, zumal das Zinkblech, welches das steinerne Geländer oben auf dem Dache deckt, keineswegs eine wagerechte Ebene bildet, so lautet die Antwort: Der östliche Flügel des Universitätsgebäudes ist 20,97 m über der durch die bezeichnete Granitplatte bestimmten Fläche des Gartens.

2) Höhe des Obelisken Friedrichs des Grofsen vor Sans-souci. In einem Abstande von der Höhe OB (Figur 9), $AC = OP = b = 25{,}64$ m, hatte die Richtung nach der Spitze B des Obelisken den Steigungswinkel $BAC = \alpha = 40^0\ 19'$, wobei der Scheitel A des Winkels $OC = h = 0{,}993$ m hoch über der Grundfläche sich befand. Bei der zweiten, in gröfserer Entfernung vollzogenen Messung war $b = 32{,}25$ m. $\alpha = 34^0\ 0'$, $h = 0{,}980$ m und bei der dritten Messung $b = 22{,}77$ m, $\alpha = 43^0\ 42'$, $h = 1{,}010$ m. Wie grofs ist demnach die Höhe des Obelisken?

Ergebnis. $x_1 = 22{,}75$ m, $x_2 = 22{,}73$ m, $x_3 = 22{,}77$ m. Die Höhe des Obelisken ist 22,75 m. Die durch kleine Messungsfehler bewirkten Abweichungen von 2 cm betragen noch nicht $^1/_{1000}$ der Höhe.

7. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist

$$9. \qquad \triangle = {}^1/_2\ ab \sin\gamma.$$

Dieser Ausdruck geht aus der Formel $\triangle = {}^1/_2\ ah$ hervor.

Anmerkung. Die Inhaltsformel gilt auch, wenn γ ein stumpfer Winkel ist. (Nr. 2, Figur 4.)

Zusatz. Der Inhalt einer Raute mit den Seiten a und b und dem Zwischenwinkel γ ist $R = ab \sin\gamma$.

8. Mittels des rechtwinkligen Dreiecks wird berechnet

1) das **gleichschenklige Dreieck**; denn die Höhe auf der Grundseite teilt es in zwei übereinstimmende rechtwinklige Dreiecke.

2) das **gleichseitige Viereck**; denn die Eckenlinien zerlegen es in 4 übereinstimmende rechtwinklige Dreiecke.

3) die **regelmäfsigen Vielecke**; weil das Bestimmungsdreieck gleichschenklig ist.

4) jeder **Kreisabschnitt**; denn man hat vom Kreisausschnitt ein gleichschenkliges Dreieck abzuziehen (oder, wenn der Abschnitt gröfser als der Halbkreis ist, hinzuzufügen).

9. Übungen.

1) Um die Höhe der Andreaskirche in Berlin zu bestimmen, wurde in einem vor dem Turme auf dem Stralauer Platze gewählten Standpunkte der Steigungswinkel der Richtung nach der Spitze $\alpha = 54^0\ 51'$ gemessen. Sein Scheitel hatte von der Turmhöhe den Abstand $b = 42{,}40$ m*) und war $h = 1{,}210$ m hoch über der Grundfläche. (Dies ist die Erweiterung der Granitplatte des Bürgersteiges vor dem Turmeingange.) Eine zweite Messung lieferte $\alpha = 44^0\ 39'$, $b = 60{,}72$ m und $h = 1{,}448$ m.

Ergebnis. Die Höhe der Andreaskirche beträgt 61,43 m.

2) Wie hoch wird über der 5,236 m langen Grundseite das gleichschenklige Dreieck, in welchem jeder Grundwinkel $89^0\ 51'$ ist?

*) Die Lage des Höhenfufspunktes wurde aus der Mitte des Seitenanbaues bestimmt, und dann der übrige Teil der Entfernung weiter gemessen.

3) Wie lang sind die Eckenlinien des gleichseitigen Vierecks von 31 cm Seite und einem Winkel von 68^0?

4) Um wieviel ist im Kreise von neun Centimeter Durchmesser ein Bogen von 10^0 länger als seine Sehne?

5) Wie grofs ist der Inhalt des regelmäfsigen Neunecks im Kreise von 7,153 m Halbmesser?

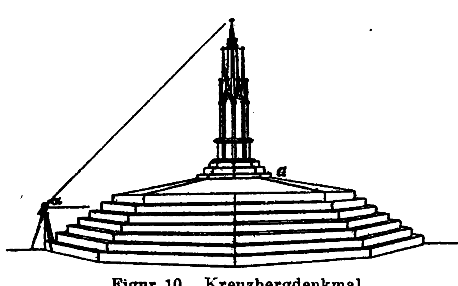
6) Wie grofs wird der Inhalt eines regelmäfsigen 25-Ecks von $a = 7{,}523$ m Seite?

7) In und um den Kreis von 1 m Durchmesser ist ein regelmäfsiges Hunderteck beschrieben. Um wieviel ist der Umfang des einen kleiner, der des andern gröfser als der Kreisumfang?

8) Wie lang sind der grofse und der kleine Durchmesser eines regelmäfsigen 80-Ecks von 70 cm Seite?

9) Höhe des Denkmals auf dem Kreuzberge bei Berlin.

Das Denkmal steht auf einem Treppenaufbau, welcher ein regelmäfsiges Achteck bildet. Die äufsere Kante der untersten Stufe hat eine Länge von $s = 12{,}616$ m. Senkrecht über einem Eckpunkte dieser Stufe hatte die Richtung zum obersten Rande des eisernen Kreuzes auf der Spitze des Denkmals den Steigungswinkel $\alpha = 50^0\ 15'$, dessen Scheitel 0,618 m unter der Grundfläche (G) des Denkmals sich befand. Eine zweite Messung, die über einem Eckpunkte der dritten Stufe von unten ebenso ausgeführt wurde, lieferte $s = 12{,}098$ m und $\alpha = 50^0\ 54'$ mit der Scheitelhöhe $h = -0{,}237$ m. Man berechne aus beiden Messungen die Höhe des Denkmals, und ebenfalls aus beiden Ergebnissen die Entfernung des Denkmals vom Berliner Rathausturme, auf welchem die scheinbare Gröfse des Denkmals $\beta = 17$ Winkelminuten gemessen wurde.*) Die Entfernung y ist der Halbmesser des Kreises, in welchem der Mittelpunktswinkel β auf einem Bogen steht, dessen Gröfse von der Denkmalshöhe x nicht mefsbar verschieden ist.



Figur 10. Kreuzbergdenkmal.

Ergebnis. $x_1 = 19{,}202$ m und $x_2 = 19{,}213$ m. Die Abweichung der Ergebnisse ist nur $^1/_{1700}$ der Höhe. Das Kreuzbergdenkmal ist 19,21 m hoch.

$$y_1 = 3\,883 \text{ m und } y_2 = 3\,885{,}3 \text{ m.}$$

Der Unterschied dieser Entfernungsgröfsen hat innerhalb des vergoldeten Gitters auf dem Rathausturme reichlich Platz; denn der Rand des Geländers ist ein regelmäfsiges Achteck von 2,177 m langer Seite. Die Entfernung des Kreuzbergdenkmals vom Rathausturme beträgt 3,88 km. (Vergl. 6, 5, 9.)

10) Wie grofs ist im Kreise von $r = 47{,}49$ cm Halbmesser der Inhalt des Abschnitts, dessen Bogen $\alpha = 21^0\ 36'$ beträgt?

11) Zum Inhalt des Dreiecks: Martus, mathemat. Aufgaben, Nr. 337, 353, 280, 253.

---

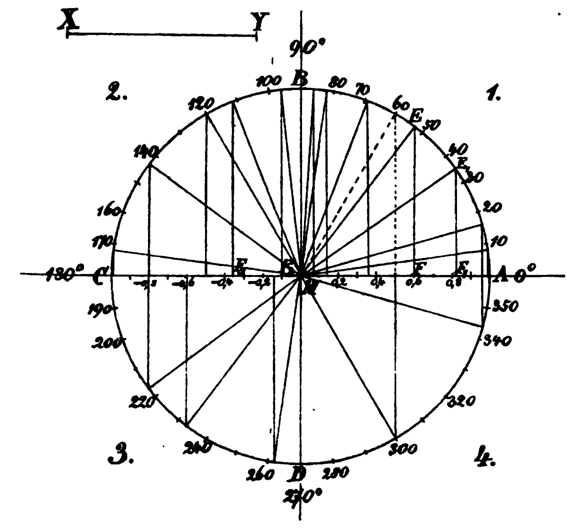
*) Bei dieser Beobachtung, vom vergoldeten Gitter des Rathausturmes aus, hatte die Richtung nach dem Fufse des Denkmals, welches damals (1867) noch nicht auf den grofsen Unterbau durch Wasserpressen gehoben war, einen Senkungswinkel von $0^0\ 42^1/_2{}'$ und die Richtung nach dem Gipfel auch einen Senkungswinkel und zwar von $0^0\ 25^1/_2{}'$.

2. Glied. Die Werte der Winkelfunktionen.

1. Änderung der Bruchwerte der Funktionen mit dem Winkel.

1) **Kosinus.** In Figur 11 ist mit dem beliebig lang gewählten Längenmafse XY um M ein Kreis beschrieben und sein Umfang vom Anfangspunkte A des wagerechten Durchmessers aus von 10 zu 10 Grad abgeteilt; auch sind die Halbmesser MA und MC von M aus in Zehntel zerlegt. Der Winkel AME ist 53^0. Zur Bestimmung seines Kosinus sind MF und ME zu messen. In MF gehen die Zehntel des Längenmafses auf und geben 6 Zehntel; in ME geht das Längenmafs natürlich einmal; also ist

$$\cos 53^0 = \frac{0,6}{1} = 0,6.$$



Figur 11.

Der Winkel AME_1 ist 35^0. Seine kleine Anseite MF_1 läfst beim Messen mit den Zehnteln des Mafses einen kleinen Rest, den man als den fünften Teil des folgenden Zehntels erkennt. Der Rest ist $^1/_5$ Zehntel $= ^1/_{50}$ $= 0,02$, also ergiebt sich $MF_1 = 0,8 + 0,02 = 0,82$; mithin

$$\cos 35^0 = \frac{0,82}{1} = 0,82.$$

Durch Beschreiben des Kreises mit dem Längenmafse ist erreicht, dafs beim Kosinus der Winkel alle Nenner 1 werden, dafs also schon der Zähler den Bruchwert angiebt, so dafs man nur eine Linie, die kleine Anseite, zu messen braucht.

Wir sahen, dafs der Kosinus, wenn der Winkel von 53^0 auf 35^0 abnimmt, von 0,6 auf 0,82 steigt. Bei fortgesetztem Verkleinern des Winkels wächst der Kosinus weiter; es wird, wie die Figur zeigt, $\cos 16^0 = 0,96$ und $\cos 8^0 = 0,99$. Bei 7^0, 6^0, 5^0, ... 1^0, $^1/_2{}^0$, ... wird die Anseite MF immer mehr gleich MA und geht in MA über, so dafs die Messung 1 Ganzes ergiebt, wenn der Winkel auf $0^0\ 0'\ 0''$ gekommen ist; mithin wird

$$\cos 0^0 = 1.$$

Wächst der Winkel von 0^0 an, so nimmt der Kosinus von 1 an ab.

Der Kosinus war bei 53^0 noch 0,6; erst bei 60^0 kommt er auf die Hälfte, und von hier an sinkt er schneller. Schon bei 69^0 erweist er sich aus der Figur nur als 0,36 (kaum mehr als $^1/_3$), bei 82^0 nur noch 0,14 und bei 86^0 geht er auf 0,07 hinab. Und auch dieser kleine Wert der gemessenen Anseite MF verschwindet, wenn F, beim Übergehen des Winkels in einen Rechten, in M ankommt, also $MF = 0$ wird, so dafs

$$\cos 90^0 = 0.$$

Verfolgen wir die Wanderung des Fufspunktes F der Senkrechten von seinem Ausgange vom Anfangspunkte A an. Hat er beim Wachsen des Winkels den Weg

von A bis F_1 zurückgelegt, so ist die kleine Anseite $MF_1 = AM - AF_1$
das weitere Fortschreiten liefert $MF = AM - AF$
wird sein Weg AF gleich dem Längenmafse, so kommt $MF = AM - AM = 0$.
Der weiter wachsende Winkel läfst den Fufspunkt F der Senkrechten in gleicher Richtung weiter wandern; es wird die Gleichung zu

$MF_2 = AM - AF_2 = 1 - 1{,}1 = -0{,}1$; daher $\cos 96^0 = -0{,}1$
dann $MF_3 = AM - AF_3 = 1 - 1{,}36 = -0{,}36$; $\cos 111^0 = -0{,}36$.

Es mufste die Zahl für MF_2 das negative Vorzeichen erhalten, weil diese Linie von M aus nun nach der entgegengesetzten Richtung geht; und daher sind

die Kosinus der **stumpfen** Winkel **negative** echte Brüche.

Die Figur zeigt den weiteren Verlauf: $\cos 120^0 = -0{,}5$, $\cos 143^0 = -0{,}8$, $\cos 172^0 = -0{,}99$, und wenn der Winkel ein gestreckter wird, hat der Fufspunkt F den ganzen Durchmesser AC durchlaufen und die Gleichung wird

$$MC = AM - AC = 1 - 2 = -1$$

deshalb

$$\cos 180^0 = -1.$$

Der Winkel fährt fort zu wachsen, er wird überstumpf. Da kehren durch die gemessenen Anseiten dieselben Werte in umgekehrter Ordnung wieder. Es wird $\cos 217^0 = -0{,}8$, $\cos 233^0 = -0{,}6$, $\cos 262^0 = -0{,}14$, dann

$$\cos 270^0 = 0$$

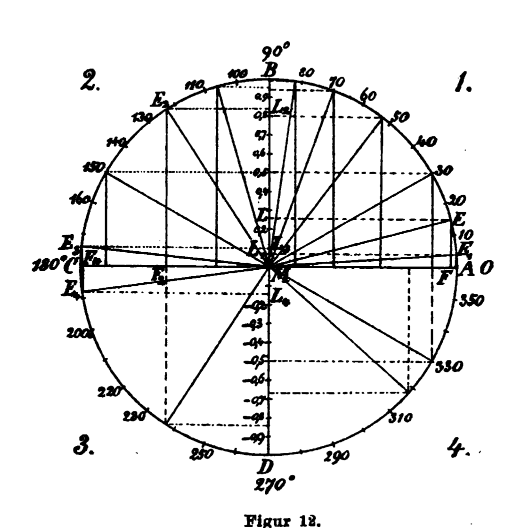
und nun kommt der bewegliche Schenkel des Winkels in das vierte Viertel des Feldes, wo die zuerst betrachteten positiven Strecken die Werte geben. Der Kosinus wird hier also wieder positiv: $\cos 300^0 = 0{,}5$, $\cos 344^0 = 0{,}96$ und

$$\cos 360^0 = 1.$$

Es hat sich also ergeben aus der Lage der Strecke MF rechts von M oder links von M:

Die **Kosinus** sind im ersten und vierten Viertel positiv,
im **zweiten und dritten negativ.**

2) **Sinus.** Zur Bestimmung des Wertes vom Sinus hat man, wenn man wieder mit der Längeneinheit den Kreis beschreibt, nur die Gegenseite des Winkels zu messen. (Figur 12.) Die Länge derselben kann man nicht so bequem ablesen, wie vorher, wo die Anseite immer auf dem geteilten wagerechten Durchmesser lag; denn der sich ändernde Winkel verlegt ihren Platz. Wir müssen deshalb jede auf den senkrechten Durchmesser erst übertragen, indem wir vom Endpunkte des beweglichen Halbmessers die dem wagerechten Durchmesser gleichlaufende Gerade bis zu ihm hinüberziehen. Aus der dort angegebenen Teilung in Zehntel des Längenmafses liest man ab für den Winkel $AME = 15^0$ die Länge der Gegenseite $EF = LM = 0{,}26$; also ist $\sin 15^0 = 0{,}26$. Nimmt der Winkel ab bis auf $AME_1 = 4^0$, so geht, wegen $E_1F_1 = L_1M = 0{,}07$,



Figur 12.

der Sinus hinab auf 0,07, wird mit dem Winkel immer noch kleiner und, wenn bei verschwindend kleinem Winkel die Senkrechte EF in den Punkt A zusammenschrumpft, entsteht

$$\sin 0^0 = 0.$$

Läſst man den Winkel von 0^0 an wachsen, so steigt der Sinus anfangs schnell; schon sin 30^0 kommt auf 0,5 und sin 53^0 wird 0,8. Bald hinter dieser Stelle nimmt er immer langsamer zu. Es wird sin $70^0 = 0{,}94$, sin $82^0 = 0{,}99$ und, wenn EF in BM übergeht,

$$\sin 90^0 = 1.$$

Wird der Winkel ein stumpfer, so senkt sich die Bahn des Punktes E und die Senkrechten liefern dieselben Werte in umgekehrter Folge wieder. Es ist sin $106^0 = 0{,}96$, sin $123^0 = 0{,}84$, sin $150^0 = 0{,}5$, sin $174^0 = 0{,}1$; dann wird E_3F_3 immer kleiner und verschwindet im Punkte C, wenn der Winkel in den gestreckten übergeht,

$$\sin 180^0 = 0.$$

Der Weg, den der Punkt L durchwanderte, vom höchsten Punkte B herkommend, liefert

$E_2F_2 = BM - BL_2$

$E_3F_3 = BM - BL_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$E_4F_4 = BM - BL_4 = 1 - 1{,}14 = - 0{,}14$

also ist sin $188^0 = - 0{,}14$. Die Senkrechte ist auf die andere Seite des wagerechten Durchmessers AC hinübergekommen; ihre entgegengesetzte Lage hat ihr das negative Vorzeichen gegeben; und darum werden die Sinus aller Winkel zwischen 180^0 und 360^0 negativ. Auf sin $237^0 = - 0{,}84$ folgt

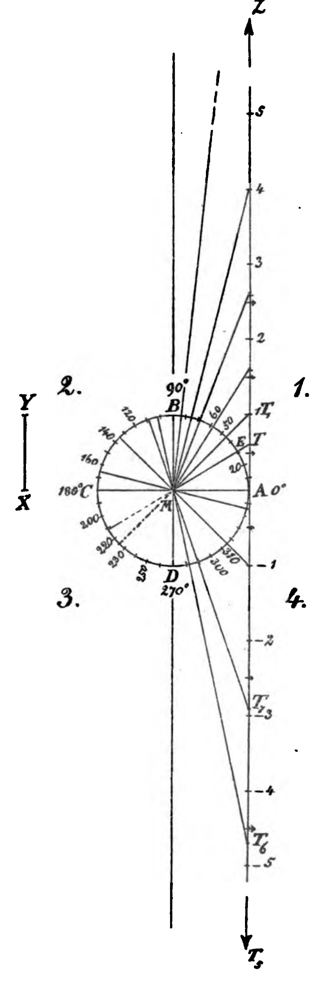
$$\sin 270^0 = - 1$$

dann sin $330^0 = - 0{,}5$ und sin $360^0 = 0$.

Für die Winkel, die bis in das zweite, dritte oder vierte Viertel des Feldes reichen, ist nach der Lage der Senkrechten über oder unter dem wagerechten Durchmesser zu merken:

- Die **Sinus** sind im ersten und zweiten Viertel positiv,
  im **dritten und vierten negativ.**

3) **Tangens.** Den Vorteil, nur eine Seite messen zu brauchen, wenn der Nenner des Bruches = 1 wird, hat man bei Tangens, wenn man an den mit dem Längenmaſse beschriebenen Kreise im Anfangspunkte A die Berührungslinie legt. Für Figur 13 ist das Längenmaſs XY kleiner gewählt, weil die Figur für diese Druckseite viel zu groſs werden würde. Für den Winkel $AME = 31^0$ giebt $AT = 0{,}6$ den Wert tg $31^0 = 0{,}6$; dann $AT_1 = 1$ tg $45^0 = 1$; ferner ersieht man tg $58^0 = 1{,}6$, tg $69^0 = 2{,}6$, tg $76^0 = 4$; aus weiter hinauf fortgesetzter Figur würde man ablesen können tg $84^0 = 9{,}5$, tg $87^0 = 19$, tg 88^0 schon 28,6 und nun wächst der Abschnitt auf der Berührungslinie AT ganz auſserordentlich schnell. Denn wenn der bewegliche Schenkel



Figur 13.

des Winkels in die senkrechte Stellung MB übergehen will, ist sein Schnittpunkt auf der Berührungslinie AT in eine Ferne gerückt, die über unsere Vorstellung weit hinausgeht, wodurch Tangens dieses Winkels eine Zahl wird, die mit gar nicht angebbar vielen Ziffern geschrieben werden müfste. Und für 90^0 selbst wird Tangens **unendlich** grofs:

$$\text{tg } 90^0 = \infty.$$

Dies trat ein in dem Augenblicke, als der bewegliche Schenkel des Winkels mit der Berührungslinie gleichlaufend wurde. Sobald er aber die Senkrechte MB im geringsten überschreitet, erfolgt wieder ein Durchschnitt mit der Berührungslinie, nämlich durch Verlängern des Schenkels über den Mittelpunkt M hinaus auf der andern Seite von A, und dieser Schnittpunkt (T_5) kommt bei fortgesetzter Drehung des Winkelschenkels näher an A heran (wie T_6, T_7). Diese nun unterhalb A liegenden Strecken treten mit dem negativen Vorzeichen auf. Denn denkt man in der Berührungslinie oberhalb A in hinreichender Ferne einen Punkt Z, so waren die ersten Strecken

$$\begin{aligned} AT &= AZ - ZT \\ AT_1 &= AZ - ZT_1 \text{ und so fort:} \\ \text{nun } AT_5 &= AZ - ZT_5 \\ AT_6 &= AZ - ZT_6 = -(ZT_6 - AZ). \end{aligned}$$

So wird tg $102^0 = -4{,}7$, tg $109^0 = -2{,}9$, tg $135^0 = -1$, tg $166^0 = -0{,}25$ und

$$\text{tg } 180^0 = 0, \text{ wie auch tg } 0^0 = 0 \text{ war.}$$

Nachdem der Schenkel des Winkels den Halbmesser MC überschritten hat, kommt sein Schnittpunkt auf der Berührenden wieder oberhalb A; also kehren dieselben ersten Worte wieder: tg $211^0 = + 0{,}6$, tg $225^0 = 1$ und so fort bis

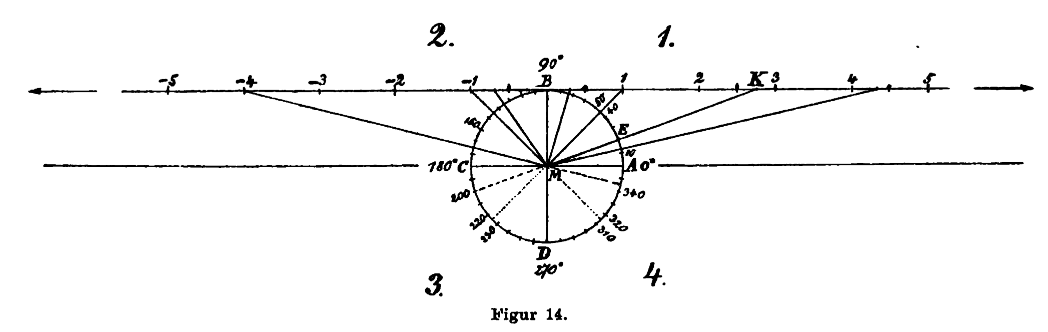
$$\text{tg } 270^0 = \infty;$$

dann springt der Schnittpunkt wieder ins negativ Unendliche und eilt abermals von dieser Seite auf A zu: tg $282^0 = -4{,}7$, tg $289^0 = -2{,}9$, tg $315^0 = -1$ und

$$\text{tg } 360^0 = 0.$$

> Demnach ist **Tangens** im ersten und dritten Viertel positiv, im zweiten und vierten **negativ**.

4) **Kotangens.** Nun wird an den mit dem Längenmafse beschriebenen Kreise die Berührungslinie im höchsten Punkte B gelegt. (Figur 14.) Bis zu ihr ist der



Figur 14.

bewegliche Schenkel des Winkels AME zu verlängern. Dort wird $\angle MKB = AME$, als Wechselwinkel bei den gleichlaufenden Geraden. Also liest man den Wert **Kotangens** aus dem rechtwinkligen Dreiecke MKB ab, und zwar an KB, da die Messung der

Gegenseite MB für den Nenner die Zahl 1 ergiebt. Es wird ctg $13^0 = 4{,}33$, ctg $20^0 = 2{,}75$, ctg $45^0 = 1$, ctg $73^0 = 0{,}3$.

Für die sehr kleinen Winkel liegt der Schnittpunkt K in überaus großer Ferne. Es ist

$$\text{ctg } 0^0 = \infty.$$

Kommt der bewegliche Schenkel in MB, so ist

$$\text{ctg } 90^0 = 0$$

und dann tritt bei den stumpfen Winkeln der Schnittpunkt auf die linke Seite von B. Dies macht ctg $125^0 = -0{,}7$, ctg $135^0 = -1$, ctg $166^0 = -4$ und so fort bis ctg $180^0 = -\infty$. Für die Winkel über 180^0 ist der bewegliche Schenkel über den Mittelpunkt hinaus zu verlängern und so kommt der Schnittpunkt wieder an die ersten Stellen. Er rückt, wenn man von 181^0 auf 180^0 zurückgeht, ins positiv Unendliche; also wird von dieser Seite her ctg $180^0 = +\infty$. Deshalb braucht nur angegeben zu werden

$$\text{ctg } 180^0 = \infty.$$

(Ebenso kann man durch Verkleinern des Winkels bei tg 90^0 und tg 270^0 auch auf $-\infty$ kommen.)

Im weiteren Verlaufe ersieht man ctg $200^0 = 2{,}75$, ctg $225^0 = 1$,

$$\text{ctg } 270^0 = 0,$$

dann ctg $315^0 = -1$, ctg $346^0 = -4$, und aus demselben Grunde, wie bei 180^0,

$$\text{ctg } 360^0 = \infty.$$

Wie bei Tangens ist **Kontangens** im ersten und dritten Viertel positiv, im zweiten und vierten **negativ**.

2. Bestimmung der Logarithmen der Funktionen der Winkel mit Sekunden.

1. Es sei anzugeben log sin $46^0\,27'\,15''$. In der Logarithmentafel steht log sin $46^0\,27' = 9{,}86\,020$, wo hinten -10 fortgelassen ist. (Diese -10 hinzuschreiben, können auch wir uns ersparen, müssen aber stets an -10 denken!) Der gegebene Winkel hat noch $15''$ oder eine Viertelminute. Für die ganze nächste Minute wächst der Logarithmus um 12 (Hunderttausendstel); um ebenso viel auch für alle umliegenden log sin; daher kann der Logarithmus für die Viertelminute nur um $^{12}/_4 = 3$ wachsen. Demnach ist

$$\log \sin 46^0\,27'\,15'' = 9{,}86\,023.$$

2. Wie groß ist log sin α für $\alpha = 36^0\,36'\,36''$? Der log sin $36^0\,36' = 9{,}77\,541$ wächst für die nächste Minute um 17; die $36''$ sind 0,6 Minuten, fordern also eine Vermehrung um $0{,}6 \cdot 17 = 10{,}2$, was auf 10 abgekürzt wird. Daher ist

$$\log \sin \alpha = 9{,}77\,551.$$

3. Zu bestimmen log tg α für $\alpha = 28^0\,40'\,22''$. Es nimmt log tg $28^0\,40' = 9{,}73\,777$ für die ganze Minute um 30 zu, also für $^{11}/_{30}$ Minuten um 11; daher

$$\log \text{tg}\, \alpha = 9{,}73\,788.$$

4. Auszurechnen log cos β für $\beta = 39^0\,0'\,18''$. Es ist log cos $39^0\,0' = 9{,}89\,050$. Der Winkel β ist noch um $18''$ größer. Beim Wachsen des Winkels nimmt aber der Kosinus ab. Der Logarithmus wird für die erste Minute um 10 kleiner, also für $^3/_{10}$ Minuten um 3; daher ist log cos $\beta = 9{,}89\,047$.

5. Auch Kotangens wird bei Vergrößerung des Winkels kleiner. Wie groß ist log ctg γ für $\gamma = 22^0\,20'\,37''$? Es sinkt log ctg $22^0\,20' = 0{,}38\,636$ für eine Minute



um 36, also für $^{37}/_{60}$ Minuten um $^{37}/_{60} \cdot 36 = 3,7 \cdot 6 = 22,2$: daher sind 22 in Abzug zu bringen: $\log \operatorname{ctg} \gamma = 0,38614$ (wo keine — 10 zu denken ist).

Bei den mit **Ko** anfangenden Funktionen wird die Verbesserung **abgezogen!**

3. Aufschlagen des Winkels zu einem Funktionswert.

1) Für welchen spitzen Winkel α ist $\sin \alpha = {}^3/_4 = 0,75$?

Der Logarithmus von 0,75 giebt $\log \sin \alpha = 9,87\ 506 - 10$. Der nächst kleinere log sin in der Tafel ist $\log \sin 48^0\ 35' = 9,87\ 501$. Dieser mufs um 12 (Hunderttausendstel) wachsen, um eine ganze Minute mehr zu liefern; zu je 1 mehr ist also $^1/_{12}$ Minute nötig; $\log \sin \alpha$ hat 5 mehr; diese kommen durch $^5/_{12}$ Minuten. Mithin ist $\alpha = 48^0\ 35^5/_{12}{}'$ oder $48^0\ 35'\ 25''$.

2) Wie grofs sind die Grundwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, in welchem Grundseite und Höhe gleich sind?

Markiert man die Mitte der Höhe, so sieht man, dafs β zu bestimmen ist aus $\operatorname{tg} \beta = 2$.

Für $\log \operatorname{tg} \beta = 0,30103$ liefert die Tafel den nächst kleineren log tg 0,30100, welcher zu $63^0\ 26'$ gehört. Dieser mufs um 32 (Hunderttausendstel) zunehmen, um eine ganze Minute mehr zu geben; ein Zuwachs um 1 kommt also bei $^1/_{32}$ Minute; für die 3, welche $\log \operatorname{tg} \beta$ mehr hat, sind $^3/_{32}$ Minuten erforderlich. Also der Überschufs ist der Zähler, der Tafel-Unterschied der Nenner des Minutenbruches. Daher ist $\beta = 63^0\ 26^3/_{32}{}'$. Statt des Minutenbruches giebt man lieber Sekunden an, und rundet $^3/_{32} \cdot 60''$ ab in $6''$. Ein gleichschenkliges Dreieck von gleicher Breite und Höhe hat Grundwinkel von $63^0\ 26'\ 6''$.

3) Die Sekunden des spitzen Winkels α zu bestimmen aus $\sin \alpha = 0,3$.

Es ist $\log \sin \alpha = 9,47712$
bei $17^0\ 27'$ in der Tafel 694

$$\frac{\text{Überschufs } 18}{\text{Tafel-Unterschied } 40} \cdot 60'' = 27''$$

mithin ist $\alpha = 17^0\ 27'\ 27''$. Die Ordnung „Überschufs durch Tafel-Unterschied“ ist daran leicht zu behalten, dafs der Minutenbruch natürlich ein echter sein mufs.

4) Das Dreieck, dessen Seiten die Mafszahlen 5, 12, 13 haben, ist rechtwinklig, weil $5^2 + 12^2 = 13^2$ ist. Wie grofs sind seine Winkel?

Der kleinste Winkel geht hervor aus $\sin \alpha = {}^5/_{13}$, als $\alpha = 22^0\ 37'\ 12''$. Schneller findet man ihn, weil nur ein Logarithmus aufzuschlagen ist, aus $\operatorname{ctg} \alpha = {}^{12}/_5 = 2,4$. Der Logarithmus dieser Zahl liefert $\log \operatorname{ctg} \alpha = 0,38021$.

Bei **Kotangens** nimmt man aus der Tafel den nächst **gröfseren** Logarithmus: $\log \operatorname{ctg} 22^0\ 37' = 0,38028$. Der Überschufs 7 giebt $^7/_{36} \cdot 60'' = {}^{35}/_3$, rund $12''$; daher, wie vorher, $\alpha = 22^0\ 37'\ 12''$.

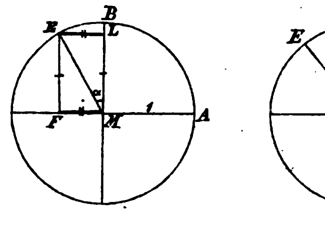
Die Bestimmung aus $\cos \alpha = {}^{12}/_{13}$ ist insofern nicht unbequem, als log 12 und log 13 in der Tafel bei einander stehen. Ohne sie herauszuschreiben, zieht man ab und hat $\log \cos \alpha = 9,96524$. Auch beim **Kosinus** nimmt man aus der Tafel den nächst **gröfseren** Logarithmus. Sein Überschufs 1 bringt $^1/_5{}' = 12''$; also wieder $\alpha = 22^0\ 37'\ 12''$.

Bei den mit **Ko** anfangenden Funktionen nimmt man den nächst **gröfseren** Logarithmus, weil Kosinus oder Kotangens des Winkels

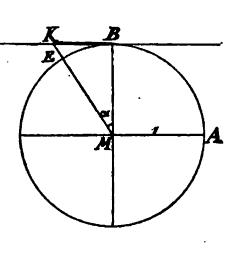
ohne Sekunden, also des kleineren Winkels, gröfser ist. Die zu den Minuten hinzugefügten Sekunden bringen ihn auf die gegebene Gröfse herab.

4. Winkel mit **Überschufs über 90°.**

In den Figuren 15, 16, 17 sind die Kreise mit dem Längenmafse beschrieben. Der Winkel AME ist um α gröfser als 90°. Für seine Funk-



Figur 15. Figur 16.



Figur 17.

tionen, deren Vorzeichen schon bekannt sind, liest man ab aus
$EF = LM$, aus $MF = EL$, an AT und an BK

$$10. \begin{cases} \sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha & \operatorname{tg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \\ \cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha & \operatorname{ctg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Die Funktionen eines **stumpfen** Winkels haben den Zahlenwert der Kofunktion seines **Überschusses über 90°.** Von ihnen ist nur Sinus positiv.

Man schlägt log sin 121° 15′ 7,5″ auf als log cos 31° 15′ 7,5″ und findet 9,93191.

Um im Verlaufe der Rechnung daran erinnert zu werden, dafs der Zahlenwert negativ zu nehmen ist, setzt man an die betreffende Funktion die Marke n.

Beispiel. Welchen Zahlenwert hat $\cos\alpha$ bei $\alpha = 97^0\ 47'\ 57''$?

$$\log\cos\alpha_n = 9{,}13258 - 10 \qquad \cos\alpha = -0{,}1357.$$

Soll ein stumpfer Winkel aus seinem Kosinus bestimmt werden, so sucht man dessen Logarithmus unter log **sin** auf und schreibt für α 90° mehr hin.

Beispiel. Für welchen stumpfen Winkel ist $\cos\alpha = -{}^1/_3$?

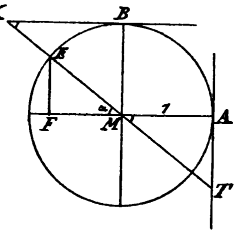
$$\log 3 = 0{,}47712$$
$$\log\cos\alpha_n = 9{,}52288 - 10 \qquad \alpha = 109^0\ 28'\ 17''.$$

Anmerkung. Entsprechende Formeln kann man für die Funktionen von $270^0 + \alpha$ aufstellen. (Die Winkel zwischen 270° und 180° werden bequemer als $180^0 + \alpha$ genommen.)

5. Funktion zweier Winkel, die sich zu 180° ergänzen.

Aus Figur 18 liest man ab für $\angle AME = 180^0 - \alpha$

$$11. \begin{cases} \sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha \\ \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}$$

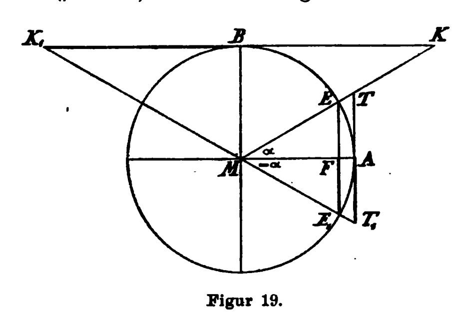


Figur 18.

Anmerkung. **Entsprechende Formeln könnten aufgestellt werden für die Funktionen der Winkel von $180^0 + \alpha$ und $360^0 - \alpha$.**

6. Die Funktionen eines negativen Winkels.

Wenn man von dem unter Nr. 1 betrachteten Winkel α (AME), dessen beweglicher Schenkel ME im Kreise herumlief, etwas von seinem Zuwachs wieder fortnimmt, also einen Winkel β abzieht, so kommt der Schenkel ME wieder zurück und bildet mit AM den Winkel $\alpha_1 = \alpha - \beta$. Hat man dabei den Winkel β gröfser als α genommen, so kommt der bewegliche Schenkel ME unter AM und der entstandene Winkel $\alpha_1 = \alpha - \beta$ ist negativ, $\alpha_1 = -(\beta - \alpha)$. Diesen negativen Winkel α_1 beschrieb ME in dem Sinne, wie die Uhrzeiger fortrücken, und es kann diese Bewegung weiter fortgesetzt werden. Die Funktionen solches negativen Winkels sind mit denen des ebenso grofsen positiven Winkels zu vergleichen. Die Figur 19 giebt:



Figur 19.

$$12. \left\{ \begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \mathrm{tg}(-\alpha) &= -\mathrm{tg}\,\alpha \\ \mathrm{ctg}(-\alpha) &= -\mathrm{ctg}\,\alpha. \end{aligned} \right.$$

7. Derselbe Funktionswert gehört mehr als einem Winkel.

1) Bei der Aufgabe in Nr. 3, 1) fanden wir für den Wert $\sin\alpha = {}^3/_4$ den spitzen Winkel $\alpha = 48^0\ 35'\ 25''$. Wenn der Sinus im zweiten Viertel des Feldes von 1 bis 0 hinabgeht, mufs er an eine Stelle kommen, wo sein Wert auch ${}^3/_4$ ist. Die Gleichung 11 (in Nr. 5), $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, sagt, dafs der stumpfe Winkel an jener Stelle die Gröfse $(180^0 - \alpha)$ hat. Es ist also $\alpha_1 = 180^0 - 48^0\ 35'\ 25'' = 131^0\ 24'\ 35''$ der zweite Winkel für den Wert $\sin\alpha = {}^3/_4$.

2) Das zweite Beispiel in Nr. 4, $\cos\alpha = -{}^1/_3$, ergab den stumpfen Winkel $\alpha = 109^0\ 28'\ 17''$. Verlängert man seine Senkrechte EF über F bis zum Schnitt mit dem Kreise in E_1 und zieht E_1M, so liefert dieselbe Strecke MF für den überstumpfen Winkel AME_1 den Kosinus; und dieser Winkel ist $360^0 - \alpha$; folglich ist $250^0\ 31'\ 43''$ der zweite Winkel für den Wert $\cos\alpha = -{}^1/_3$. Auch würde der Kosinus des negativen Winkels $\alpha_2 = -109^0\ 28'\ 17''$ den Wert $-{}^1/_3$ haben. Diese beiden schliefsen sich von selbst aus, wenn die Aufgabe einen Winkel im Dreieck verlangt.

3) Dem Werte $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2{,}4$ in Nr. 3, 4) entspricht nicht nur $\alpha = 22^0\ 37'\ 12''$, sondern auch der um 180^0 gröfsere Winkel, $\alpha_1 = 202^0\ 37'\ 12''$, und auch der um 180^0 kleinere Winkel $\alpha_2 = -157^0\ 22'\ 48''$. Allein sie passen dort nicht für das Dreieck. Auch bei jedem Werte für Tangens treten aufser α Winkel auf, die um 180^0 gröfser oder kleiner sind.

Anmerkung. **Weil der zwischen den Schenkeln liegende Bogen ebenso viele Grade, Minuten und Sekunden hat, wie der Winkel α, so kann man Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens auch als dem Bogen angehörig betrachten und zwar dem Bogen des Kreises, welcher mit der Längeneinheit beschrieben wurde, oder, kurz ausgedrückt, dem Bogen mit dem Halbmesser Eins. Der Umfang πd dieses**

Kreises hat, da $d = 2$ ist, die Gröfse von 2π Längeneinheiten, und der **Halbkreis** die Mafszahl π. Man kann also für 180^0 auch π schreiben. Der Bogen hört dann nicht, wie der Winkel, bei 360^0 auf; er legt sich von neuem um den Kreis. 3π Längeneinheiten reichen als Bogen $1\,^1/_2$ mal um den Kreis herum.

Beispiele. 1) Wie lang sind die Bogen x, welche der Gleichung $\sin x = 0$ entsprechen? Antwort: $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \ldots\ldots$ und, wenn der Bogen vom Anfangspunkte A an in entgegengesetzter Richtung sich aufwickelt, auch $-\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots\ldots$; also allgemein, wenn n jede positive oder negative ganze Zahl bedeutet, $x = n\pi$. Auch die Gleichung $\operatorname{tg} x = 0$ hat die unzählig vielen Wurzeln $x = n\pi$.

2) Dieselbe Frage bei $\sin x = -1$. Zunächst der Bogen von der Länge $1\,^1/_2\,\pi$. Weil der Sinus nur beim tiefsten Punkte D des Kreises (Figur 12) bis auf -1 hinabgeht, mufs der Bogen von D an ganz herum gehen, also um 2π länger werden; dann wieder um 2π, und so immer fort. Daher

$$x = {}^3/_2\,\pi + n \cdot 2\pi = (3 + 4n) \cdot {}^1/_2\,\pi.$$

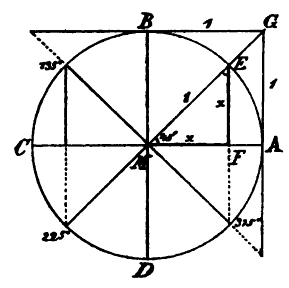
In solchem Ausdrucke sind auch die negativen Bogen enthalten; man setzt für n die negativen ganzen Zahlen ein.

3) Für die Gleichung $\sin x = {}^3/_4$ fanden wir die ihr entsprechenden Bogen $\alpha = 48^0\,35'\,25''$ und $\pi - \alpha$. Zu jeder dieser beiden Stellen kehrt der Bogen nach ganzem Umlaufe zurück. Also ist zu jedem n mal 2π hinzuzufügen:

$$x_1 = 2n\pi + \alpha$$

und
$$x_2 = 2n\pi + \pi - \alpha = (2n + 1)\pi - \alpha.$$

8. Die Werte der Funktionen der Winkel von 45°, 60° und 30° und der zu diesen besonderen Winkeln gehörigen aus den andern Vierteln.



Figur 20.

1) Der Winkel $AME = 45^0$ (Figur 20) läfst das Dreieck EFM gleichschenklig werden. Die Gröfse seiner Schenkel geht hervor aus

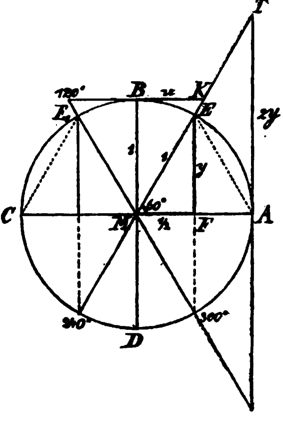
$$2x^2 = 1 \qquad x = \sqrt{^1/_2} = {}^1/_2\sqrt{2} = 0{,}707.$$

Daher ist $\sin 45^0 = \cos 45^0 = {}^1/_2\sqrt{2}$.

Ferner $\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{ctg} 45^0 = 1$.

Dazu
$$\sin 135^0 = {}^1/_2\sqrt{2}$$
$$\cos 135^0 = -{}^1/_2\sqrt{2}$$
$$\operatorname{tg} 135^0 = \operatorname{ctg} 135^0 = -1,$$

und entsprechend die Funktionen von 225^0 und 315^0.



Figur 21.

2) Im halben gleichseitigen Dreieck EFM (Figur 21) ist $MF = {}^1/_2$, daher

$$EF = \sqrt{1 - {}^1/_4} = {}^1/_2\sqrt{3} = 0{,}866$$

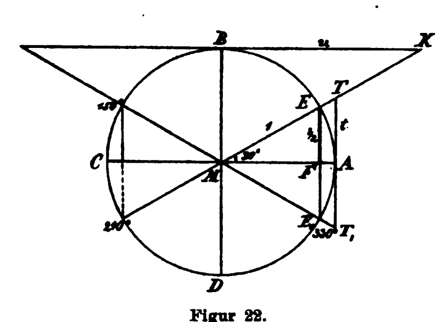
und es wird (durch $AM = 2MF$)

$$AT = 2EF = \sqrt{3} = 1{,}732;$$

also
$$\cos 60^0 = {}^1/_2$$
$$\sin 60^0 = {}^1/_2\sqrt{3}$$
$$\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$$

und der umgekehrte Wert $\operatorname{ctg} 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = {}^1/_3\sqrt{3}$ der auch aus dem halben gleichseitigen Dreiecke MBK berechnet werden kann.

Die Werte der Funktionen der Winkel 120⁰, 240⁰ und 300⁰ liest man aus Figur 21 ab: $\cos 120^0 = -\,^1/_2$ und entsprechend weiter.



Figur 22.

3) Aus den Funktionswerten von 60⁰ gehen die von 30⁰ hervor durch die Formeln 5 in **1**, 3: $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$ u. s. w. Besser aber ist es, sie aus Figur 22 abzulesen:

$$\sin 30^0 = {}^1/_2$$
$$\cos 30^0 = {}^1/_2\sqrt{3}$$
$$\operatorname{tg} 30^0 = \sqrt{^1/_3} = {}^1/_3\sqrt{3}$$
$$\operatorname{ctg} 30^0 = \sqrt{3};$$

und entsprechend die von 150⁰, 210⁰ und 330⁰.

9. Übungen.

1) Mittels der Logarithmen anzugeben die Zahlenwerte der 4 Funktionen für den Winkel $\alpha = 240^0\,24'\,42''$.

2) Eine Sehne ist gleich dem fünften Teile des Durchmessers. Wie grofs sind die auf ihr stehenden Winkel am Umfange? (Man zeichne einen der beiden Winkel, bei denen ein Schenkel ein Durchmesser ist.)

[Die Winkel im kleineren Kreisabschnitte sind 168⁰ 27′ 47″.]

3) Die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, dessen Seiten die Mafszahlen 3, 4, 5 haben.

[Die Bestimmung des kleinsten Winkels durch Sinus wird (bei fünfstelligen Logarithmen) um 1″ zu klein.]

4) Wie grofs sind die Winkel eines gleichseitigen Vierecks, dessen Eckenlinien sich verhalten wie Eckenlinie und Seite eines Quadrats?

5) Martus, mathem. Aufgaben, Nr. 288, 363, 366, 364 a, 312, 325.

---

6) Zwei Kreise mit den Halbmessern $r = 16{,}3$ und $\varrho = 4$ cm haben den Mittelpunktsabstand $a = 26{,}5$ cm. Unter wie grofsen Winkeln schneiden sich ihre gemeinsamen äufseren und inneren Berührungslinien? (Man ziehe durch den Mittelpunkt des kleineren Kreises die den Berührungslinien gleichlaufenden Geraden.)

Noch ein Beispiel: M., Aufg. 349.

7) Mittels der Formel $\triangle = {}^1/_2\, ab \sin\gamma$ zu beweisen den Lehrsatz (1. Teil, **14**, 10, 2): Beschreibt man über den drei Seiten eines Dreiecks Quadrate und verbindet die Endpunkte je zweier von einem Eckpunkte des Dreiecks ausgehenden Quadratseiten, so ist jedes der entstehenden Dreiecke dem ersten gleich.

8) Wie grofs sind Inhalt und Umfang des regelmäfsigen Siebenecks im Kreise vom Halbmesser $r = 12{,}803$ m? (Man berechne den Mittelpunktswinkel nur bis zum Minutenbruch.)

9) Wievielmal so grofs, als die Grundseite a, wird die Höhe eines regelmäfsigen 21-Ecks?

10) Den Inhalt eines regelmäfsigen n-Ecks durch seinen Umfang u zu bestimmen. (Durch Einsetzen des Ausdrucks für ϱ werde eine Formel für J aufgestellt.) $n = 11$,

$u = 1{,}2629$ m. [Ist der Minutenbruch nahe einem Ganzen, so rechnet man leichter mit dem, was am Ganzen fehlt.]

11) Martus, Aufgabe 338, 341.

---

12) Im Kreise vom Halbmesser $r = 2{,}4$ m ist eine Sehne gezogen, die vom Mittelpunkte um $a = 1{,}6138$ m absteht. Wie lang ist der von ihr begrenste kleinere Kreisbogen?

13) M., Aufg. 351, 346, 350.

14) M., Aufgabe 322. Man zerlege das Trapez, so dafs ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, und ziehe dessen Höhe.

---

3. Glied. Gleichungen zwischen den Winkelfunktionen.

1. Für jeden Winkel α liefert der Satz des Pythagoras*) aus dem betreffenden rechtwinkligen Dreiecke (Figur 11 oder 12)

13. $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Daher $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$

2. Nach den Erklärungen in 1, 2 (Figur 3, 4 und 5) ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Daraus folgt 1) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

also

14. $$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

und 2) wenn man Zähler und Nenner durch die gröfste Seite c dividiert

15. $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

3. Die Hauptformeln für Sinus und Kosinus.

16. $$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Zu beachten ist die **Umkehrung** der **Vorzeichen** bei **Kosinus!**

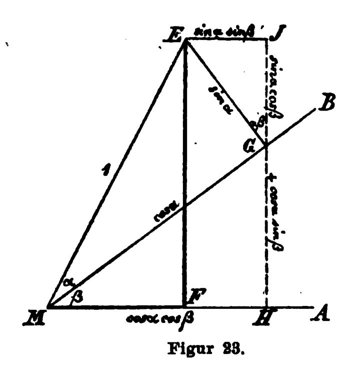
Herleitung. In Figur 23 ist $\angle AME = \alpha + \beta$. Die Darstellung von $\sin(\alpha + \beta)$ fordert, von dem Punkte E, welcher ME gleich dem Längenmafse abgrenzt, die Senkrechte EF auf den andern Schenkel MA zu fällen.

---

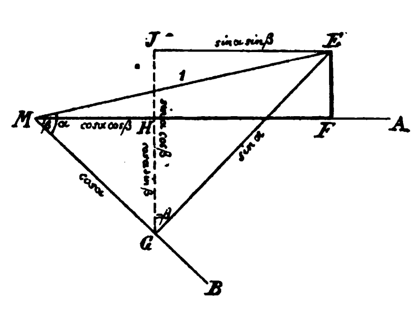
*) Statt $(\sin\alpha)^2$ schreibt man $\sin^2\alpha$ und spricht dies: „Sinus-Quadrat Alpha". Denn der Bruch, welcher die Bezeichnung sin führt, soll mit sich selbst multipliziert werden. Die Beifügung α tritt wie eine Marke auf, welche angiebt, dafs von keinem anderen Winkel, β, γ, ... die Rede ist. Wer die Klammer einfach fortläfst und schreibt $\sin\alpha^2$, müfste die Klammer gewifs setzen bei der Angabe $(\sin 5^0\ 4'\ 3'')^2$, während $\sin^2 5^0\ 4'\ 3''$ die Aufmerksamkeit sofort auf die wichtige Stelle lenkt. Auch kann bei solcher Schreibweise, wie in zwei guten Büchern an folgender und an entsprechenden Formeln zu sehen ist, der Setzer entstehen lassen:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\alpha^2}{2} - \sin\frac{\alpha^2}{2}.$$

Die Mafszahl von EF giebt den Wert $\sin(\alpha + \beta)$ an. Sie auszudrücken durch Sinus und Kosinus von α und β, wird von E auch auf den andern Schenkel von α die Senkrechte EG gefällt und von G aus auf den andern



Figur 23.



Figur 24.

Schenkel von β die Senkrechte GH, die verlängert wird bis zu der durch den Ausgangspunkt E mit dem Grundschenkel MA gleichlaufenden Geraden EJ.

Die auf den Schenkeln des Winkels β stehenden Senkrechten schliefsen den Winkel EGJ ein, welcher $= \beta$ ist ($\angle\ MGH$ ergänzt beide zu einem Rechten). Mithin ist im rechtwinkligen Dreiecke EJG nach der Formel $b = c \cos\alpha$

$$JG = \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

und GH ist aus $\triangle\ GHM$ nach $a = c \sin\alpha$

$$GH = \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Mithin liest man $$EF = JG + GH$$

ab als $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

und entsprechend $$MF = MH - EJ$$

als $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

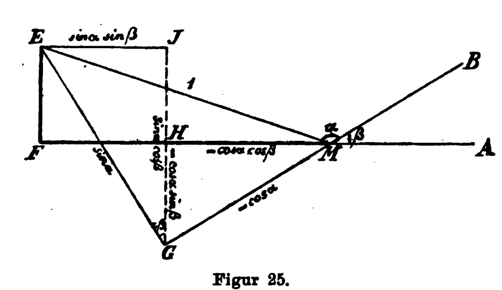
In Figur 24 ist $\angle\ AME = \alpha - \beta$. Die von E aus ganz entsprechend ausgeführte Zeichnung läfst $EF = JG - GH$

ablesen als $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

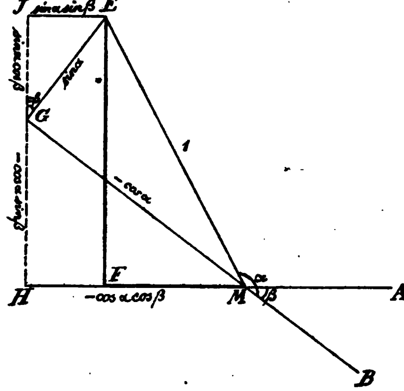
und $$MF = MH + EJ$$

als $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Anmerkung. Diese vier Formeln gelten allgemein für **alle** Arten von Winkeln. In Figur 25 und 26 ist α ein stumpfer, β ein spitzer Winkel. Beim **stumpfen** Winkel



Figur 25.



Figur 26.

α wird $MG = -\cos\alpha$. Dies macht $GH = -\cos\alpha \cdot \sin\beta$ und ändert in

$$EF = JG - GH$$

das Vorzeichen des letzten Gliedes; es kommt wieder

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

und

$$MF = MH + EJ$$

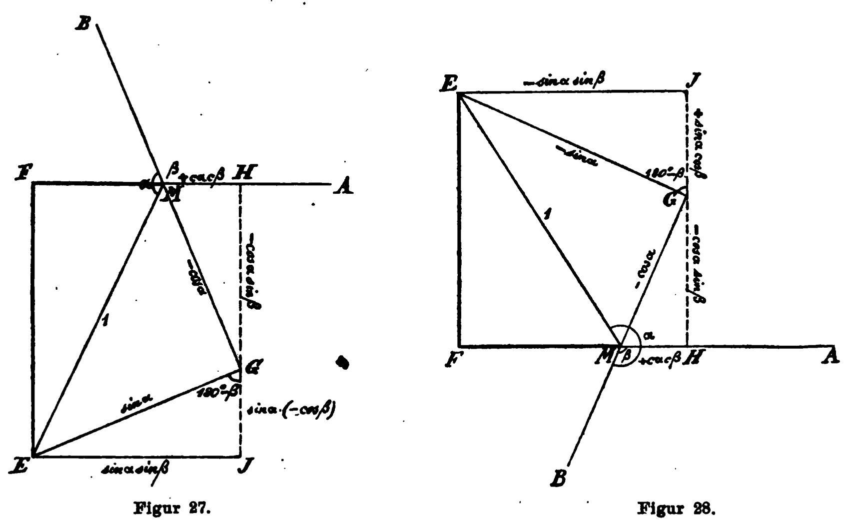
ist

$$-\cos(\alpha + \beta) = -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

wo nur noch die Vorzeichen umzukehren sind.

Dasselbe findet statt in Figur 26 bei $EF = JG + GH$ und $MF = MH - EJ$.

Ist auch β ein stumpfer Winkel (Figur 27 und 28), so bilden die Senkrechten auf seinen Schenkeln einen ihm gleichen stumpfen Winkel, dessen Nebenwinkel EGJ



Figur 27. Figur 28.

$= 180^0 - \beta$ in das rechtwinklige Dreieck kommt. Dann treten die Formeln 11 (2, 5) $\sin(180^0 - \beta) = \sin\beta$ und $\cos(180^0 - \beta) = -\cos\beta$ in Anwendung. Figur 27 giebt für die Summe der beiden stumpfen Winkel die Formeln nach Umkehrung der Vorzeichen. In Figur 28 ist α ein überstumpfer, β ein stumpfer Winkel und auch $\alpha - \beta$ ist stumpf.

Wie in diesen, so kommen in allen beliebigen Fällen die Formeln immer in derselben Gestalt heraus.

Beispiel. $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$

$$\sin 15^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 0{,}25\,882$$

$$\cos 15^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 0{,}96\,593.$$

Daraus folgt (nachdem man Zähler und Nenner des Bruches mit dem Zähler multipliziert hat)

$$\operatorname{tg} 15^0 = 2 - \sqrt{3} = 0{,}26\,795$$

und $\operatorname{ctg} 15^0 = 2 + \sqrt{3} = 3{,}73\,205.$

4. 1) Wählt man den Winkel β gleich α, so werden die erste und die dritte der Formeln 16 zu

17.
$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \text{ oder durch Formel 13}$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha.$$

2) Diese Formeln gelten für jeden Winkel, also auch für den Winkel, welcher halb so grofs, wie der erstgedachte ist. Für den Winkel $^1/_2\ \alpha$ lauten sie

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= 2\sin{}^1/_2\,\alpha\cos{}^1/_2\,\alpha \\ \cos\alpha &= \cos^2{}^1/_2\,\alpha - \sin^2{}^1/_2\,\alpha \\ &= 2\cos^2{}^1/_2\,\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2{}^1/_2\,\alpha. \end{aligned}$$

Die beiden letzten geben durch Umstellen

18. $$\begin{aligned} \mathbf{1 + \cos\alpha} &= \mathbf{2\cos^2{}^1/_2\,\alpha} \\ \mathbf{1 - \cos\alpha} &= \mathbf{2\sin^2{}^1/_2\,\alpha.} \end{aligned}$$

Das Merken dieser Formeln wird unterstützt durch den Gleichklang: bei Minus kommt Sinus!

3) Aus den Formeln 18 ergiebt sich

19. $$\begin{aligned} \cos{}^1/_2\,\alpha &= \sqrt{{}^1/_2\,(1+\cos\alpha)} \\ \sin{}^1/_2\,\alpha &= \sqrt{{}^1/_2\,(1-\cos\alpha)}. \end{aligned}$$

Beispiel: $\alpha = 90^0$.

5. Schreibt man die Sinus-Hauptformeln 16 für die Winkel $u + v$ und $u - v$ hin, sowie auch die Kosinus-Hauptformeln, so entstehen durch Zusammenzählen und Abziehen folgende Gleichungen, bei deren letzter auf die umgekehrte Ordnung zu achten ist, die man nimmt, um rechts das Minuszeichen zu vermeiden.

20. $$\begin{aligned} \sin(u+v) + \sin(u-v) &= 2\sin u\cos v \\ \sin(u+v) - \sin(u-v) &= 2\cos u\sin v \\ \cos(u+v) + \cos(u-v) &= 2\cos u\cos v \\ \cos(u-v) - \cos(u+v) &= 2\sin u\sin v. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den ganzen Winkel $u + v$ mit α und den übrig bleibenden Winkel $u - v$ mit β, so folgt aus

$$\begin{aligned} u + v &= \alpha \qquad\qquad & u &= {}^1/_2\,(\alpha+\beta) \\ u - v &= \beta & v &= {}^1/_2\,(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

und es lauten die Gleichungen 20 mit α und β

21. $$\begin{aligned} \mathbf{\sin\alpha + \sin\beta} &= \mathbf{2\sin{}^1/_2\,(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2\,(\alpha-\beta)} \\ \mathbf{\sin\alpha - \sin\beta} &= \mathbf{2\cos{}^1/_2\,(\alpha+\beta)\sin{}^1/_2\,(\alpha-\beta)} \\ \mathbf{\cos\alpha + \cos\beta} &= \mathbf{2\cos{}^1/_2\,(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2\,(\alpha-\beta)} \\ \cos\beta - \cos\alpha &= 2\sin{}^1/_2\,(\alpha+\beta)\sin{}^1/_2\,(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

oder, da man auch den kleinen Winkel α, den grofsen β nennen kann,

$$\mathbf{\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin{}^1/_2\,(\beta+\alpha)\sin{}^1/_2\,(\beta-\alpha).}$$

Bei cos minus cos ist auf der einen oder der andern Seite der Gleichung die Buchstabenordnung umgekehrt!

Anmerkung. Diese Formeln setzen die Summe oder den Unterschied zweier Sinus oder zweier Kosinus um in ein Produkt. Soll aber Sinus und Kosinus verbunden, also $\sin\alpha \pm \cos\beta$ in ein Produkt verwandelt werden, so setzt man $\sin(90^0 - \beta)$ für $\cos\beta$ oder $\cos(90^0 - \alpha)$ für $\sin\alpha$, und zieht dann nach vorstehenden Formeln zusammen.

6. **22.**
$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha.$$

Man nehme in der zweiten der Formeln 20 $u = 2\alpha$ und $v = \alpha$ und für $\cos 2\alpha$ den Wert mit Sinus.

Wendet man die erste Formel auf den Winkel $(90^0 - \alpha)$ an, so entsteht die andere. Man kann auch die zweite zuerst ableiten aus der dritten der Formeln 20 und dann in gleicher Weise zu Sinus übergehen.

Beispiel: Martus, Aufgabe 320.

7. Nach Formel 15 ist $\mathrm{tg} = \frac{\sin}{\cos}$, also.

$$\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

und wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches durch $\cos\alpha \cos\beta$ dividiert und nachher auch mit ctg entsprechend verfährt, so kommt

23.
$$\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{ctg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\, \mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\, \mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Zusatz. Die erste und die dritte dieser Formeln geben für den besonderen Fall $\beta = \alpha$

24.
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} \quad \text{und} \quad \mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

8. Mit den Formeln 23 ist nicht zu verwechseln Summe oder Unterschied zweier Tangens oder zweier Kotangens. Bringt man

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

auf gemeinsamen Nenner, und ebenso bei ctg, so entsteht

25.
$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

9. Hilfswinkel. Zu den Formeln, welche eine für die logarithmische Rechnung erwünschte Zusammenziehung herbeiführen, gehören vor allen die aus Formel 13 hervorgehenden

$$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \cos \alpha$$

und **26.** $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$ und $\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Sie oder einige andere zur Verbesserung der logarithmischen Rechnung anwenden zu können, führt man einen Hilfswinkel ein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Aufgabe. Die Ausdrücke $x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + b^2} \pm \sqrt{a^2 - b^2}\right]$ mittelst eines Hilfswinkels zur logarithmischen Rechnung bequemer einzurichten.

Ausführung. Um unter den Wurzelzeichen als erste Gröfse eine 1 zu haben, werde b^2 mit a^2 multipliziert und dividiert und dann der gemeinsame Faktor a^2 herausgezogen

$$x = \frac{1}{2} a \left[\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right]$$

Damit die zweite Wurzel nicht eine imaginäre Gröfse werde, mufs $b \leqq a$ sein. Da also $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ ein echter Bruch (oder höchstens = 1) ist, darf man setzen [φ ist der griechische Buchstabe Phi]

$$1) \qquad \cos \varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

denn der Kosinus geht von 1 durch alle echten Brüche bis Null hinab, kommt also auch an den Wert $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ und der zugehörige Winkel φ, welchen die Logarithmentafel angiebt, ist der zu Hilfe zu holende. Führt man $\cos \varphi$ in die Ausdrücke ein und zerlegt $\frac{1}{2}$ in $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$, so wird

$$x = a \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos \varphi)} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos \varphi)}\right]$$

und nun nach den Formeln 19

$$x = a \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left[\cos \tfrac{1}{2} \varphi \pm \sin \tfrac{1}{2} \varphi\right].$$

Bringt man $\sqrt{\frac{1}{2}}$ zweckmäfsig als $\sin 45^0$ oder als $\cos 45^0$ in die Klammer, so hat man die gut logarithmischen Ausdrücke

$$2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= a \sin (45^0 + \tfrac{1}{2} \varphi) \\ x_2 &= a \cos (45^0 + \tfrac{1}{2} \varphi). \end{aligned}$$

Man berechne x nach 1) und 2) für $a = 80{,}116$ und $b = 76{,}974$.

10. Bestimmungsgleichungen mit Winkelfunktionen.

1) Winkel (oder Bogen) x zu finden, welche einander gleich werden lassen $\sin \frac{1}{2} x$ und $\cos x$.

Auflösung. Um statt $\sin \frac{1}{2} x = \cos x$ eine Gleichung zwischen zwei Sinus zu haben, benutzt man, dafs $\cos x = \sin (90^0 - x)$ und auch $= \sin (90^0 + x)$ ist, und hat

1) $\sin {}^1/_2\, x = \sin (90^0 - x)$ und 2) $\sin {}^1/_2\, x = \sin (90^0 + x)$

$${}^1/_2\, x = 90^0 - x \qquad {}^1/_2\, x = 90^0 + x$$
$$x_1 = 60^0 \qquad x_2 = -180^0.$$

Für beide Werte stimmt die Probe.

2) $$\operatorname{tg} 2x = {}^2/_3 \operatorname{ctg} x.$$

Auflösung. Eine Gleichung mit einer Funktion desselben Winkels geht hieraus durch die Formeln 24 und 14 hervor. Die Lösung der so geschriebenen Gleichung ergiebt $\operatorname{tg} x = \pm {}^1/_2$. Die Logarithmentafeln liefern durch $\alpha = 26^0\ 33'\ 54''$ $x_1 = \alpha + n\pi$ und $x_2 = 180^0 - \alpha + n\pi = 153^0\ 26'\ 6'' + n\pi$ oder in der Form $x_2 = \pi - \alpha + n\pi = (n+1)\pi - \alpha$. Beide Ergebnisse lassen sich zusammen angeben $x = n\pi \pm \alpha$, wo für n alle positiven und negativen ganzen Zahlen zu denken sind.

3) $$\sin 2x = \operatorname{tg} x.$$

Auflösung. Durch Zerlegen hat man $2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Zunächst werden beide Ausdrücke einander gleich, wenn der auf beiden Seiten stehende Faktor $\sin x$ gleich Null gesetzt wird, welcher $x = 0$, allgemein $x_1 = n\pi$ ergiebt. Für einen andern Wert ist $\sin x$ nicht mehr $= 0$; darum darf man nun durch $\sin x$ dividieren, und findet aus $2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$ die andern Werte durch $\cos x = \pm \sqrt{{}^1/_2}$, nämlich 45^0 und 135^0, allgemein $x_{2,3} = n\pi \pm {}^1/_4\, \pi$.

4) $$5\,(1 - \cos x) = 4 \sin x.$$

Auflösung. Die Hälfte des Winkels x führt zur Vereinigung der Funktionen. Denn $10 \sin^2 {}^1/_2\, x = 8 \sin {}^1/_2\, x \cos {}^1/_2\, x$ wird, nachdem $\sin {}^1/_2\, x = 0$, ${}^1/_2\, x_1 = n\pi$, $x_1 = 2n\pi$ erledigt ist, zu $\operatorname{tg} {}^1/_2\, x = 0{,}8$; daher $x_2 = 77^0\ 19'\ 9'' + 2n\pi$.

5) $5 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = {}^3/_2 \sin 2x$ durch Herstellen einer einzigen Funktion zu lösen.

Es liefert ctg (oder tg) durch $\operatorname{ctg} x_1 = 1$ und $\operatorname{ctg} x_2 = -0{,}4$ (unter log **tg** aufzusuchen! Siehe **2**, 4) $x_1 = {}^1/_4\, \pi + n\pi$ und $x_2 = 111^0\ 48'\ 5'' + n\pi$.

6) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{8}{\sin 2x} = 32$ mittels $\frac{1}{\sin 2x} = y$ zu lösen.

Auflösung. Die Vereinigung der beiden ersten Brüche giebt $\frac{1}{{}^1/_4 \sin^2 2x}$; daher ist die Gleichung eine vom zweiten Grade für die angegebene Hilfsgröfse y, welche liefert 1) $\sin 2x = {}^1/_2$ und 2) $\sin 2x = -{}^1/_4$, woraus je zwei Werte hervorgehen; dort 15^0 und 75^0, hier $97^0\ 14'\ 19{,}6''$ und $172^0\ 45'\ 40{,}4''$; allgemein $x_1 = n\pi + 15^0$, $x_2 = (n + {}^1/_2)\pi - 15^0$, und mit $\alpha = 7^0\ 14'\ 19{,}6''$ $x_3 = (n + {}^1/_2)\pi + \alpha$, $x_4 = (n+1)\pi - \alpha$.

7) Ist gegeben aufser der Summe zweier unbekannten Winkel $\varphi + \psi = \gamma$ [ψ ist der griechische Buchstabe Psi] das **Verhältnis derselben Funktion** der Winkel, z. B.

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{a}{b}$$

so wendet man den Kunstgriff an: man zieht von beiden Brüchen 1 ab, dann zählt man zu beiden 1 hinzu und dividiert die Ergebnisse. So entsteht

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Demnach lautet der oft zu brauchende **Satz von gleichen Brüchen**:

Sind zwei Brüche gleich, so ist der Bruch aus dem Unterschiede und der Summe von Zähler und Nenner gleich dem aus dem andern entstehenden Bruche. (Vergl. 1. T., **18,** 2 und Zs.)

Aus dieser Gleichung wird durch Formel 21

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi - \psi) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi + \psi).$$

Da die rechte Seite durch $\,{}^1/_2 (\varphi + \psi) = {}^1/_2 \gamma$ bekannt ist, erhält man hieraus $\,{}^1/_2 (\varphi - \psi) = \delta$ also φ und ψ selbst.

Anmerkung 1. Ist $\varphi - \psi = \gamma$ gegeben, so nimmt man den Ausdruck für $\operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi + \psi)$.

Anmerkung 2. Ist gegeben $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi}$, so schreibt man zunächst dafür $\frac{\sin\varphi \cos\psi}{\cos\varphi \sin\psi}$ und wendet hierauf den Satz an.

Beispiel: Martus, Aufg. 268.

8) x zu bestimmen für die Gleichung

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Ausführung. Um die beiden Winkelfunktionen in eine zusammenziehen zu können, setzt man, nachdem die Gleichung durch a dividiert ist,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

dann entsteht durch Einführung von $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ statt $\frac{b}{a}$ die Gleichung

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos\varphi$$

aus welcher zwei Werte für x hervorgehen.

Für die rechte Seite wird man $\frac{c}{b}\sin\varphi$ nehmen, wenn $\varphi > 45^0$ ist, weil dies dann ein genaueres Zahlenergebnis liefert.

Beispiel. $a = 36{,}366$, $b = 3{,}8874$, $c = 24{,}808$.

[Auch mit $x_2 = 131^0\ 11'\ 11''$ stimmt die Probe.]

9) Gegeben: $a \sin x + b \sin y = c$ und $x + y = 2s$.

Auflösung. Es sei $x - y = 2z$; dann ist $x = s + z$ und $y = s - z$. Damit lautet die erste Gleichung

$$a \sin(s + z) + b \sin(s - z) = c$$

und wird

$$(a + b) \sin s \cdot \cos z + (a - b) \cos s \cdot \sin z = c$$

woraus z nach der vorhergehenden Aufgabe gefunden wird und durch z auch x und y in je zwei Werten.

Anmerkung. Entsprechend ist die Behandlung, wenn $x - y = 2u$ gegeben ist oder Kosinus statt Sinus.

11. Übungen.

1) Die Seite des regelmäſsigen Zehnecks im Kreise, $z = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\,r$, liefert durch das halbe Bestimmungsdreieck

$$\sin 18^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}3090.$$

Man finde hierdurch cos 36⁰.

$$[\cos 36^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) = 0{,}8090.]$$

2) Aus $\sin 18^0 = 0{,}3090$ folgt

$$\cos 18^0 = \sqrt{1{,}3090 \cdot 0{,}6910} = 0{,}95106.$$

Nach Nr. 3 am Ende ist

$$\sin 15^0 = 0{,}2588 \text{ und } \cos 15^0 = 0{,}9659.$$

Wie kann man aus diesen vier Werten $\sin 3^0$ und $\cos 3^0$ berechnen?

Ergebnis: $\sin 3^0 = 0{,}0523$, $\cos 3^0 = 0{,}9986$.

3) Von den Schenkeln eines rechten Winkels schneidet eine Gerade die Strecken a und b, eine andere entsprechend die Strecken a_1 und b_1 ab. Unter wie groſsem Winkel schneiden sich die beiden Geraden?

Ergebnis. Der Schnittwinkel x geht hervor aus $\operatorname{tg} x = \dfrac{ab_1 - ba_1}{bb_1 + aa_1}$.

---

4) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$ in eine Funktion des Winkels $\frac{1}{2}\alpha$ zusammenzuziehen.

5) Wenn $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{2}$ ist, wie groſs wird $\cos\alpha$?

(Vergl. das Ergebnis der Aufgabe **2**, 9, 4 und das des Beispiels **2**, 4 am Ende.)

6) Martus, Aufg. 340, 364 b.

7) Im Kreise vom Halbmesser r hat ein Abschnitt den Bogen $2\alpha = 28^0\,22'\,30''$. Man berechne seine Sehne als Vielfaches von r, den Abschnittswinkel (1. T., **11**, 7, Anm.), die Höhe und den Inhalt des Abschnitts.

Ergebnis: $s = 0{,}49019\,r$, der Abschnittswinkel $\alpha = 14^0\,11'\,15''$, die Höhe als Rest $0{,}0305\,r$, genauer $h = 0{,}030501\,r$ und der Inhalt $A = (0{,}1\,r)^2$.

8) Im Kreise von $d = 1$ m Durchmesser wird ein Abschnitt von einer $s = 1$ mm langen Sehne begrenzt. Wie klein ist die Höhe dieses Abschnitts? (Zu berechnen aus der Abteilung der Logarithmentafel, welche die Logarithmen der Sinus bis auf Sekunden der kleinen Winkel angiebt.) [Vergl. **7**, 21, 14.]

Ergebnis. $h = d \sin^2 \frac{1}{2}\alpha = 0{,}00025$ mm, genau $\frac{1}{4000}$ Millimeter. Die Höhe würde also durch ein Mikroskop erst bei tausendfacher Vergröſserung deutlich wahrnehmbar sein. Der Abschnittswinkel ist schon $3'\,26{,}265''$. Hiernach läſst sich nun auch der in den Logarithmentafeln nicht vorhandene Wert des $\cos 0^0\,3'\,26{,}265''$ als Zehnerbruch leicht angeben; woraus ersichtlich wird, warum er nicht in fünf- oder siebenstelliger Logarithmentafel stehen kann.

---

9) Nachzuweisen, daſs $\sin 20^0 + \sin 40^0 = \sin 80^0$ ist.

10) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$ oder $\cos^2\beta - \cos^2\alpha$ nach $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ in ein Produkt von zwei Faktoren zu verwandeln.

Ergebnis: $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.

11) M., Aufg. 264.

---

12) $\cos 5\alpha = 5 \cos\alpha - 20 \cos^3\alpha + 16 \cos^5\alpha$ aus der dritten der Formeln 20 herzuleiten.

Die linke Seite der Gleichung wird zu Null, wenn $5\alpha = 90^0 + n \cdot 180^0$ ist, also bei $\alpha = 18^0 + n \cdot 36^0$. Daher liefert die Lösung der Gleichung, nachdem $\cos\alpha = 0$ für $\alpha_3 = 90^0$ ausgeschieden ist, die Werte

$$\cos\alpha = \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$$

die nach ihrer Gröſse an die betreffenden Winkel gehörig zu verteilen sind.

Der Winkel $(90^0 - \alpha)$ läſst aus der Formel hervorgehen

$$\sin 5\alpha = 5 \sin\alpha - 20 \sin^3\alpha + 16 \sin^5\alpha.$$

13) Es ist $16 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 60^0 \cos 80^0 = 1$. (Formel 20.)

14) Gut logarithmisch zu bestimmen im Kreise vom Halbmesser r den Inhalt eines Fünfecks, dessen Seiten als Eckenlinien eines regelmäſsigen Zwanzigecks von diesem der Reihe nach abschneiden 1, 2, 3, 4, 5 Ecken. (Formel 20.)

Ergebnis: $J = 4 \cos 9^0 \cos 18^0 \cos 36^0 \cos 45^0 \cdot r^2 = 2{,}1495\, r^2$.

---

15) Nachdem durch Entwicklung des Zählers bewiesen ist, daſs

$$\frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c} = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$$

wird, zeige man durch Einsetzen von passenden Werten für a, b und c, daſs für alle Winkel α, β, γ, die sich zu 180^0 ergänzen (also für die Winkel eines Dreiecks) die Formeln gelten

1) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$
2) $\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n\beta + \operatorname{tg} n\gamma = \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma$
3) $\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\beta + \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\gamma$
4) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}\gamma = - \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\gamma$
5) $\operatorname{ctg} n\alpha + \operatorname{ctg} n\beta - \operatorname{tg} n\gamma = - \operatorname{ctg} n\alpha \operatorname{ctg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma$
6) $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta - \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\gamma = - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\gamma$.

16) Es soll bewiesen werden, daſs

$$\sin a + \sin b - \sin(a+b) = 4 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}(a+b).$$

Die rechts stehenden Gröſsen lassen erkennen, welche Werte für a und b zu nehmen sind, damit aus dieser allgemeinen Gleichung unter der besonderen Bedingung, daſs $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ist, hervorgehen die Formeln

1) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$
2) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma$
3) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma$
4) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma$
5) $\cos \tfrac{1}{2}\alpha + \cos \tfrac{1}{2}\beta + \cos \tfrac{1}{2}\gamma = 4 \cos(45^0 - \tfrac{1}{4}\alpha) \cos(45^0 - \tfrac{1}{4}\beta) \cos(45^0 - \tfrac{1}{4}\gamma)$
6) $\cos \tfrac{1}{2}\alpha + \cos \tfrac{1}{2}\beta - \cos \tfrac{1}{2}\gamma = 4 \sin(45^0 - \tfrac{1}{4}\alpha) \sin(45^0 - \tfrac{1}{4}\beta) \cos(45^0 - \tfrac{1}{4}\gamma)$.

17) Durch paarweises Zusammenfassen erweist sich

$$\cos a + \cos b + \cos(a+b) + 1 = 4 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}(a+b).$$

Durch zweckmäſsige Wahl von a und b gehen für Dreieckswinkel hieraus hervor Formeln wie

1) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = - 4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$
2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 4 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma$
3) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma + 1 = 4 \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma$
4) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma - 1 = - 4 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$

5) $\sin {}^1/_2\alpha + \sin {}^1/_2\beta + \sin {}^1/_2\gamma - 1 = 4\sin(45^0 - {}^1/_4\alpha)\sin(45^0 - {}^1/_4\beta)\sin(45^0 - {}^1/_4\gamma)$
6) $\sin {}^1/_2\alpha + \sin {}^1/_2\beta - \sin {}^1/_2\gamma + 1 = 4\cos(45^0 - {}^1/_4\alpha)\cos(45^0 - {}^1/_4\beta)\sin(45^0 - {}^1/_4\gamma)$
und aus der ersten dieser Formeln geht hervor

7) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma.$

(Man mache auf 7) die Probe mit den Winkeln eines gleichseitigen und mit denen eines rechtwinkligen Dreiecks.)

18) Noch andere Übungen in Martus, Aufg. 189—192, 199, 328.

Bestimmungsgleichungen.

Den Winkel x zu bestimmen für die Gleichung

19) $\sin(x + \alpha) + \sin(x - \alpha) = \cos(x + \alpha) + \cos(x - \alpha).$

20) $$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

21) $$\sin 2x = \cos x.$$
$[x_1 = n\pi + {}^1/_2\pi,\ x_2 = 2n\pi + {}^1/_6\pi,\ x_3 = (2n + 1)\pi - {}^1/_6\pi.]$

22) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 8$ durch eine Funktion von $2x$ aufzulösen.
$[x = 7^0\,1'\,5'' + n \cdot {}^1/_2\pi.]$

23) $25\cos 3x = 6\cos x.$
$[x_1 = n\pi + {}^1/_2\pi,\ \alpha = 25^0\,50'\,30'',\ x_2 = 2n\pi \pm \alpha,\ x_3 = (2n + 1)\pi \mp \alpha.]$

24) $\operatorname{tg} x = \cos x.$ $[38^0\,10'\,23'' = \alpha,\ 141^0\,49'\,37'';$
allgemein $x_1 = 2n\pi + \alpha,\ x_2 = (2n + 1)\pi - \alpha.]$

25) $\cos 2x - \sin x = {}^1/_2.$ [Aus jedem Viertel erhält man einen Wert. Vergl. 1).]

26) $\frac{1}{\sin x} - \sin x = \operatorname{tg} {}^1/_2 x.$ $[x = 2n\pi \pm 51^0\,49'\,37''.]$

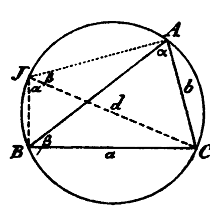
27) $8 + \sin^2 x = 9\sin 2x.$ Man nehme 8 als $8(\sin^2 x + \cos^2 x)$.
$[\alpha = 53^0\,7'\,48'',\ \beta = 33^0\,41'\,24'';\ x_1 = \alpha + n\pi,\ x_2 = \beta + n\pi.]$

28) Noch andere Übungsaufgaben in M., Aufgaben, Nr. 201 — 209A.

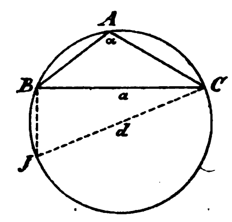
---

4. Glied. Hauptformeln der Dreiecksrechnung.

1. Sinussatz. $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = d$$
wo d der Durchmesser des **um** das Dreieck beschriebenen Kreises ist.



Figur 29.



Figur 30.

Bw. Man ziehe von C aus den Durchmesser CJ des um das Dreieck beschriebenen Kreises und verbinde J mit B; dann ist in Figur 29 $\angle\ CJB = \alpha$ und man hat aus dem rechtwinkligen Dreiecke JBC
$$\frac{a}{\sin\alpha} = d.$$

Verbindet man J mit A, so kommt ebenso

$$\frac{b}{\sin\beta} = d$$

und, wenn man von B oder A aus den Durchmesser zieht,

$$\frac{c}{\sin\gamma} = d.$$

Ist α ein stumpfer Winkel, so wird in Figur 30 $\frac{a}{\sin J} = d$ durch $\sin J = \sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ auch wieder $\frac{a}{\sin\alpha} = d$.

Mithin sind die drei Brüche stets einander gleich.

Anmerkung. Noch einfacher ist die Ableitung mittels des doppelten Inhaltes des Dreiecks durch Dividieren von

$$abc = abc = abc = abc$$

durch

$$bc\sin\alpha = ac\sin\beta = ab\sin\gamma = 2\triangle$$

und es ist $\frac{abc}{2\triangle} = d$ nach 1. *T.*, **21**, 15, 9.

Die Formel lehrt: Im Verhältnis der Dreiecksseiten stehen die Sinus der Gegenwinkel (nicht die Winkel selbst).

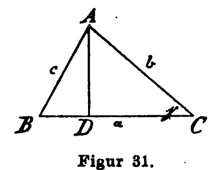
Aufgabe. Der gröfseren von zwei Dreiecksseiten, deren Verhältnis v gegeben ist, soll ein doppelt so grofser Winkel, als der kleineren, gegenüberliegen. Wie grofs sind die Winkel solches Dreiecks und wie verhält sich die dritte Seite zur kleineren? Beispiel: $v = {}^8/_5$.

Ergebnis. Den der kleineren Seite b gegenüberliegenden Winkel x findet man aus $\cos x = {}^1/_2\, v$ und nach Anwendung der Formel 22 $\frac{c}{b} = v^2 - 1$.

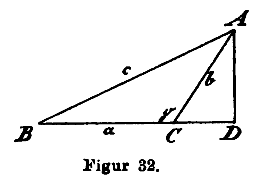
Im Beispiele $x = \beta = 36^0\ 52'\ 12''$
$\alpha = 73\ \ 44\ \ 24$ $\quad c = 1{,}56\, b$, also
$\gamma = 69\ \ 23\ \ 24$ $\quad a : b : c = 8 : 5 : 7{,}8$.

Abschlufs. Die Aufgabe fordert $v > 1$ und $\cos x\ v < 2$; also ist die Grenzbedingung: $1 < v < 2$.

2. Kosinussatz. $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$.



Figur 31.



Figur 32.

Bw. Man fälle die Höhe von A auf die Grundseite. Ist Winkel γ spitz, so wird

$$c^2 = BD^2 + AD^2 = [a - b\cos\gamma]^2 + [b\sin\gamma]^2$$

woraus durch Auflösen der Klammern die Behauptung hervorgeht.

Ist Winkel γ stumpf, so wird

$$c^2 = BD^2 + AD^2 = [a + b\cos(180^0 - \gamma)]^2 + [b\sin(180^0 - \gamma)]^2 = [a - b\cos\gamma]^2 + [b\sin\gamma]^2$$

also ebenso.

Aufgabe. Wie grofs mufs der von den gegebenen Dreiecksseiten a und b eingeschlossene Winkel γ genommen werden, wenn der Inhalt des Dreiecks gleich dem vierten Teile des Quadrats über der dritten Seite sein soll?

Beispiele: 1) $b = {}^1/_2\, a$, 2) $b = 0{,}7\, a$.

Auflösung. Aus der Bedingung

$$^1/_2\, ab \sin\gamma = {}^1/_4\, [a^2 + b^2 - 2\, ab \cos\gamma]$$

erhält man

$$\sin(\gamma + 45^0) = \frac{a^2 + b^2}{2\, ab\sqrt{2}}$$

woraus zwei Werte für γ hervorgehen.

Man nehme bei $\log\sqrt{2}$ eine sechste Bruchstelle mit (die man durch einen Punkt von der fünften trennt). Im Beispiele

1) $b = {}^1/_2\, a$ $\gamma_1 = 17^0\ 6'\,55''$ 2) $b = 0{,}7\, a$. $\gamma_1 = 3^0\,48'\,46''$
$\gamma_2 = 72\ 53\ 5.$ $\gamma_2 = 86\ 11\ 14.$

Schreibt man die (von den Brüchen befreite) Bedingungsgleichung für γ_1 hin und dann für $\gamma_2 = 90^0 - \gamma_1$, so sieht man, nach Umstellung der Differenz, dafs ein zweites Dreieck auftreten mufste.

Abschlufs. Sind die gegebenen Seiten nicht gleich, so werde die kleinere b genannt. Der gefundene Wert von $\sin(\gamma + 45^0)$ mufs 1) gröfser bleiben, als $\sin 45^0 = \sqrt{^1/_2}$. Dies Erfordernis findet immer statt. Er darf 2) nicht gröfser werden, als 1:

$$a^2 + b^2 \leqq 2\, ab\sqrt{2} \qquad \text{oder} \qquad a^2 - 2\, ab\sqrt{2} + b^2 \leqq 0.$$

Diesen Ausdruck mufs man nicht nach der kleineren Gröfse b entwickeln, weil die linke Seite negativ ist (< 0). Man kommt kürzer zum Ziele, wenn man den Ausdruck zu einem Quadrate vervollständigt durch Addieren von a^2

$$2\, a^2 - 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot b + b^2 \leqq a^2$$

also

$$a\sqrt{2} - b \leqq a$$

mithin besteht für b die Grenzbedingung

$$(\sqrt{2} - 1)\, a \leqq b \leqq a, \text{ das ist } 0{,}414\, a \leqq b \leqq a.$$

Bei der unteren Grenze, $b = (\sqrt{2} - 1)\, a$, giebt es nur 1 Dreieck mit $\gamma = 45^0$, und bei der oberen, $b = a$, geht aus

$$\sin(\gamma + 45^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^0 = \sin 135^0$$

hervor $\gamma_1 = 0$ für das verschwindende Dreieck und $\gamma_2 = 90^0$, welcher Winkel das Dreieck mit den Seiten a und b so grofs, wie möglich, macht. In dem über a gezeichneten Quadrate kann man das Anfangs-Dreieck und das letztmögliche bequem darstellen, auch ein Paar der dazwischen liegenden (z. B. mit $b = {}^1/_2\, a$) einzeichnen.

3. Die Mollweideschen Formeln.*)

$$1)\quad (a + b) \cos {}^1/_2\, (\alpha + \beta) = c \cos {}^1/_2\, (\alpha - \beta)$$
$$2)\quad (a - b) \sin {}^1/_2\, (\alpha + \beta) = c \sin {}^1/_2\, (\alpha - \beta)$$

zu merken durch den Gleichklang: bei Minus steht Sinus!

*) Mollweide, geb. 1774 zu Wolfenbüttel, gest. 1825 als Professor der Mathematik zu Leipzig. Er machte 1808 seine Formeln bekannt.

Bw. Nach dem Satze: „Sind Brüche gleich, so ist der Bruch aus der Summe der Zähler und der Summe der Nenner gleich jedem der Brüche“ (1. T., **18**, 2, Zs.) folgt aus dem Sinussatze

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a+b}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder

$$\frac{a+b}{2\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)\cos {}^1/_2(\alpha-\beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Geht man auch rechts zum halben Winkel über, so ergiebt sich nach Beseitigen der Nenner die erste Behauptung. Die zweite erhält man ebenso durch den Satz mit dem Unterschied der Zähler und dem der Nenner.

Aufgabe. Von einem gleichschenkligen Vierecke sind gegeben die ungleichen Gegenwinkel 2α und 2β und die ihre Scheitel verbindende Eckenlinie e. Wie grofs ist der halbe Umfang s, der Inhalt und der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises?

Ergebnis:

$$s = \frac{\cos {}^1/_2(\alpha-\beta)}{\cos {}^1/_2(\alpha+\beta)}\,e,\quad J = \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\,e^2,\quad \varrho = \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{2\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)\cos {}^1/_2(\alpha-\beta)}\,e.$$

4. Tangenssatz. $$\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg} {}^1/_2(\alpha+\beta)} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Diese Formel entsteht durch Dividieren der zweiten Mollweideschen Formel durch die erste.

Aufgabe. Von einem Dreiecke sind gegeben der Durchmesser d des umbeschriebenen Kreises, eine Seite c und das Verhältnis der beiden andern Seiten $a : b = v$. Es sind zu berechnen die Winkel und die beiden andern Seiten.

Beispiel. $d = 39$ cm, $c = 38$ cm, $v = {}^7/_3$.

Auflösung. Aus $\sin\gamma = \frac{c}{d}$ gehen zwei Winkel hervor. Zu jedem von beiden liefert der Tangenssatz (nachdem man $\frac{a-b}{a+b}$ im Zähler und Nenner durch b dividiert hat)

$$\operatorname{tg} {}^1/_2(\alpha-\beta) = \frac{v-1}{v+1}\operatorname{ctg} {}^1/_2\gamma$$

aus der Logarithmentafel einen Wert $\quad {}^1/_2(\alpha-\beta) = \delta_{\frac{1}{2}}$

dazu hat man $\quad {}^1/_2(\alpha+\beta) = 90^0 - {}^1/_2\gamma$

und erhält durch Zusammenzählen und Abziehen die Winkel α und β; endlich die Seiten

$$b = d\sin\beta \qquad \text{und} \qquad a = d\sin\alpha = vb$$

zur Prüfung der Rechnung auf Richtigkeit.

Da $c \leqq d$ sein mufs, so sind im Kreise immer zwei solche Dreiecke vorhanden.

Im Beispiele ergiebt die gleichzeitig für beide Dreiecke neben einander auszuführende Rechnung

$\gamma_1 = 77^0$	$\gamma_2 = 103^0$
$\alpha_1 = 78^0\ 11'\ 46''$	$\alpha_2 = 56^0\ 9'$
$\beta_1 = 24\ 48\ 14$	$\beta_2 = 20\ 51$
$b_1 = 16{,}361$ cm	$b_2 = 13{,}881$ cm
$a_1 = 38{,}175$ cm	$a_2 = 32{,}389$ cm
und $a_1 = vb_1 = 38{,}1757$ cm;	$a_2 = vb_2 = 32{,}389$ cm.

---

5. Glied. Das schiefwinklige Dreieck.
Die vier Hauptaufgaben.

1. Erste Aufgabe. 1 Seite und 2 Winkel. Gegeben sind a, β und γ; man soll die übrigen Stücke, auch den Inhalt des Dreiecks, berechnen.

Auflösung. Zunächst $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$. Der Sinussatz liefert

$$\frac{a}{\sin\alpha} = d$$

(da nach d nicht gefragt ist, braucht bei einer Beispielrechnung die Zahl d nicht aufgeschlagen zu werden; d dient hier nur, um kürzer schreiben zu können)

dann $b = d \sin\beta \qquad c = d \sin\gamma$

und $\triangle = {}^1/_2\, ab \sin\gamma$.

Wird nur der Inhalt verlangt und ist, aufser den Winkeln, a oder d gegeben, so rechnet man nach

$$\triangle = {}^1/_2\, a^2 \frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin\alpha} = {}^1/_2\, d^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

2. Zweite Aufgabe. 2 Seiten und ein Gegenwinkel.

Erster Fall: Gegenwinkel der gröfseren Seite. Gegeben sind a, b, und zwar $a > b$, und α.

Auflösung. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = d$, $\sin\beta = \dfrac{b}{d}$

hieraus geht nur 1 Winkel hervor, weil der kleineren Seite ein spitzer Winkel gegenüberliegt. Dann $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ und

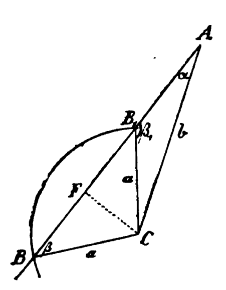
$c = d \sin\gamma \qquad \triangle = {}^1/_2\, ab \sin\gamma$.

Zweiter Fall: Gegenwinkel der kleineren Seite. Gegeben sind a, b, und zwar $a < b$, und α.

Die Auflösung ändert sich nur darin, dafs nun aus $\sin\beta = \dfrac{b}{d}$ zwei Winkel hervorgehen, β und $\beta_1 = 180^0 - \beta$. In der That liefert die mit α beginnende Herstellung zwei Dreiecke ACB und ACB_1, und im zweiten ist $\beta_1 = 180^0 - \beta$, wie das Dreieck CBB_1 erkennen läfst.

Abschlufs. Es mufs gegeben werden

$$a \geqq b \sin\alpha.$$



Figur 33.

3. Dritte Aufgabe. 2 Seiten und der Zwischenwinkel. Zwei Behandlungsweisen.

1) Tangenssatz und Mollweidesche Formel.

Zu den gegebenen Gröſsen a, b und γ liefert

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} {}^1/_2 \gamma$$

aus der Logarithmentafel $\quad {}^1/_2 (\alpha - \beta) = \delta$

dazu kennt man $\quad {}^1/_2 (\alpha + \beta) = 90^0 - {}^1/_2 \gamma$

und hat daraus α und β.

Wollte man die dritte Seite, c, durch den Sinussatz berechnen, so hätte man in den Tafeln zu viel zu blättern. Man findet sie schneller durch eine der beiden Mollweideschen Formeln, in welche man ${}^1/_2 \gamma$ einführt,

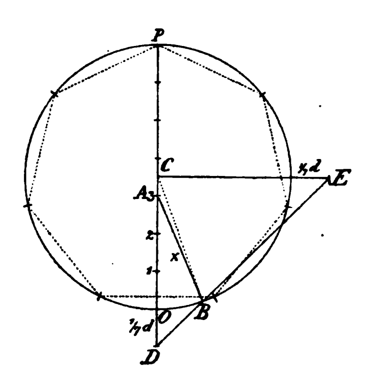
entweder $$c = \frac{(a + b) \sin {}^1/_2 \gamma}{\cos {}^1/_2 (\alpha - \beta)}$$

oder $$c = \frac{(a - b) \cos {}^1/_2 \gamma}{\sin {}^1/_2 (\alpha - \beta)}$$

und zwar nimmt man, wenn a und b wenig ungleich sind, die erste, bei erheblicher Ungleichheit, die ${}^1/_2 (\alpha - \beta) > 45^0$ macht, die zweite; denn das Zahlenergebnis wird ungenau, wenn der Nenner ein kleiner Bruch ist (dessen Fehler einen nicht unbeträchtlichen Teil von ihm selber ausmacht, so daſs er mehr oder weniger oft im Zähler enthalten sein kann).

Beispiel. Zeichnung der Seite des einbeschriebenen regelmäſsigen n-Ecks. Die Seiten derjenigen einbeschriebenen regelmäſsigen n-Ecke, für welche es keine zutreffende Herstellungsweise giebt, kann man annähernd, aber mit sehr groſser Genauigkeit, auf folgende Weise erhalten:*)

Man verlängert den in n gleiche Stücke geteilten Durchmesser (OP) um den $n$ten Teil und den auf ihm senkrecht stehenden Halbmesser ebenso weit, und verbindet die beiden erhaltenen Punkte (D und E) durch eine (den Kreis schneidende) Gerade. Der Abstand des dem Durchmesser näheren Schnittpunktes (B) von seinem dritten Teilpunkte (A) ist für die Seite des regelmäſsigen n-Ecks im Kreise zu nehmen.



Figur 34.

Dieses Zeichenverfahren auf Genauigkeit zu prüfen, berechne man die Strecke $AB = x$, sowie die Seite s des regelmäſsigen n-Ecks im Kreise vom Durchmesser d, und gebe an, welchen Bruchteil von d und von s die Abweichung der Strecke x von s noch nicht erreicht.

(Für die Figur nehme man $d = n$ Centimeter und trage beim Zeichnen des n-Ecks von einem Eckpunkte aus die Hälfte der Sehnen nach der einen, die andere Hälfte nach der andern Seite im Kreise herum, weil sich sonst, trotz Sorgfalt, die Zeichenfehler zu sehr häufen.)

---

*) Gefunden von Karl Bernhard zu Sachsen-Weimar. (A. Kunze, Lehrbuch der Geometrie. Jena, 1841.)

Ausführung. Zuerst ist aus dem Dreieck BCD der Winkel sei C, γ, zu berechnen. In diesem Dreiecke kennt man zwei Seiten und den Gegenwinkel der kleineren, nämlich $BC = \frac{1}{2} d$, $CD = \frac{1}{2} d + \frac{1}{n} d = \frac{n+2}{2n} d$ und $\angle D = 45^0$; und es ist nach dem Sinussatz

$$1)\ \sin (45^0 + \gamma) = \frac{n+2}{2n}\sqrt{2}.$$

Nun hat man im Dreieck ABC zwei Seiten und den Zwischenwinkel. Hier wird der Tangenssatz

$$2)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{3}{n+3} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \gamma$$

und man geht, ohne den Winkel $\frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ aufzuschreiben, mit dem Minutenbruche sogleich zur Bestimmung von $\log \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ über; denn da $\frac{1}{2} (\alpha - \beta) > 45^0$ wird, nimmt man zur Berechnung der Seite x die zweite Mollweidesche Formel:

$$3)\ x = \frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\frac{1}{3} n \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)} \cdot d.$$

Endlich ist die Seite s des regelmäfsigen n-Ecks, wenn $180^0 : n$ mit δ bezeichnet wird,

$$4)\ s = d \sin \delta.$$

Berechnung. Bei $n = 7$ kann man $\sqrt{2}$ bequem durch 14 dividieren, da die Ziffernfolge der $\sqrt{2}$ die Producte $2 \cdot 7$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 7$, $5 \cdot 7$ hat, $\sqrt{2} = 1{,}4\ 14\ 21\ 35$. Man findet $x = 0{,}43\,376\ d$, während die Seite des regelmäfsigen Siebenecks ist $s = 0{,}43\,388\ d$. Die Strecke x ist nur um $0{,}00\,012\ d$, das ist um weniger als $\frac{1}{8000} d$ zu klein; es fehlt ihr $\frac{1}{3600} s$.

Bei einem Kreise von 8 cm Durchmesser beträgt der Fehler nur 0,01 mm. An einer beim Zeichnen des regelmäfsigen Siebenecks bemerkten Abweichung hat nur der Zeichner schuld.

Vergl. Nr. 6, 12).

2) Zweite Behandlungsweise, die nur zu wählen ist, wenn allein nach der dritten Seite gefragt wird.

Kosinussatz mit Hilfswinkel entweder aus $\cos \varphi$ oder aus $\operatorname{tg} \varphi$.

In

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

kann man $a^2 + b^2$ entweder zu $(a+b)^2$ oder zu $(a-b)^2$ ergänzen.

Im ersten Falle folgt aus

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos \gamma)$$
$$4ab \cos^2 \tfrac{1}{2} \gamma = (a+b)^2 - c^2$$

und nach Dividieren durch $(a+b)^2$

$$\frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \tfrac{1}{2} \gamma = 1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Da immer $a + b > c$ ist, kann man für den echten Bruch $\frac{c}{a+b}$ den Sinus eines Hilfswinkels φ einführen, welchen man (nach dem Einsetzen und Wurzelausziehen) erhält aus

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cos \tfrac{1}{2} \gamma = \cos \varphi$$

und hat dann

$$c = (a+b) \sin \varphi.$$

Im zweiten Falle

$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab\,(1 - \cos\gamma)$$

kommt ebenso

$$\frac{c^2}{(a-b)^2} = 1 + \frac{4ab}{(a-b)^2}\sin^2 {}^1/_2\,\gamma$$

was man zusammenfassend schreiben kann

$$\left[\frac{c}{a-b}\right]^2 = 1 + \left[\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin {}^1/_2\,\gamma\right]^2.$$

Stets kann man setzen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin {}^1/_2\,\gamma$$

dann wird

$$\left[\frac{c}{a-b}\right]^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

also $c = \dfrac{a-b}{\cos\varphi}$ oder, wenn $b > a$ ist, $c = \dfrac{b-a}{\cos\varphi}$.

Mit dem Hilfswinkel aus $\operatorname{tg}\varphi$ rechnet man, wenn ${}^1/_2\,\gamma$ nur klein ist und a und b recht ungleich sind.

Dasselbe Beispiel des Näherungswertes für die Seite eines regelmäfsigen n-Ecks. Da ${}^1/_2\,\gamma$ nur klein ist, nimmt man die letzten Formeln. Sie werden

$$\operatorname{tg}\varphi = {}^1/_3\sqrt{n\,(n-6)}\cdot\sin {}^1/_2\,\gamma$$

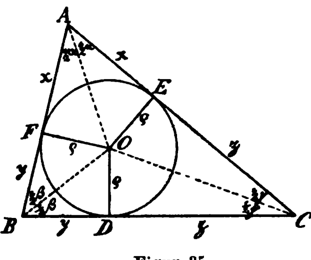
$$x = \frac{1}{{}^1/_3\,n\cos\varphi}\cdot d.$$

Das Zahlenergebnis für $n = 7$ stimmt mit obigem ganz überein.

4. Vierte Aufgabe. 3 Seiten. Aus den drei Seiten die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Ausführung. Der Halbmesser des **in** das Dreieck beschriebenen Kreises (1. T., **21**, 15, 8)

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$$



Figur 35.

liefert, da der Umfang $2s$ die Seitenabschnitte $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$ werden läſst, sofort

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\,\alpha = \frac{\varrho}{s-a}$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\,\beta = \frac{\varrho}{s-b}$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\,\gamma = \frac{\varrho}{s-c}.$$

Man merke: Die Seiten bestimmt der Durchmesser des **um**beschriebenen Kreises, die Winkel der Halbmesser des **ein**beschriebenen Kreises.

Anmerkung. Man rechnet alle drei Winkel des Dreiecks nach diesen Formeln aus, damit durch die Winkelsumme eine Prüfung des Rechnungsergebnisses gewonnen wird.

Beispiel. Die Winkel des Dreiecks mit den Seiten $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ Längeneinheiten bis auf Zehntelsekunden zu berechnen und durch die Winkelsumme die Probe zu machen.

Ergebnis. $\alpha = 53^0\,7'\,48{,}8''$, $\beta = 59^0\,29'\,22{,}8''$, $\gamma = 67^0\,22'\,48{,}8''$. Die Winkelsumme ist um 0,4" zu grofs. Dies ist ein bei fünfstelligen Logarithmen durchaus befriedigendes Ergebnis. Siebenstellige Logarithmen liefern die Sekunden bei α 48,364", bei β 23,156" und bei γ 48,464", also die Winkelsumme um 0,016" zu klein. (Gewöhnlich wird das Ergebnis genauer, wenn man die Bestimmung des Winkels nur von einem Logarithmus abhängig macht, indem man hier $^4/_7$ und $^2/_3$ in einen Zehnerbruch verwandelt. Bei vorliegendem Beispiele ist dies nicht der Fall.)

---

5. Messungen.

a) Entfernungsbestimmungen.

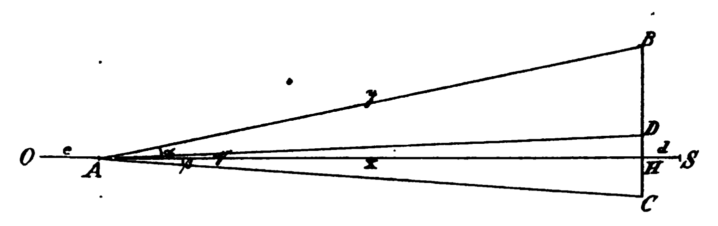
1) Entfernung der Sakrower Kirche von der Glienicker Brücke bei Potsdam. (Vergl. Figur 37.) Diese Entfernung zu bestimmen, wurde auf der 177,14 m langen Glienicker Brücke eine Standlinie AB abgegrenzt und ihre Länge durch zweimaliges Messen im Mittelwerte $s = 154{,}343$ m gefunden. Es bezeichne S in der wagerechten Grundebene den Standpunkt des weifsen marmornen Kreuzes mitten auf dem Vorhofe der Kirche in Sakrow. Die Messung ergab $\angle SAB$ $\alpha = 68^0\,50^3/_4{}'$ und $\angle SBA$ $\beta = 104^0\,40'$. — Um zur Probe für die Güte der Messung einen zweiten Wert für SA zu erhalten, wurde die Standlinie AB am Glienicker Ende B um eine Strecke verkürzt; sie war nun $AB_1 = 149{,}384$ m. An der neuen Stelle ergab sich der Winkel SB_1A $\beta_1 = 104^0\,53'$. Wie grofs sind die Entfernungen SA, SB und SB_1?

Ergebnis. Die Rechnung ergiebt für SA $x_1 = 1321{,}5$ m und $x_2 = 1321{,}7$ m. Die Abweichung von 0,2 m ist nur $^1/_{6600}$ der Länge. $SB = 1273{,}97$ m, $SB_1 = 1275{,}44$ m. Von der Mitte der Brücke, auf der Havel hin, bis zur Sakrower Kirche sind also rund 1300 m.

2) Entfernung der beiden Aussichtstürme auf dem Pfingstberge bei Potsdam von den drei gröfsten Türmen in Berlin. Der Standpunkt mitten auf dem südwestlichen Aussichtsturme auf dem Pfingstberge werde mit J bezeichnet, der Höhenfufspunkt der Marienkirche mit M, der der Petrikirche mit P und der des Rathausturmes mit R. In J ergab für die in Ost-Nordost sichtbaren Türme, von denen der der Marienkirche der nördlichste ist, die Messung des Winkels MJP $1^0\,28'$ und die wiederholte Messung des Winkels MJR den Mittelwert $0^0\,33^1/_8{}'$. Auf dem Turme der Marienkirche im Mittelpunkte des Achtecks, an dessen Rand die zwölf den Turmhelm tragenden Säulen stehen, lieferte der Theodolit $\angle JMP = 51^0\,57'$ und $JMR = 88^0\,53^3/_4{}'$. Es ist $MP = 833{,}58$ m und $MR = 252{,}133$ m. (**6**, 2, 1 und **5**, 6.) Man berechne aus den beiden (einzeln zu zeichnenden) Dreiecken MJP und MJR, wieviel Kilometer der Aussichtsturm auf dem Pfingstberge bei Potsdam von jedem der drei Türme in Berlin entfernt ist, und gebe auch an, um welchen Bruchteil von JM die beiden Ergebnisse für die Länge dieser Strecke von einander abweichen.

Ergebnis. Es ist $JM_1 = 26{,}152$ km und $JM_2 = 26{,}166$ km. Die Abweichung ist kaum mehr als $^1/_{1900}$ der Entfernung. Also ist trotz der ungünstig kleinen Winkel J das Ergebnis noch recht genau. Für die südlich von der Marienkirche (mit $12^5/_8{}^0$ westlicher Abweichung) stehende Petrikirche beträgt die Entfernung nur $JP = 25{,}646$ km und für den Rathausturm $JR = 26{,}162$ km.

3) Länge des Schlosses in Berlin in seiner Seite am Schloſsplatze. Auf dem flachen Dache des Schlosses wurde bei der Südecke am Sandsteingeländer eine 3,5 m



Figur 36.

lange Nivellierlatte senkrecht gehalten. Von einem der Ostecke nahen Punkte aus hatte die Richtung nach ihrem oberen Ende den Steigungswinkel $\alpha = 0^0\,52^1/_8{}'$ und die nach ihrem unteren Ende den Senkungswinkel $\beta = 0^0\,22^1/_2{}'$. Um für den Abstand des Scheitels dieser Winkel von jener Latte noch eine Bestimmung zu erhalten, wurde für die Richtung nach der Stelle, an welcher die oberen 2 Meter endigten, der Steigungswinkel $\gamma = 0^0\,9^1/_4{}'$ abgelesen. Man berechne den Abstand als die wagerecht liegende Höhe der beiden Dreiecke mit den Grundseiten 3,5 m und 2 m, und füge für die ganze Länge des Schlosses hinter der Latte noch 1,26 m Länge der Eckplatte des Geländers und hinter dem Scheitel der Winkel dessen Abstand vom äuſseren Rande der Rundung an der Ostecke des Schlosses, 4,82 m, hinzu.

Ergebnis. Da die Winkel am Höhenkreise nicht bis auf Sekunden bestimmbar sind, kommt bei der starken Veränderlichkeit der Sinus kleiner Winkel hier mit gröſserem Unterschiede, als bei anderen Messungen, für den Abstand $x_1 = 161{,}22$ m und $x_2 = 160{,}35$ m, also für die ganze Länge $z_1 = 167{,}30$ m und $z_2 = 166{,}43$ m. Die gröſsere Grundseite ist der günstigere Fall. Also ist abzurunden: $z = 167$ m. Die Länge der Südostseite des Schlosses beträgt 167 Meter. (Das Ergebnis kann man zum Vergleiche mit andern Strecken als $1^2/_3$ Hundert von Metern sich merken.) Die Länge ist schon $^1/_6$ Kilometer. Also könnten auf dem Kilometer vom Brandenburger Thore bis zum Denkmal Friedrichs des Groſsen nur sechs solche Gebäude stehen, während auf der Südseite 40 und auf der Nordseite 44 groſse Häuser vorhanden sind, so daſs die Länge des Schlosses so groſs ist, wie durchschnittlich 7 dieser groſsen Häuser.

4) Breite der Havel zwischen dem Parke Babelsberg und der Berliner Vorstadt von Potsdam. Im Parke Babelsberg wurde (vor dem Flatowturme) durch zwei senkrechte Stangen in B und C eine Grundlinie abgesteckt, welche in einem Abstande von 13,5 m am Havelufer entlang lief, und ihre Länge dreimal gemessen. Als Mittelwert ergab sich $BC = a = 153{,}84$ m. Dann wurde in B das Fernrohr des Theodoliten nach der senkrechten Kante A eines am gegenüberliegenden Ufer unmittelbar am Wasser stehenden Pfahles und darauf nach C gerichtet und der Grundwinkel ABC $\beta = 86^0\,57^3/_4{}'$ am Grundkreise abgelesen und ebenso in C der Winkel ACB $\gamma = 79^0\,27^1/_4{}'$. — Für eine zweite Berechnung wurde auf derselben Grundlinienrichtung weiterhin die Strecke $a_1 = 198{,}36$ m abgemessen und die Winkel $\beta_1 = 88^0\,28^1/_2{}'$

und $\gamma_1 = 74^0\,16'$ erhalten. Wie grofs ergiebt sich aus beiden Messungen die Breite der Havel vor dem Flatowturme?

Ergebnis. $x_1 = 629{,}6$ m und $x_2 = 629{,}8$ m. Die Havel ist dort 629,7 m breit. Die Glienicker Brücke, welche weiter stromauf bei der Biegung über die Havel geht, ist 177,14 m lang. Die Havel ist am unteren Teile des Parkes Babelsberg $3^1/_2$ mal so breit, als dort, wo die Glienicker Brücke hinüber führt.

5) Breite und Wölbungshöhe eines Havelsees bei Potsdam. Nördlich von der Glienicker Brücke erweitert sich die Havel zu einem See. Am östlichen Ufer ist auf einer in das Wasser vortretenden Biegung ein Kriegsschiff nachgebildet, dessen 3 Masten im Erdboden feststehen. Am westlichen Ufer wurde ein Punkt aufgesucht, von welchem aus die drei Masten in einer Richtung hinter einander erschienen, und dieser Punkt (F in der Figur 37) durch eine Stange weithin sichtbar gemacht. Die Lage der Fufspunkte C, D, E der von den Spitzen der Masten auf eine wagerechte Grundebene zu fällenden Senkrechten wurde durch ihre Abstände genau bestimmt.*) Es war der Abstand a

Figur 37.

für die erste Rechnung	für die 2. Rechnung
$CE = 22{,}309$ m	$DE = 12{,}826$ m

Sie erschienen in einem am östlichen Ende der Glienicker Brücke gewählten Standpunkte G unter dem Winkel α

$CGE = 5^0\,5'$	$DGE = 2^0\,55'$

und der Winkel EGF betrug $\beta = 71^0\,42'$. Endlich wurde im Punkte F der Winkel EFG $\gamma = 12^0\,17^3/_4'$ beobachtet. Wegen der Veränderlichkeit des Wasserstandes kann man für die zwischen E und F noch dem Ufer angehörigen beiden Strecken rund 4 m von EF in Abzug bringen.

Der ruhige Wasserspiegel ist, als Teil der Erdkugeloberfläche, ein wenig gewölbt. Die Gerade, welche die Mitte M mit dem Wasserrande bei E oder F verbindet, ist eine Sehne s, deren Länge durch die Hälfte der abgerundeten Zahl für die ganze Breite des Wassers angegeben wird. Die die Wasserränder zwischen E und

*) Die Strecken CE und DE wurden berechnet aus einer am Wege bei der Schiffsnachbildung doppelt gemessenen Grundlinie mit den an ihr liegenden Winkeln, deren Schenkel in C, D und E sich schneiden.

F verbindende Sehne schneidet von dem in M endigenden Erddurchmesser ein kleines Stückchen y rechtwinklig ab, welches die Wölbungshöhe des Wasserspiegels ist. Der von der Sehne s gelieferte Durchmesserabschnitt y wird also gefunden aus der Gleichung $2r \cdot y = s^2$, wo der Erd-Durchmesser $2r = 12\,740$ Kilometer ist.*)

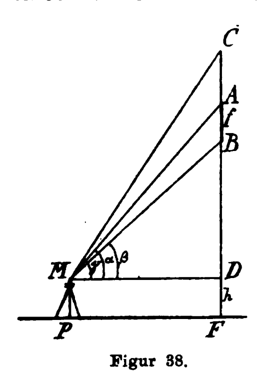
Wie breit ist an der gemessenen Stelle der Wasserspiegel und wie hoch wölbt er sich über der Mitte der die Ufer verbindenden Sehne?

Antwort. Man erhält für EF 1122,3 und 1122,1 m. Die Breite des Havelsees ist also dort 1118 m; und diese Strecke ist so grofs, dafs erst die ganze Strafse „Unter den Linden" in Berlin, von der Mitte des Opernplatzes bis zum Brandenburger Thor sie überspannen könnte. — Die Wölbungshöhe dieses wenig über 1 km breiten Wasserspiegels beträgt schon 2,45 cm, das ist mehr als Daumenbreite. Solcher Wasserspiegel weicht also von einer Ebene schon recht angebbar ab. — Bei längeren Seen wächst die Wölbungshöhe sehr beträchtlich, bei 4 km Länge auf 31 cm (Havel mit der Bucht „Wannsee") und bei 6 km schon auf 71 cm.

---

b) Höhenbestimmung aus senkrechter Strecke.

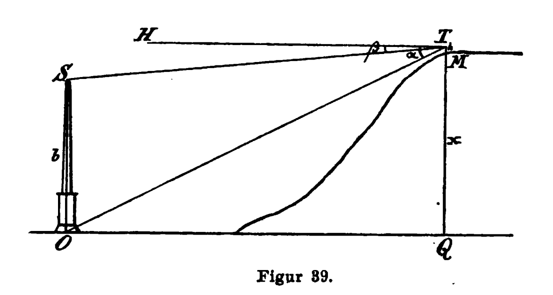
6) Höhe des Berliner Universitätsgebäudes, bestimmt mittels der Höhe eines Fensters. Bei den Fenstern des obersten Stockwerks vom Universitätsgebäude beträgt die Höhe der äufseren Öffnung $f = 1{,}957$ m. Nach dem oberen und unteren Rande eines derselben im östlichen Seitenflügel wurde von einem gerade vor ihm im Garten liegenden Punkte aus das Fernrohr gerichtet, und die Steigungswinkel $\alpha = 28^0\,21'$ und $\beta = 24^0\,53\tfrac{1}{2}'$ beobachtet; ebenso von dort auch nach dem oberen Rande der über diesem Fenster befindlichen Stelle des Sandsteingeländers auf dem flachen Dache; dieser Steigungswinkel betrug $\gamma = 37^0\,0'$. Der Scheitelpunkt der Winkel lag $h = 1{,}459$ m hoch über der durch die Granitplatte vor der Thür bestimmten Fläche des Gartens. Wie hoch erhebt sich über dieser Ebene der östliche Seitenflügel der Universität?



Figur 38.

Ergebnis. $x = \dfrac{f \cos\alpha \, \cos\beta \, \mathrm{tg}\,\gamma}{\sin(\alpha - \beta)} + h.$ $x = 20{,}975$ m. (Vergl. 1, 6, 1.)

7) Höhe des Windmühlenberges bei Potsdam. Vom Mühlenberge aus hatte die Richtung zum Höhenfufspunkte des Obelisken vor Sans-souci den Senkungswinkel $HTO = \alpha = 8^0\,32'$ und die nach der Spitze des $b = 22{,}75$ m hohen Obelisken den Senkungswinkel $HTS = \beta = 1^0\,12'$. Dabei war der Scheitel T dieser Winkel $h = 1{,}390$ m über dem Standpunkte M.



Figur 39.

---

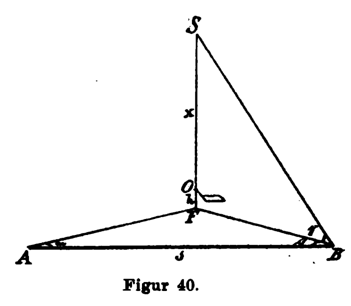
*) Wer aus der Sehne x den Halbmesserabschnitt $y = r - \sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2}x)^2}$ berechnen wollte, würde elf Ziffern der Quadratwurzelausziehung brauchen. Dann kommt für y derselbe Wert, wie in obiger einfacher Rechnung.

Bei der zweiten Messung, die von einem 1 m weiter vor gewählten, etwas niedrigeren Standorte aus gemacht wurde, war $\alpha = 8^0 28^1/_2'$, $\beta = 1^0 6^1/_2'$ und $h = 1{,}205$ m. Wieviel beträgt demnach die Höhe des Windmühlenberges über der Grundfläche des Obelisken, der auf der Grundebene des Parkes von Sans-souci steht? (Vergl. 1, 6, 2.)

Ergebnis. $x_1 = 25{,}05$ m, $x_2 = 24{,}94$ m. Der Windmühlenberg ist 25 m hoch über der Grundebene des Parkes von Sans-souci.

c) Höhenbestimmung von querlaufender Grundlinie aus.

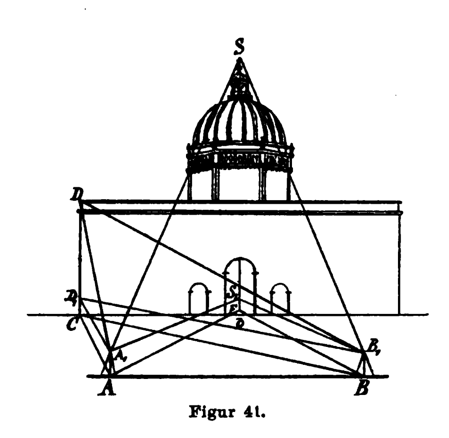
8) Höhe der Nikolaikirche in Potsdam. Quer vor der Kirche wurde auf dem Hofe des Königlichen Schlosses eine Standlinie AB dreimal gemessen; der Mittelwert war $s = 60{,}173$ m. Es ergab sich, wenn in der wagerechten Grundebene der Höhenfufspunkt mit F bezeichnet wird, $\angle FAB\ \alpha = 75^0 40'$ und $\angle FBA\ \beta = 77^0 59^1/_2$. In B hatte die zur Spitze der Kirche gehende Richtung den Steigungswinkel $\gamma = 30^0 33^3/_8'$, dessen Scheitelpunkt um $h = 0{,}104$ m unter der erweiterten Ebene der Granitplatten mitten vor der zum Haupteingange führenden Freitreppe der Kirche sich befand. — Für eine zweite Berechnung wurde die Standlinie nach beiden Seiten verlängert, westlich aus dem Schlofshofe hinaus. Da fand sich $s = 93{,}206$ m, $\alpha = 63^0 59^1/_4'$, $\beta = 76^0 39^3/_4'$ und $\gamma = 30^0 25'$ mit $h = -0{,}063$ m. Wie hoch befindet sich demnach der Gipfel des auf der Kirche stehenden Kreuzes über der Ebene der mittleren Granitplatte des Bürgersteiges vor der Freitreppe?



Figur 40.

Ergebnis. $x_1 = 77{,}464$ m und $x_2 = 77{,}495$ m. Mittelwert $x = 77{,}479$ m. Der Gipfel des Kreuzes auf der Kirche ist 77,48 m über der Mitte des Bürgersteiges vor der Kirche.

9) Höhe des Berliner Schlosses, sowie die des obersten Punktes vom Kreuze auf der Schlofskuppel. Quer vor dem Schlosse wurde auf dem Schinkelplatze eine Grundlinie $AB\ s = 85{,}184$ m abgesteckt.*) Die Richtung nach der der Schlofsbrücke zugewandten West-Ecke (D) des Sandsteingeländers auf dem flachen Dache des Schlosses hatte in A_1 den Steigungswinkel $DA_1D_1 = \alpha_1 = 16^0 57'$, dessen Scheitelpunkt $h_A = 0{,}809$ m hoch über der Ebene des Bürgersteiges vor der Haupteinfahrt unter der Schlofskuppel (O in der Figur 41) sich befand; und in B_1 den Steigungswinkel $\beta_1 = 12^0 27^1/_{16}'$ mit $h_B =$



Figur 41.

*) Das dreimalige Messen der Grundlinie AB ergab 85,164 m, 85,194 m und 85,193 m. Sowohl in A, als auch in B wurde der Theodolit zweimal aufgestellt. Die obigen Angaben sind die Mittelwerte der zweimaligen Winkelmessung. Auch die Bestimmung der Höhenlage der Scheitel A_1 und B_1 der Winkel über der Grundebene (die durch Häuser verdeckt war) wurde zweimal ausgeführt. Die Ergebnisse wichen nur um 3 mm von einander ab.

1,187 m. Dabei waren die Grundwinkel $CAB = \alpha = 92^0\ 19^3/_{16}'$ und $ABC = \beta = 47^0\ 11^1/_4'$.

Für die Richtung zum Gipfel (S) des Kreuzes auf der Schlofskuppel ergab sich in A_1 der Steigungswinkel $SA_1S_1 = \alpha_1 = 28^0 41^1/_8'$ und in B_1 der Steigungswinkel $\beta_1 = 30^0\ 13^1/_2'$ mit den obigen Scheitelhöhen; dazu die Grundwinkel $FAB = \alpha = 64^0\ 24^3/_8'$ und $ABF = \beta = 75^0\ 1^{15}/_{16}'$.

Wie hoch ist das Schlofs und der oberste Punkt vom Kreuze auf der Schlofskuppel über der Grundebene unter der Schlofskuppel?

Ergebnis. Für das Schlofs $x_1 = 30{,}139$ m, $x_2 = 30{,}128$ m und für die Schlofskuppel $x_1 = 70{,}054$ m, $x_2 = 70{,}018$ m. Die West-Ecke des Schlosses ist 30,13 m und der oberste Punkt vom Kreuze auf der Schlofskuppel 70,04 m über der Grundebene vor der Einfahrt unter der Schlofskuppel. [Vergl. Aufgabe 26).]

10) Höhe der Türme auf dem Schillerplatze in Berlin. Auf der Nordseite des Platzes wurde in der Französischen Strafse eine von Osten (A, Ecke der Markgrafenstrafse) nach Westen (B) laufende Standlinie AB abgesteckt und ihre Länge $s = 99{,}99$ m gefunden.*) In A hatte die Richtung zur Spitze des Palmzweiges, welchen die auf dem nördlichen (französischen) Turme stehende vergoldete Figur trägt, einen Steigungswinkel $\alpha_1 = 38^0\ 43^5/_8'$ und in B $\beta_1 = 36^0\ 51^1/_{16}'$. Der Fufspunkt N der Höhe gab den Winkel $NAB = \alpha = 57^0\ 18^3/_8'$ und den Winkel $NBA = \beta = 51^0\ 44^5/_8'$.

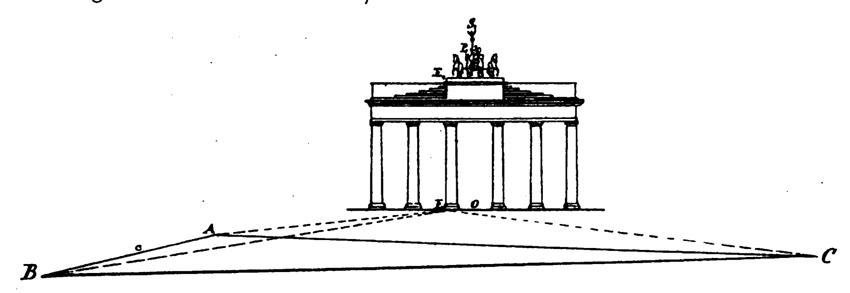
Die Richtung zum Scheitel der auf dem südlichen (deutschen) Turme stehenden vergoldeten Figur hatte in A den Höhenwinkel $\alpha_1 = 14^0\ 21^1/_2'$ und in B $\beta_1 = 14^0\ 16^3/_8'$. Für den Fufspunkt S dieser Höhe erhielt man den Winkel $SAB = \alpha = 80^0\ 3^7/_{16}'$ und $SBA = \beta = 77^0\ 41^{13}/_{16}'$.

Die Höhe der Querachse des Theodoliten war in A 1,539 m und in B 1,342 m für einen Punkt der Südseite der Französischen Strafse, der 0,77 m tiefer liegt, als die Mitte des Platzes.

Wie hoch sind die beiden Türme über der Mitte des Platzes beim Schillerdenkmal?

Ergebnis. Für den nördlichen Turm $x_A = 67{,}382$ m und $x_B = 67{,}295$ m; für den südlichen $x_A = 66{,}825$ m und $x_B = 66{,}753$ m. Die Abweichungen vom Mittelwerte sind $^1/_{1530}$ und $^1/_{1855}$ der Höhe. Der nördliche Turm ist 67,34 m, der südliche 66,79 m hoch über der Mitte des Schillerplatzes.

11) Höhe des Brandenburger Thores in Berlin. Um die Höhe des Brandenburger Thores zu bestimmen, wurde auf der Südseite des Pariser Platzes eine



Figur 42.

*) Viermaliges Messen ergab 100 m, 99,973 m, 100,020 m und 99,969 m. (Die gröfste Abweichung vom Mittelwerte ist $^1/_{3300}$ der Länge.) Auch die Winkel sind die Mittelwerte aus vier Beobachtungen.

von Westen (A) nach Osten (B) laufende wagerechte Grundlinie AB abgesteckt und viermal gemessen;*) es ergab sich die Länge $AB = 55,314$ m. Nachdem auf der Nordseite des Platzes ein Punkt C durch eine Stange bezeichnet war, wurde jeder der drei Winkel des Dreiecks ABC mittels eines Theodoliten gemessen; man erhielt $\angle CAB = 81^0 7'$, $\angle ABC = 69^0 59^1/_4{}'$ und $\angle BCA = 28^0 53^1/_2{}'$.**) Ferner wurde von den Standpunkten A, B und C aus das Fernrohr nach einer Ecke E_1 der Deckfläche des Thores gerichtet. E_1 ist die Südecke des Vorbaues in der Mitte, auf welchem das Viergespann der Viktoria steht. Der in der Grundebene liegende Fufspunkt E der Höhe des Punktes E_1 lieferte die Winkel $EAC = 62^0 55^1/_4{}'$, $ACE = 47^0 23'$, $EBC = 48^0 9'$ und $BCE = 76^0 16^1/_4{}'$; dazu für die Richtung nach E_1 die Steigungswinkel in A $13^0 4'$, in B $8^0 25'$ und in C $10^0 55^1/_2{}'$, deren Scheitelpunkte $h_A = 1,000$ m, $h_B = 0,925$ m und $h_C = 0,868$ m hoch über der Grundfläche O der mittleren Durchfahrt des Thores lagen. Wie hoch über dieser Grundebene die Deckfläche des Brandenburger Thores sich befindet, soll aus den Beobachtungen in den drei Standpunkten A, B und C sowohl aus AC, als auch aus BC als Grundseite berechnet werden.

Es ergiebt sich $x_A = 20,591$ m, $x_B = 20,634$ m, $x_C = 20,582$ (mit der letzten Bruchstelle 2 statt 1 oder 3), deren Mittelgröfse ist $x = 20,602$ m. Die Höhe des Brandenburger Thores in Berlin ist 20,60 m.

12) Gesamthöhe des Viergespannes mit der Viktoria auf dem Brandenburger Thore in Berlin. Auf den drei [in 11) angegebenen] Standorten A, B und C werde das Fernrohr auch auf die Krone S_1 des Adlers auf dem Siegeszeichen, welches die Viktoria emporhält, gerichtet und für den in der Grundebene liegenden Fufspunkt S der Höhe dieses Punktes gefunden Winkel $SAC = 62^0 21^1/_4{}'$, $ACS = 50^0 25'$, $SBC = 47^0 13^3/_4{}'$, $BCS = 79^0 18^1/_4{}'$ und die Steigungswinkel der Richtungen zum Zielpunkte S_1 in A $17^0 5^1/_4{}'$, in B $11^0 20^1/_4{}'$, in C $15^0 1^1/_2{}'$, deren Scheitelpunkte die oben (unter 11) angegebene Höhe über der Grundebene hatten. Da nun die Höhe des Thores aus Aufgabe 11 bekannt ist, lo lässt sich hieraus die Gesamthöhe des auf der Deckfläche des Thores stehenden Siegeswagens bis zur Spitze des Siegeszeichens aus den Beobachtungen jedes der drei Standorte mit AC und auch mit BC berechnen, indem man von dem hier gefundenen Ergebnis für die Höhe y das für denselben Standpunkt in 11) erhaltene x abzieht.

Ergebnis. $y_A - x_A = 8,048$ m, $y_B - x_B = 8,025$ m, $y_C - x_C = 8,025$ m, deren Mittelgröfse ist 8,033 m. Die Höhe des Siegeswagens bis zum Gipfel der Adlerstange beträgt 8,03 m. In den Berliner Wohnhäusern ist die Höhe eines Stockwerkes gewöhnlich 3,2 m; $2^1/_2$ Stockwerke sind 8 m; das halbe Stockwerk kann man als den über dem Strafsenpflaster befindlichen Teil der Kellerwohnung nehmen. Das aus getriebenem Kupfer gearbeitete Kunstwerk Schadows ist also so grofs, dafs, wenn es auf der Strafse stände, der Adler in der Höhe der nach aufsen verlängerten Decke des zweiten Stockwerks sein würde. Auf dem Brandenburger Thore befindet sich die Krone des Adlers 28,635 m über der Grundebene des Thores.

13) Gröfse eines Pferdes von dem Viergespanne der Viktoria auf dem Brandenburger Thore in Berlin. Nach dem rechten Ohre des von der Südseite aus zweiten Pferdes vor dem Siegeswagen wurde auf den [in 11) angegebenen] Stand-

*) 55,361 m, 55,322 m, 55,286 m und 55,288 m.
**) Es fehlt an 180° nur $^1/_4$ Minute. Der Grundkreis des zum Messen gebrauchten Theodoliten giebt halbe Minuten an.

punkten A, B und C das Fernrohr gerichtet und für den in der Grundebene liegenden Fufspunkt P der von der Spitze des Ohres P_1 gefällten Senkrechten erhalten Winkel $PAC = 61^0 24^3/_4'$, $ACP = 48^0 36^1/_2'$, $PBC = 47^0 3^1/_4'$, $BCP = 77^0 30'$ und für die Richtung nach P_1 der Steigungswinkel in A $15^0 0'$, in B $9^0 47'$, in C $12^0 57'$, deren Scheitelpunkte die unter 11) angegebenen Höhen über der Grundebene hatten. Wie hoch die Deckfläche des Thores, auf welcher das Pferd steht, sich über der Grundebene befindet, ist in Aufgabe 11 gefunden; demnach kann man die Gröfse des Pferdes aus den Beobachtungen in jedem der drei Standpunkte für AC und für BC angeben, indem man von der hier berechneten Höhe z das demselben Standpunkte angehörige x in 11) abzieht.

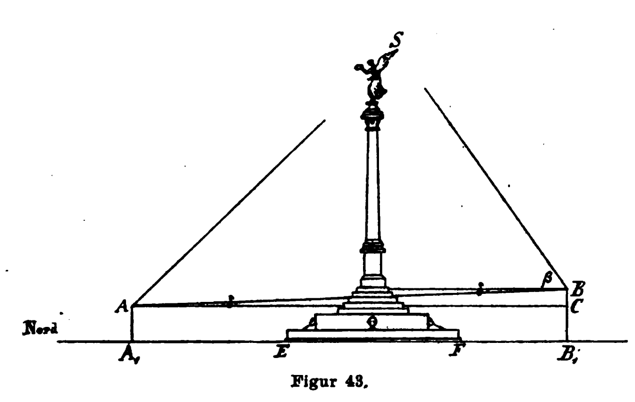
Ergebnis. $z_A - x_A = 3{,}424$ m, $z_B - x_B = 3{,}411$ m, $z_C - x_C = 3{,}403$ m, deren Mittelwert ist 3,413 m. Die Gröfse des Pferdes ist 3,41 m. Es würde also, in einem hohen Zimmer stehend, mit den Ohren an die Decke stofsen.

---

d) Geht bei einer Höhenmessung die Richtung der Standlinie durch die Höhe, so ist ihre Steigung oder Senkung zu bestimmen. Der Höhenunterschied der Endpunkte und die Länge der Standlinie geben den Sinus ihres Steigungs- oder Senkungswinkels. Mag auch dieser Winkel δ recht klein ausfallen, immer ist er von Einflufs, da die Winkel des über der Standlinie stehenden Dreiecks von ihm abhängen.

α) Die Standlinie selbst geht durch die Höhe.

14) Höhe der Viktoriasäule auf dem Belle-Alliance-Platz in Berlin. Der breite Unterbau für die Viktoriasäule ist von einem kreisrunden Wasserbecken umgeben, dessen Umfang bei zweimaliger Messung 35,085 m und 35,075 m gefunden wurde. In einem auf der Nordseite gewählten Standpunkte A_1, dessen Abstand A_1E vom Rande des Wasserbeckens 19,506 m [13,352 m]*) betrug, hatte die Richtung zur höchsten Spitze des westlichen Flügels der Viktoria den Steigungswinkel $\alpha = 33^0 35'$ [$41^0\ 4^1/_2'$] und beim östlichen Flügel war $\alpha = 33^0 53^1/_2'$ [$41^0 30^1/_2'$], wobei der Scheitelpunkt dieser Winkel $h_A = 1{,}312$ m [1,375 m] hoch über der Erweiterung der Ebene der Granitplatten des die Säule umgebenden Bürgersteiges sich befand. Ebenso wurde auf der Südseite von einem Standpunkte B_1 aus beobachtet, den man so wählte, dafs die Richtung AB durch den Fufs der Säule ging. Der Abstand des Punktes B_1 von der ihm nächsten Stelle F des Beckenrandes war 13,967 m [19,804 m]. Hier fand man für die Richtung zur Spitze des westlichen Flügels den Steigungswinkel $\beta = 41^0 14^1/_2'$ [$33^0 55^1/_2'$] und für den östlichen $\beta = 40^0 36'$ [$33^0 26^1/_2'$]



Figur 43.

---

*) Die in Klammern beigefügten Zahlen sind die einer andern Messung für die zweite Berechnung.

und die Höhe des Scheitels dieser Winkel über derselben Grundebene $h_B = 1{,}440$ m [1,442 m]. Wie hoch ist demnach 1) die Spitze des westlichen und 2) die des östlichen Flügels der Viktoria über der bezeichneten Grundebene? *)

Ergebnis. Wird die aus drei Stücken zusammengesetzte Verbindungslinie der Scheitel von α und β mit s und ihr Neigungswinkel gegen eine wagerechte Ebene mit δ bezeichnet, so ist die Höhe

$$x = \frac{s}{\sin(\alpha+\beta)} \sin(\beta+\delta) \sin\alpha \; + h_A = \frac{s}{\sin(\alpha+\beta)} \sin(\alpha-\delta) \sin\beta \; + h_B.$$

Die beiden Rechnungen liefern die Höhe von der Spitze des westlichen Flügels $x_1 = 18{,}233$ m und $x_2 = 18{,}239$ m, und beim östlichen Flügel $x_1 = 18{,}179$ m und $x_2 = 18{,}176$ m.

15) Das Nauener Thor in Potsdam hat zwei gleiche Türme, deren Erdgeschofs Durchgang für die Fufsgänger ist. Dies ermöglicht, die Standlinie AB durch die Turmhöhe zu legen. Sie war $s = 62{,}27$ m lang. In A hatte die Richtung zur Turmspitze S den Steigungswinkel $\alpha = 40^0\,33^3/_4{}'$ mit der Scheitelhöhe über der erweiterten Grundfläche des Durchganges $h_A = 0{,}869$ m, und in $B \angle \beta = 31^0\,36'$ mit $h_B = 1{,}566$ m. Hierauf wurde die Standlinie in der Richtung AB um etwa 3 m verschoben. Dort ergab die zweite Messung $s = 62{,}15$ m, $\alpha = 43^0\,55^1/_4{}'$ mit $h_A = 0{,}912$ m und $\beta = 29^0\,38^1/_2{}'$ mit $h_B = 1{,}574$ m. Wie grofs ist demnach die Turmhöhe des Nauener Thores über der Mitte der Grundfläche des Durchganges?

Ergebnis. $x_1 = 23{,}563$ m, $x_2 = 23{,}557$ m. Die Turmhöhe des Nauener Thores in Potsdam beträgt 23,56 m über der Grundfläche des Durchganges.

16) Höhe der Dorotheenstädtischen Kirche in Berlin. Die Länge einer durch die Höhe gehenden Standlinie liefs sich dadurch bestimmen, dafs zunächst ihr mittlerer Teil, innerhalb des Gitters, welches in Form eines Rechtecks die Kirche umgiebt, an der kurzen Seite der Grundmauer (in der Neustädtischen Kirchstrafse) gemessen wurde $GM = 56{,}993$ m, dann der linke Teil (quer über die Mittelstrafse) $GA_1 = 20{,}065$ m und der rechte Teil (in der Dorotheenstrafse) $MB_1 = 23{,}391$ m, so dafs die ganze Länge der Standlinie A_1B_1 war $s = 100{,}449$ m. In A, senkrecht über A_1, hatte die Richtung zur Spitze S des Kirchturmes den Steigungswinkel $\alpha = 47^0\,35'\,7^1/_2{}''$, dessen Scheitel $h_A = 1{,}907$ m hoch über der Erweiterung der Ebene des Bürgersteiges vor dem Eingange in der Dorotheenstrafse sich befand, und in B, senkrecht über B_1, wurde der Steigungswinkel $\beta = 45^0\,54'\,45''$ gemessen, dessen Scheitel $h_B = 1{,}644$ m hoch über derselben Grundebene (vor B) war. — Für die zweite Bestimmung der Höhe kam zu $GM = 56{,}993$ m $GA_1 = 18{,}353$ m und $MB_1 = 26{,}121$ m, so dafs die neue Standlinie A_1B_1 war $s = 101{,}467$ m. Hier war der Steigungswinkel $\alpha = 48^0\,39'$ mit $h_A = 1{,}870$ m und $\beta = 44^0\,23'\,52^1/_2{}''$ mit $h_B = 1{,}745$ m. — Man berechne aus beiden Messungen die Höhe der Kirche über der Grundebene in der Dorotheenstrafse und gebe schliefslich auch die Zahl für die Höhe an, wenn der um 37,5 cm höher liegende Bürgersteig vor dem Eingange in der Mittelstrafse (vor A) als Grundebene genommen wird.

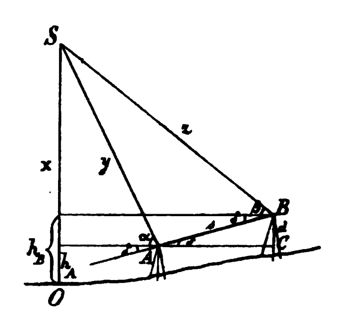
Ergebnis. $x_1 = 55{,}138$ m und $x_2 = 55{,}170$ m (die Abweichung ist $^1/_{1700}$ der Höhe). Mittelwert $x = 55{,}15$ m über der Grundebene in der Dorotheenstrafse,

*) Dafs die Fufspunkte der von den Flügelspitzen auf die Grundebene gefällten Senkrechten neben die Grundlinie fallen, übt auf das Ergebnis der Rechnung keinen Einflufs, weil ihr seitlicher Abstand von der Grundlinie von A und von B aus unter so schmalem Winkel (von 3^0) erscheint, dafs dessen Kosinus fast $= 1$ ist.

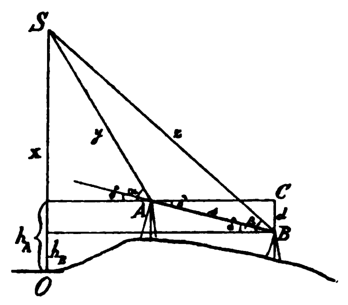


daher über der in der Mittelstrafse nur 54,78 m. Ohne genaue Festsetzung der Grundebene ist für die Höhe der Kirche anzugeben 55 m.

β) Die Standlinie geht verlängert durch die Höhe.



Die Standlinie rückwärts steigend.
Figur 44.



Die Standlinie rückwärts fallend.
Figur 45.

17) Höhe der Garnisonkirche in Potsdam. Auf dem grofsen Platze neben der Kirche wurde eine gerade auf sie zu laufende Standlinie BA zweimal gemessen, 107,340 m und 107,365 m, deren Mittelwert ist $s = 107,353$ m. Die Richtung zur höchsten Spitze der auf der Helmstange des Turmes angebrachten Sonne hatte in A den Steigungswinkel $\alpha = 47^0\,26'$, dessen Scheitel $h_A = 1,070$ m hoch über der Erweiterung der Ebene des Bürgersteiges an der Kirche sich befand. (Diese Granitplatten haben, wie durch Nivellieren festgestellt wurde, gleiche Höhenlage mit der am Turmeingange.) Der Scheitel B des Steigungswinkels $\beta = 24^0\,59^1/_2'$ lag etwas höher; es war $h_B = 1,118$ m. — Bei einer zweiten Standlinie erhielt man 78,560 m und 78,564 m, also $s = 78,562$ m, $\alpha = 44^0\,55'$ mit $h_A = 1,050$ m und $\beta = 27^0\,47'$; dessen Scheitel lag aber tiefer; es war h_B nur 1,000 m. — Wie hoch ist demnach die Spitze der Garnisonkirche über der Ebene des Bürgersteiges?

Ergebnis. $x_1 = 88,656$ m und $x_2 = 88,712$ m. Der Unterschied ist $^1/_{1600}$ der Höhe. Die Garnisonkirche ist 88,68 m hoch.

18) Gröfse des Adlers auf der Garnisonkirche in Potsdam. Die Helmstange des Turmes hat unten eine Querstange, die an dem einen Ende den Namenszug des Erbauers der Kirche, Friedrich Wilhelm I., und am andern den preufsischen Adler trägt. Für eine Standlinie, deren fortgesetzte Richtung unter dem Adler hinging, ergab zweimaliges Messen 99,915 m und 99,933 m, so dafs ihre Länge $s = 99,924$ m zu nehmen ist. In A hatte die Richtung zum höchsten Punkte des Adlers den Steigungswinkel $\alpha = 43^0\,29^1/_8'$ und die zum tiefsten Punkte $\alpha_1 = 42^0\,41^3/_4'$, deren Scheitel $h_A = 1,05$ m hoch über der Erweiterung der Ebene des Bürgersteiges an der Kirche war. In B ergab sich entsprechend $\beta = 23^0\,57^1/_4'$ und $\beta_1 = 23^0\,22^7/_8'$, beide mit $h_B = 1,10$ m. — Bei einer zweiten Standlinie war $s = 85,99$ m (als Mittelwert von 85,985 und 85,996 m), $\alpha = 45^0\,59^1/_2'$, $\alpha_1 = 45^0\,11^1/_2'$, mit $h_A = 1,07$ m, und $\beta = 26^0\,38^1/_2'$, $\beta_1 = 26^0\,1^1/_8'$, mit $h_B = 1,00$ m. — Da die beiden Zielpunkte am Adler nicht in derselben Senkrechten sich befinden, ist für den höchsten und für den tiefsten Punkt die Höhe über der Ebene des Bürgersteiges zu berechnen. Der Höhenunterschied giebt die Gröfse des Adlers an.

Ergebnis: 2,210 m oder 2,214 m. Die Gröfse des Adlers oben auf der Helmquerstange des Garnisonturmes ist 2,21 Meter. Er übertrifft die Gröfse eines Pferdes.

Seine grofse Ausdehnung macht die schwere eiserne Helmstange zu einer genügend beweglichen Windfahne.*)

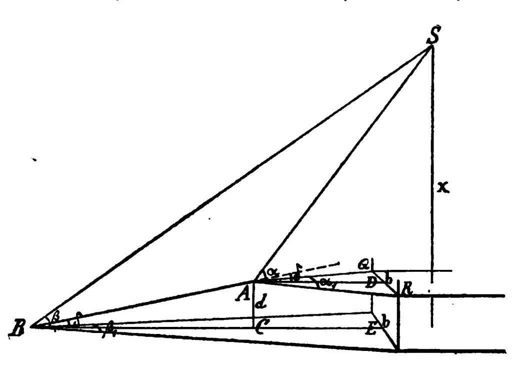
19) Höhe der Petrikirche in Berlin. Eine in der Grünstrafse gerade auf den Turm zu laufende Grundlinie BA war nach dreimaligem Messen $s = 64{,}342$ m lang.**) Bei ihrem dem Turme näheren Endpunkte A hatte die Richtung zum Gipfel der Kreuzblume den Steigungswinkel $\alpha = 48^0\, 24^3/_4{}'$, dessen Scheitelpunkt sich $h_A = 1{,}294$ m hoch über der Ebene des Bürgersteiges vor dem Turmeingange befand. Am andern Endpunkte B betrug der Steigungswinkel $\beta = 32^0\, 32'$ mit $h_B = 1{,}520$ m über derselben Grundfläche. — Für eine etwas weiter vom Turme entfernte Grundlinie kam $s = 71{,}453$ m, $\alpha = 43^0\, 43'$ mit $h_A = 1{,}265$ m und $\beta = 29^0\, 2'$ mit $h_B = 1{,}519$ m. — Welche Höhe hat demnach die Petrikirche über den Granitplatten des Bürgersteiges vor dem Turmeingange?

Ergebnis. $x_1 = 96{,}403$ m und $x_2 = 96{,}417$ m. Die Petrikirche ist 96,41 m hoch. Dieser Turm ist der höchste in Berlin.

20) Höhe der Heiligegeistkirche in Potsdam. Es wurde eine gerade auf den Turm zu laufende Standlinie BA zweimal gemessen und ihre Länge im Mittelwerte $s = 60{,}891$ m erhalten. In A hatte die Richtung zur Turmspitze den Steigungswinkel $\alpha = 55^0\, 3^1/_4{}'$, dessen Scheitel $h_A = 1{,}308$ m hoch über der Ebene des Strafsenpflasters vor dem Turmeingange war. In B fand sich der Steigungswinkel $\beta = 34^0\, 22^7/_8{}'$ mit der Scheitelhöhe $h_B = 1{,}657$ m über derselben Grundebene. — Bei einem mittleren Teile der ersten Standlinie, $s = 35{,}269$ m lang, ergab sich $\alpha = 52^0\, 54^1/_8{}'$ mit $h_A = 1{,}330$ m und $\beta = 39^0\, 51^3/_4{}'$ mit $h_B = 1{,}535$ m. — Wie hoch ist demnach der Kirchturm?

Ergebnis. $x_1 = 81{,}814$ m oder 81,815 m; $x_2 = 81{,}800$ m oder 81,799 m. Mittelwert $x = 81{,}807$ m. Die Heiligegeistkirche ist 81,81 m hoch.

21) Höhe der Bartholomäuskirche in Berlin. Die $b = 7{,}796$ m breite Vorderseite des Kirchturms erschien in einem genau mitten davor (im Garten) eingenommenen Standpunkte A unter dem Winkel $\alpha_1 = 9^0\, 51^1/_4{}'$ und dort hatte die Richtung zur Spitze des Turmes den Steigungswinkel $\alpha = 53^0\, 51^1/_8{}'$; der Scheitelpunkt A dieser beiden Winkel war $h_A = 1{,}696$ m über der Erweiterung der Ebene des Bürgersteiges an der Südseite der Neuen Königsstrafse. An deren Nordseite wurde ein anderer Punkt B, auch genau mitten vor dem Turme, aufgesucht. In B erschien die Breite b unter dem Winkel $\beta_1 = 5^0\, 23^1/_4{}'$, die Richtung



Figur 46.

zur Turmspitze stieg unter dem Winkel $\beta = 38^0\, 9^3/_4{}'$ und der Scheitel B dieser Winkel befand sich $h_B = 1{,}458$ m hoch über derselben Grundebene. — Für eine

*) Dafs die Helmstange um ihre senkrechte Achse drehbar sei, ist notwendig, weil sonst die oben befestigte vergoldete Darstellung der Sonne mit langen flammenden Strahlen bei Querstellung vom Sturmwinde zerstört werden könnte.

**) Die Einzelmessungen waren 64,323 m, 64,344 m und 64,358 m; bei der andern Grundlinie 71,427 m, 71,465 m und 71,466 m.

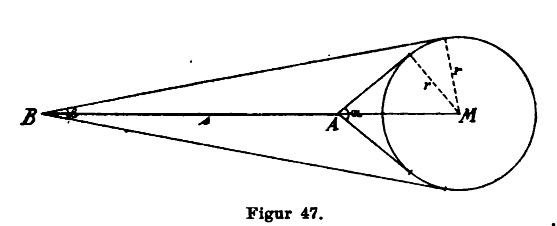
zweite Berechnung der Turmhöhe kam an dazwischen gewählten Standorten $\alpha_1 = 8^0\,50^3/_4{}'$ und $\alpha = 51^0\,12^7/_8{}'$ mit $h_A = 1{,}562$ m; ferner $\beta_1 = 5^0\,39'$ und $\beta = 39^0\,29^3/_4{}'$ mit $h_B = 1{,}291$ m. — In welcher Höhe über der Grundebene der Neuen Königstraſse befindet sich die Spitze des Turmes, und wie hoch ist der Kirchturm selbst, da die Grundfläche vor der Eingangsthür 4,481 m hoch über der Straſse liegt? (Von den kleinen Winkeln sind die Logarithmen der Tangens, nicht der Kotangens, aufzuschlagen.)

Ergebnis. $x_1 = 70{,}566$ m und $x_2 = 70{,}564$ m. Der Gipfel der Kreuzblume befindet sich 70,565 m hoch über der Ebene des Bürgersteiges in der Neuen Königstraſse; die Höhe der Kirche beträgt 66,08 m.

---

e) Bestimmung eines Kreisdurchmessers.

22) Durchmesser der Granitschale vor dem Museum im Lustgarten in Berlin. In einem nahe bei der Schale, in der Erweiterung der Ebene ihres kreisförmigen Randes liegenden Punkte A bildeten die an den Rand gehenden Berührungslinien einen Winkel $\alpha = 64^0\,3^1/_8{}'$. Auf der vom Mittelpunkte des Kreises durch A gehenden geraden Linie wurde ein zweiter Punkt, B, gewählt, dessen Abstand von A $AB = s = 70{,}965$ m [58,695 m] war. In B bildeten die an den Kreisrand zu legenden Berührungslinien einen Winkel $\beta = 5^0\,5^1/_8{}'$ [$6^0\,2^5/_8{}'$]. Wie groſs ist demnach der Durchmesser des Randes der Granitschale?



Figur 47.

Ergebnis. $2r = \dfrac{s \sin {}^1/_2\,\alpha \sin {}^1/_2\,\beta}{\cos {}^1/_4\,(\alpha + \beta) \sin {}^1/_4\,(\alpha - \beta)}$. $2r_1 = 6{,}8713$ m, $2r_2 = 6{,}8715$ m.

Der Durchmesser des Randes der Granitschale ist 6,871 m. (Würde die Schale im Klassenzimmer Platz haben?)

23) Durchmesser der Kugel des Atlas auf dem Rathausturme in Potsdam. Den wagerechten gröſsten Kreis der vergoldeten Weltkugel, welche die Figur des Atlas auf dem Nacken trägt, denke man auf die wagerechte Grundebene abgelotet. Die an diesen Grundkreis vom Punkte A aus gehenden Berührungslinien bildeten den Winkel $\alpha = 2^0\,46^3/_4{}'$ und die vom entfernteren Punkte B aus den Winkel $\beta = 1^0\,28^1/_2{}'$. Es war der Abstand $AB = s = 33{,}77$ m. Bei einer zweiten Messung war mit demselben Winkel α $\beta_1 = 1^0\,55^1/_4{}'$ und $s_1 = 17{,}00$ m. Wie groſs ist demnach der Durchmesser der Kugel? und in welcher Entfernung von ihrem Mittelpunkte erscheint sie ebenso groſs, wie der Vollmond, dessen scheinbarer Durchmesser $2\varrho = 31'$ beträgt?

Ergebnis. $2r_1 = 1{,}8527$ m, $2r_2 = 1{,}8455$ m. Die Kugel hat den überraschend groſsen Durchmesser von 1,85 m, (so daſs in der Hohlkugel eine groſse Person aufrecht stehen könnte). Aber bereits in einer Entfernung von 205 m erscheint sie so groſs, wie der Vollmond.

24) Höhe der Synagoge in der Oranienburger Straſse zu Berlin. Nachdem an einer der Synagoge ostwärts schräg gegenüber liegenden Stelle B der Straſse das Fernrohr eines Theodoliten wagerecht gerichtet war, wurde durch dasselbe an einer vor dem Haupteingange der Synagoge auf dem Bürgersteige senkrecht gehaltenen

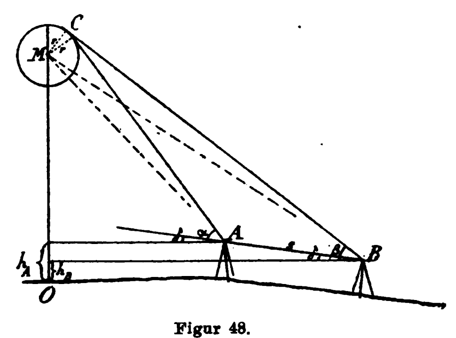
Nivellierlatte abgelesen, dafs der Mittelpunkt des Theodoliten*) $h = 1{,}755$ m hoch über der Erweiterung jener Granitplatte des Bürgersteiges sich befand. Die Richtung des Fernrohres nach der höchsten Spitze des auf der Kuppel stehenden Sternes hatte den Steigungswinkel $\gamma = 30^0\,41^1/_2{}'$. Nun denke man auf die durch den Mittelpunkt des Theodoliten gehende wagerechte Ebene den Äquator der überhalbkugelförmigen Kuppel senkrecht herabgelassen und an diesen Grundkreis vom Mittelpunkte des Theodoliten aus die beiden Berührungslinien gezogen. Dieselben schlossen einen Winkel $\beta = 10^0\,1^3/_4{}'$ ein. In der Richtung der Halbierungslinie dieses Winkels ging man dann eine Strecke BA näher an die Synagoge heran, und fand in A den Winkel zwischen den von hier aus an den Grundkreis zu legenden Berührungslinien $\alpha = 12^0\,56^3/_4{}'$. Der Abstand AB ergab sich $s = 18{,}100$ m. — Ebenso wurde von einer westlich schräg gegenüberliegenden Stelle aus beobachtet, und erhalten $h_1 = 0{,}852$ m, $\gamma_1 = 33^0\,51'$, $\beta_1 = 11^0\,8'$, $\alpha_1 = 13^0\,1'$ und für A_1B_1 $s_1 = 10{,}477$ m. Man berechne aus beiden Messungen die Höhe der Synagoge über der durch die Granitplatte des Bürgersteiges bestimmten Grundebene.

Ergebnis. $y = \dfrac{s \sin {}^1/_2\,\alpha\, \operatorname{tg}\gamma}{2 \cos {}^1/_4\,(\alpha + \beta) \sin {}^1/_4\,(\alpha - \beta)} + h.$ $y_1 = 49{,}581$ m, $y_2 = 49{,}585$ m.

Die Höhe der Synagoge beträgt 49,58 m.

---

25) Höhe des Rathausturmes in Potsdam. Auf dem Turme des Rathauses in Potsdam steht die vergoldete Figur des Atlas, welcher in gebückter Stellung auf seinem Nacken die Weltkugel trägt. Die Bestimmung dieser Turmhöhe hat dadurch besonderen Reiz, dafs beim Messen auf dem Platze vor dem Rathause der höchste Punkt der Kugel nicht zu sehen ist, und dafs Kopf und Arme der Figur hindern, das Fernrohr auf den Mittelpunkt der Kugel einzustellen. Dennoch ist genaue Höhenbestimmung möglich, nämlich dadurch, dafs man aus der Gröfse des Kugelhalbmessers r, welche in der Aufgabe 23) ermittelt wurde, seine scheinbare Gröfse, $\angle MAC$ und MBC, für die Entfernung AC und BC berechnet und diese Winkel α_1 und β_1 von den Steigungswinkeln α und β abzieht; dann hat man die Steigungswinkel für die Richtungen zum Kugelmittelpunkte, und findet die Höhe $OM = x$ und die Turmhöhe $y = x + r$.



Figur 48.

In einem gerade vor dem Rathause auf dem Neuen Markte gewählten Punkte A hatte die als Berührungslinie der Kugel über ihren höchsten Punkt fortlaufende Gerade AC den Steigungswinkel $\alpha = 46^0\,47'$; der Scheitel A dieses Winkels war $h_A = 0{,}641$ m über der Granitplatte O des Bürgersteiges vor dem Eingange zum Rathause. In dem um $AB = s = 33{,}77$ m von der Thür weiter entfernten Punkte B war der Steigungswinkel der von dort aus ebenso laufenden Berührungslinie $\beta = 29^0\,26'$, dessen Scheitel wegen des Gefälles des Platzes nur $h_B = 0{,}210$ m über der wagerechten Ebene O war. — Bei einer zweiten Messung, die von demselben Punkte A ausging,

---

*) Der Mittelpunkt des Theodoliten ist der Schnittpunkt seiner drei Achsen, der Scheitelpunkt der mit ihm gemessenen Winkel.

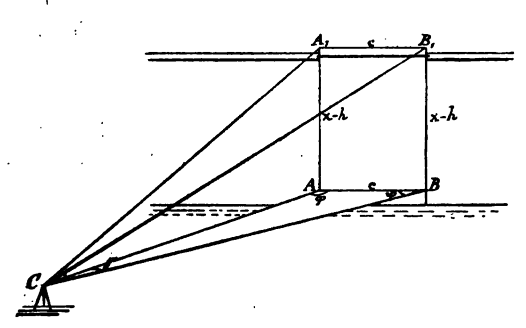
lag der Punkt B nur $s = 17{,}00$ m weit zurück und gab den Steigungswinkel $\beta = 36^0\ 19^1/_4{}'$ mit der Scheitelhöhe $h_B = 0{,}387$ m. Die Berechnung des Kugeldurchmessers ergab (Aufgabe 23) aus der hierzu gehörigen ersten Messung $2r = 1{,}8527$ m und aus der zweiten 1,8455 m. — Wie hoch befindet sich der höchste Punkt des Turmes über der wagerechten Ebene der Granitplatte vor dem Rathauseingange?

Ergebnis. Die scheinbaren Gröfsen des Kugelhalbmessers sind in der ersten Messung $\alpha_1 = 0^0\ 58'\ 42''$, $\beta_1 = 0^0\ 38'\ 59''$, und in der zweiten $\alpha_1 = 0^0\ 58'\ 29''$, $\beta_1 = 0^0\ 47'\ 6''$. Sie liefern die Turmhöhe $y_1 = 40{,}464$ m und $y_2 = 40{,}454$ m. Der Unterschied der Ergebnisse ist nur $^1/_{4000}$ der Höhe. Mittelwert $y = 40{,}459$ m. Der Turm des Rathauses in Potsdam ist 40,46 m hoch über der Granitplatte des Bürgersteiges vor der Eingangsthür.

---

f) Höhenbestimmung aus ferner Grundlinie.

26) Höhe des Schlosses in Berlin an der Südostseite (am Schlofsplatze) beim östlichen Eingange (Nr. 1) nahe der Kurfürstenbrücke. Auf dem flachen Dache des Schlosses wurde die Länge der Oberkante A_1B_1 des östlichen Vorbaues $c = 16{,}474$ m gemessen, und auf dem Schlofsplatze in einem hinter der Mündung der Breiten Strafse gewählten Standorte für die Richtung nach den Endpunkten die Steigungswinkel ACA_1 $\alpha = 18^0\ 34^5/_8{}'$ und BCB_1 $\beta = 16^0\ 28^1/_8{}'$, sowie der Grundwinkel ACB $\gamma = 7^0\ 22^1/_2{}'$ beobachtet. Der Scheitel C dieser Winkel war $h = 1{,}356$ m hoch über der erweiterten Ebene des Bürgersteiges vor dem Haupteingange unter der Schlofskuppel. Wie hoch ist demnach dieser Teil des Schlosses über der Grundebene?



Figur 49.

Ergebnis. In der schön zusammengezogenen Formel ist hier $1 : \mathrm{tg}\,^1/_2\gamma$ statt $\mathrm{ctg}\,^1/_2\gamma$ zu nehmen. Die Rechnung ergiebt die Höhe $x = 29{,}927$ oder 29,928 m, statt eines einzigen Wertes.*)

27) Höhe der beiden Nebentürme an der Synagoge in der Oranienburger Strafse zu Berlin. An der Synagoge stehen zu beiden Seiten der Hauptkuppel zwei gleich hohe, auch mit einer Kuppel gekrönte Türme. Die Vorderseite der rechteckigen Grundfläche ist bei jedem dieser Türme 4,937 m lang und die Strecke zwischen den Türmen ist 18,602 m. Hierdurch kennt man den gegenseitigen Abstand der Turmspitzen, $c = 23{,}539$ m. Von einem dem Gebäude schräg gegenüber gewählten Standpunkte aus wurde das Fernrohr nach dem Gipfel jeder dieser Spitzen gerichtet. Der Steigungswinkel der Richtung nach der Spitze des näheren Turmes betrug $\alpha_1 = 36^0\ 41^1/_2{}'$, nach der des entfernteren $\beta_1 = 27^0\ 15^1/_2{}'$; und die wagerechten

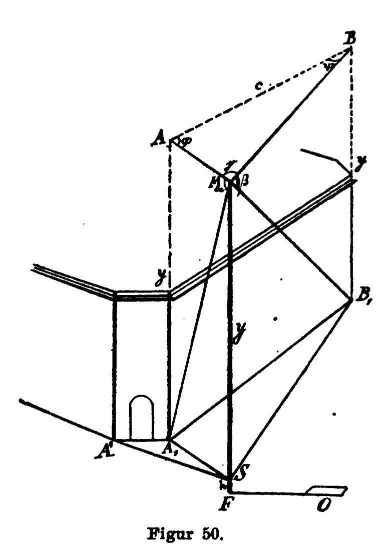
---

*) Bei dem in der Richtung B_1A_1 folgenden Vorbau (mit dem Eingange Nr. 2) wird auf dem Dache das Sandsteingeländer um 0,224 m höher, also von dort an die Höhe des später gebauten Schlofsteiles 30,15 m. Diese Gröfse ist in guter Übereinstimmung mit der in Aufgabe 9) gefundenen Höhe der West-Ecke des Schlosses. Änderungen der Höhe des Sandsteingeländers um 1 bis $2^1/_2$ cm weist das mit Röhrenlibelle versehene Fernrohr des Theodoliten an mehreren Stellen nach.

Schenkel dieser Winkel schlossen einen Winkel $\gamma_1 = 11^0\,42^3/_4{}'$ ein. Dabei befand sich der Scheitelpunkt dieser drei Winkel $h_1 = 0{,}645$ m über der vor dem Haupteingange liegenden Granitplatte des Bürgersteiges. Auf einem zweiten, jenem entsprechend gewählten Standpunkte wurde beobachtet $\alpha_2 = 35^0\,57'$, $\beta_2 = 26^0\,14^1/_2{}'$, $\gamma_2 = 8^0\,34'$ und $h_2 = 1{,}250$ m, und auf einem dritten in gröfserem Abstande $\alpha_3 = 27^0\,14'$, $\beta_3 = 21^0\,5^1/_4{}'$, $\gamma_3 = 7^0\,4^1/_2{}'$ und $h_3 = 1{,}755$ m. Wie grofs ergiebt sich aus diesen Beobachtungen die Höhe der beiden gleichen Seitentürme über dem Bürgersteige vor der Synagoge?

Ergebnis? $y_1 = 35{,}085$ m, $y_2 = 35{,}070$ m, $y_3 = 35{,}060$ m, deren Mittelgröfse ist $y = 35{,}072$ m. Jeder der beiden Nebentürme der Synagoge ist 35,07 m hoch.

28) Höhe bis zum Geländer des Umganges unter der Schlofskuppel in Berlin. (Siehe Figur 41.) Auf das steinerne Geländer, an dessen acht Ecken die Standbilder der Propheten stehen, wurde der Theodolit gestellt. Sein Mittelpunkt ist in der Figur 50 der Punkt M. Die Richtung zum Fufspunkte A_1 der nächsten Ecke des Roten Schlosses hatte den Senkungswinkel AMA_1 $\alpha = 28^0\,57'$ und die zum Fufspunkte B_1 der fernen Ecke den Senkungswinkel BMB_1 $\beta = 22^0\,26'$; dabei schlossen die wagerechten Schenkel derselben den Winkel $\gamma = 42^0\,12^1/_2{}'$ ein. Die Grundlinie A_1B_1 des Roten Schlosses, $c = 70{,}097$ m lang, läuft genau wagerecht und die wagerechte Ebene A_1B_1S streicht $h = 0{,}057$ m hoch über der Ebene des Bürgersteiges O vor dem Haupteingange des Schlosses (unter der Kuppel), und der Mittelpunkt des Theodoliten war $t = 0{,}210$ m über der oberen Randfläche des Geländers. Wie hoch befindet sich demnach diese Fläche über dem Bürgersteige unter der Schlofskuppel? — Zu einer zweiten Berechnung wurde für die Richtung zum Fufspunkte A' der folgenden Ecke des Roten Schlosses der Senkungswinkel $\alpha = 28^0\,16'$ gemessen, dazu wieder für die Ecke B_1 $\beta = 22^0\,26'$, und nun war $\gamma = 43^0\,59'$. Die Verbindungslinie von A' nach B_1, $c = 72{,}450$ m, wird in der Aufgabe 5, 6, 11 berechnet.



Figur 50.

Ergebnis. Für $MS = y$ liefern die beiden Rechnungen $y_1 = 43{,}074$ m und $y_2 = 42{,}968$ m; daher für die gesuchte Höhe $x_1 = 42{,}921$ und $x_2 = 42{,}815$ m. Die obere Randfläche des Umgangsgeländers unter der Schlofskuppel befindet sich 42,9 m über der Ebene des Bürgersteiges.

Anmerkung. Die ungewöhnliche Abweichung der beiden Rechnungsergebnisse von 10,6 cm, die schon $^1/_{400}$ der Höhe beträgt, ist daraus zu erklären, dafs die Abstumpfung $A'A_1$ der Ecke des Roten Schlosses nicht genau unter 45^0 gemacht ist. Beträgt der Winkel $A'A_1B_1$ wirklich $139^0\,46'$, statt 135^0, wie angenommen wurde, so würde das zweite Ergebnis dem ersten gleich geworden sein. Eine Abweichung der Abschrägung von 4 bis 5^0 ist aber bei einem Gebäude sehr wohl möglich. Bestimmung der Gröfse des Winkels $A'A_1B_1$ war unausführbar.

g) Entfernungsbestimmung aus Höhenunterschieden.

29) Entfernung vom Turme der Petrikirche bis zum Rathausturme in Berlin. Unter der fast zutreffenden Annahme, dafs das Schlofs, die Petrikirche und der Rathausturm auf derselben wagerechten Grundebene stehen, läfst sich aus den Höhen derselben ihr gegenseitiger Abstand bestimmen, nachdem ohne weitere Mühe drei Winkel gemessen sind. Die Höhe der Petrikirche ist $h_P = 96{,}41$ m und die des Rathausturmes bis zur Spitze der Fahnenstange $h_R = 93{,}36$ m; zur Höhe des Schlosses, welche an der Südostecke (bei der Kurfürstenbrücke) $h_1 = 29{,}93$ m beträgt, kommt die Höhe $t = 0{,}21$ m vom Mittelpunkte des Theodoliten, der auf das steinerne Geländer des flachen Daches gestellt war, so dafs der Scheitelpunkt der zu messenden Winkel sich $h_1 + t = 30{,}14$ m hoch über der angenommenen Grundebene befand. Die Richtung des Fernrohres zur Spitze des Petriturmes hatte den Steigungswinkel $\alpha = 8^0\,24'$, die zur Spitze des Rathausturmes den Steigungswinkel $\beta = 9^0\,28'$ und die wagerechten Schenkel dieser Winkel schlossen einen Winkel $\gamma = 103^0\,2^3/_4{}'$ ein. — Die Gegenmessung wurde an der Südwest-Ecke des Schlofsdaches ausgeführt. Hier ist aber die Schlofshöhe etwas gröfser (vergl. die Note zu 26), nämlich $h_2 = 30{,}15$ m; dazu die Theodolitenhöhe $t = 0{,}21$ m, giebt die Höhe des Beobachtungspunktes über der angenommenen Grundebene $h_2 + t = 30{,}36$ m. An dieser Stelle wurde gefunden $\alpha = 9^0\,24'$, $\beta = 6^0\,38'$ und $\gamma = 85^0\,56^3/_4{}'$. Man berechne aus den Höhenunterschieden u_a und u_b die Entfernung zwischen den beiden Turmhöhen und zwar mittels des Kosinus eines Hilfswinkels. (Vergl. die Aufgaben 5, 5, 19, 6, 5, 15 und 5, 5, 26.)

Ergebnis. Die Rechnung liefert $x_1 = 649{,}61$ m und $x_2 = 649{,}68$ m. (Abweichung $^1/_{9000}$ der Gröfse.) Nach der aus einer Standlinie hervorgehenden genauen Entfernungsbestimmung ist aber der Abstand der beiden Turmhöhen 650,60 m (nach der Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen 650,582 m). [6, 5, 7.] Die Entfernung ist also hier um 1 m zu klein gefunden. Es müssen die Abstände a und b etwas gröfser sein. Man findet sie gröfser, wenn bei denselben Steigungswinkeln die Höhenunterschiede mehr betragen. Diese nehmen zu, wenn die gemeinsam abzuziehende Schlofshöhe kleiner in Rechnung gestellt wird. Die Annahme, dafs die drei Gebäude auf derselben wagerechten Grundebene stehen, ist also dahin zu verbessern, dafs die Grundfläche des Schlosses etwas niedriger liegt, was auch nach dem Standorte des Schlosses an der Spree, weiter stromab, wahrscheinlich ist. Nimmt man an, dafs die Grundfläche des Schlosses um 10 Centimeter (eine Hand breit) tiefer liegt, als die Grundebene der Türme, so erhält man bei Wiederholung der Rechnung mit den neuen Höhenunterschieden $x'_1 = 650{,}62$ m und $x'_2 = 650{,}69$ m, also dem genauen Werte sehr nahe. Man sieht, wie überraschend scharf die Lage nach Breite und Höhe durch Winkel bestimmt wird.

6. Übungen.

1) Anwendung des Sinussatzes: Martus, mathem. Aufgaben, Nr. 283, 223 bis 225 *b*. 355, 367, 358, 359, 361, 370.

2) Inhalt des Dreiecks: M., Aufg. 290; 352, 319, 321. 252, 292, 293, 296. 256. 307.

3) Durchmesser des umbeschriebenen Kreises: M., Aufg. 289, 236. 294.

4) Bestimmung einer Seite: M., Aufg. 273, 281.

5) Bestimmung zweier Winkel: M., Aufg. 265, 266. 291.

6) Tangenssatz: M., Aufg. 284, 286, 258; 226, 227. Aus dem Hilfsdreieck: 229, 237, 243; 276, 275. — 267. 326. 365.

7) Mollweidesche Formeln: M., Aufg. 244, 245, 250, 317. 228, 241, 242. 270. 354.

8) Aus dem Kosinussatze zu entwickeln die Formeln

$$\cos {}^1/_2\gamma = \sqrt{\frac{s\,(s-c)}{ab}} \quad \text{und} \quad \sin {}^1/_2\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}}$$

und zu zeigen, wie ihr Produkt auf den Wurzelausdruck für den Inhalt des Dreiecks führt und ihr Quotient auf die Formel in Nr. 4. [S. Nr. 3, 2).] Beispiel: M., Aufg. 336.

9) Kosinussatz: M., Aufg. 232, 247, 238, 282.

10) Kosinussatz mit Hilfswinkel: M., Aufg. 230, 231. 368.

11) Aus den Seiten $a = 70{,}097$ m und $b = 3{,}275$ m und dem Zwischenwinkel $\gamma = 135^0$ die dritte Seite mittels eines Hilfswinkels zu berechnen.

[Beide Hilfswinkel liefern übereinstimmend $c = 72{,}450$ m.]

12) Das als Beispiel zu Nr. 3 angegebene Zeichenverfahren für die Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen n-Ecks zu prüfen für ein Vieleck von 9 oder 11 oder 17 oder 19 Seiten. Bei den drei letzten nehme man die Gleichung 2) als $\operatorname{ctg} {}^1/_2\,(\alpha-\beta)$.

Ergebnisse. Beim Neuneck wird $s - x = 0{,}00050\ d$; x ist nur um ${}^1/_{2000}\ d$ zu klein; es fehlt der Strecke x weniger als ${}^1/_{680}\ s$. Beim Elfeck ist $s - x$ ebenso klein; es fehlt der Strecke x weniger als ${}^1/_{560}\ s$. Beim Siebzehneck ist $s - x$ nur $0{,}00017\ d$, x ist um ${}^1/_{5900}\ d$ zu klein; es fehlt der Strecke x weniger als ${}^1/_{1000}\ s$. Beim Neunzehneck ist $s - x$ sogar nur $0{,}00008\ d$, x ist um ${}^1/_{12000}\ d$ zu klein, es fehlt nur ${}^1/_{2000}\ s$.

13) Aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel zu berechnen. (Man bestimme die halben Winkel auf Zehntelsekunden, gebe aber die ganzen Winkel nur in ganzen Sekunden an.) Beispiele: 1) $a = 35{,}076$ m, $b = 58{,}172$ m, $c = 62{,}612$ m. 2) $a = 35{,}076$ m, $b = 31{,}395$ m, $c = 48{,}757$ m.

Ergebnis. 1) $\gamma = 80^0\,12'\,32''$, die Winkelsumme ist um $3''$ zu grofs. 2) $\gamma = 94^0\,11'\,55''$, die Winkelsumme ist um $1''$ zu klein.

Noch Beispiele M., Aufg. 348, 372.

14) Durch die Seite a und die Winkel des Dreiecks ist zu bestimmen der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises und der des anbeschriebenen, welcher die Seite a berührt. Nach den erhaltenen Formeln sind ϱ und ϱ_a durch r und die Winkel anzugeben und der Inhalt des Dreiecks auszudrücken 1) durch ϱ und die Winkel, 2) durch je zwei Halbmesser der anbeschriebenen Kreise und einen Winkel, endlich 3) durch die Halbmesser aller vier berührenden Kreise durch Multiplizieren der Ergebnisse.

Beispiele: M., Aufg. 298, 300, 299, 308b.

15) Den Umfang des Dreiecks zu bestimmen durch die Winkel und den Halbmesser 1) des umbeschriebenen und 2) den des einbeschriebenen Kreises. (**3**, 11, 15.) Beispiel: M., Aufg. 298A.

16) Halbmesser des einbeschriebenen Kreises: M., Aufg. 303, 254, 257, 301. — 302, 239. 297.

17) Ein Hilfswinkel: M., Aufg. 197A, 246, 248, 313, 285.

18) Anwendung der Formeln 20 in **3**, 5: M., Aufg. 362, 261, 260, 272, 235.

19) Anwendung des Satzes von gleichen Brüchen (**3**, 10, 7): M. Aufg. 268, 269. 271.

---

6. Glied. Das Viereck.

1. Die Winkel eines Sehnenvierecks aus den vier Seiten zu berechnen.

Auflösung. Man bezeichne den von den Seiten a und b eingeschlossenen Winkel mit ab, den Zwischenwinkel von c und d mit cd und ziehe die Sehne, auf welcher sie stehen. Sie giebt durch den auf jedes der beiden Dreiecke angewandten Kosinussatz eine Gleichung, aus welcher nach Berücksichtigung von $\angle cd = 180^0 - ab$ hervorgeht

$$\cos ab = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Diese Gleichung, welche nur, wenn für die Seiten einfache Zahlen gegeben sind, zur logarithmischen Rechnung geeignet ist, werde zu $1 = 1$ hinzugezählt (dabei ist, nach Anwendung der Formel für den Unterschied zweier Quadrate, der Umfang $2s$ einzuführen), dann von $1 = 1$ abgezogen; worauf dieses Ergebnis durch das erste dividiert wird zur Beseitigung des unlogarithmischen Nenners. So entsteht

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\, ab = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}.$$

Hiernach ist der Ausdruck für $\operatorname{tg} {}^1/_2\, ad$ entsprechend hinzuschreiben. Die beiden andern Winkel gehen aus den berechneten hervor.

Anmerkung 1. Multipliziert man die für $\sin {}^1/_2\, ab$ und $\cos {}^1/_2\, ab$ erhaltenen Gleichungen, so geht daraus der Ausdruck für den Inhalt des Sehnenvierecks hervor

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

welcher schon 1. T., **21**, 12 durch die Höhen der Dreiecke gefunden wurde. Wechselt man die Ordnung der Seiten, so ändern sich die Winkel, der Inhalt nicht.

Anmerkung 2. Alle diese Formeln gehen für $d = 0$ in die entsprechenden des Dreiecks über.

Beispiel. M., Aufg. 335.

2. Aus einer Seite eines Vierecks und den durch die Eckenlinien entstandenen Teilen der anliegenden Winkel die Gegenseite der gegebenen zu berechnen.

Ausführung. Gemessen ist die Seite $AB = s$ und daran die Winkel α, β, γ und δ; gesucht wird die Seite $MP = x$. Es seien die an dieser liegenden unbekannten Viereckswinkel φ und ψ. Der Sinussatz giebt

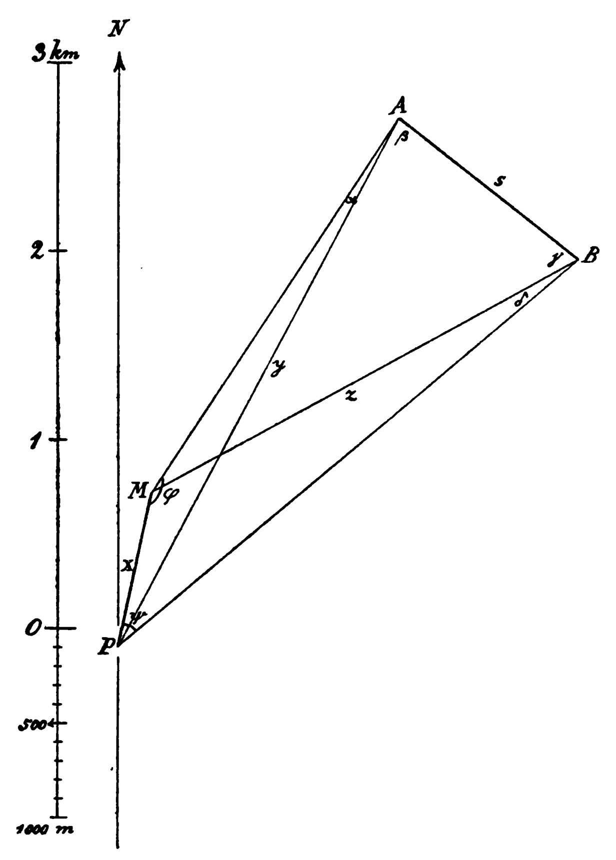
$$1)\ \frac{x}{y} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} \qquad\qquad 3)\ \frac{x}{z} = \frac{\sin\delta}{\sin\psi}$$

ebenso

und $$2)\ \frac{y}{s} = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)} \qquad\qquad 4)\ \frac{z}{s} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

und zur Bestimmung der fünf Unbekannten noch

$$5)\qquad \varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$



Figur 51 in 1/40000 der wirklichen Gröfse.

Um y und z zu beseitigen, multipliziert man 1) und 2), sowie 3) und 4):

$$\frac{x}{s} = \frac{\sin\alpha \, \sin(\gamma + \delta)}{\sin\varphi \, \sin(\beta + \gamma + \delta)} \quad \text{und} \quad \frac{x}{s} = \frac{\sin\delta \, \sin(\alpha + \beta)}{\sin\psi \, \sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Zur Abkürzung sei

$$\frac{\sin\alpha \, \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)} = p \quad \text{und} \quad \frac{\sin\delta \, \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = q;$$

dann ist

$$6) \quad \frac{x}{s} = \frac{p}{\sin\varphi} = \frac{q}{\sin\psi}$$

also

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}.$$

Für den aus gegebenen Gröfsen bestehenden Bruch $\frac{p}{q}$ werde Kotangens eines Hilfswinkels ω eingeführt. (ω ist der griechische Buchstabe Omega)

$$7) \quad \operatorname{ctg}\omega = \frac{p}{q};$$

dann ist
$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$
woraus hervorgeht
$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{\cos\omega - \sin\omega}{\cos\omega + \sin\omega} = -\frac{\sin\omega - \cos\omega}{\cos\omega + \sin\omega}$$
und dies giebt
$$\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi - \psi)}{\operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi + \psi)} = -\operatorname{tg}(\omega - 45^0).$$

Nach 5) ist aber

$$8)\quad {}^1/_2 (\varphi + \psi) = 180^0 - {}^1/_2 (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

und deshalb wird nun

$$9)\quad \operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi - \psi) = \operatorname{tg}(\omega - 45^0) \operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Aus 8) und 9) hat man die unbekannten Winkel φ und ψ, und durch sie aus 6) die Seite x

$$10)\quad x = \frac{ps}{\sin\varphi} = \frac{qs}{\sin\psi}.$$

(Die Eckenlinien sind schon in 2) und 4) gefunden.)

Anmerkung 1. Man könnte auch die Winkel BMP und APM φ und ψ nennen und würde dann die Seiten AM und BP mit y und z bezeichnen; dabei wird man $\omega + 45^0$ nehmen. Kann man nach einer der Messung entsprechend gezeichneten Figur die Gröfse der Winkel φ und ψ (mittels des Winkelmessers) in beiden Fällen beurteilen, so wählt man das Paar, bei welchem $\varphi - \psi$ den gröfseren Wert hat; weil bei kleinem Unterschiede das Zahlenergebnis weniger genau wird. (Siehe die Aufgabe **6**, 5, 8.)

Anmerkung 2. Die Rechnung nach obiger Entwicklung ist kürzer als die, bei welcher man erst AM und y, sowie BP und z berechnet, und dann aus beiden Dreiecken AMP und BMP x findet als x_1 und x_2. Auch darum ist obige Auflösung besser, weil sie sofort den Mittelwert von x_1 und x_2 liefert.

Beispiele.

1) Nordöstlich von Berlin wurde eine Grundlinie $AB = s = 1\,209{,}943$ m sorgfältig gemessen.*) In der Figur 51 bezeichnet M den Fufspunkt der von

---

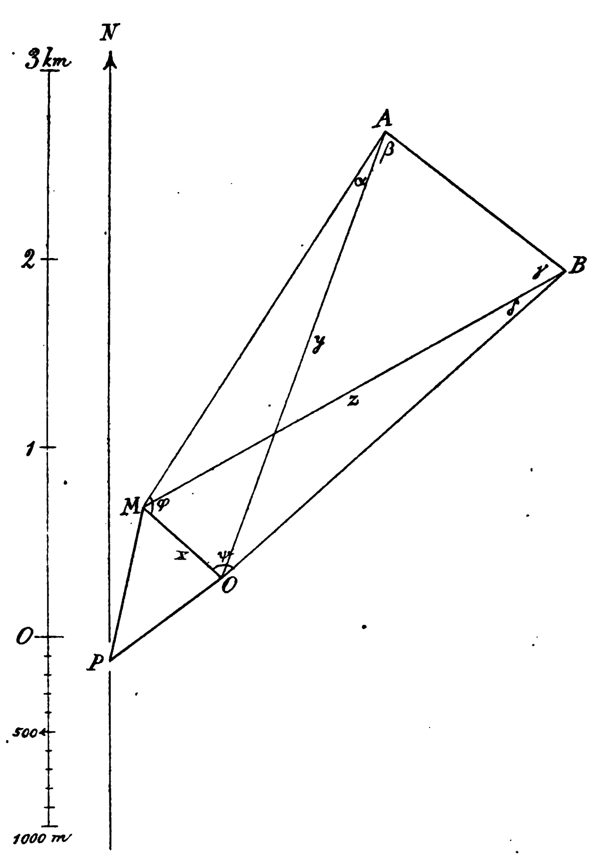
*) Die Grundlinie lief von der Prenzlauer Allee vor der Gasanstalt vorbei bis nahe an den Friedrichshain. Sie wurde in 6 Teile zerlegt und jeder derselben dreimal gemessen mittelst einer 20 Meter langen Mefskette mit Hilfe von fünf Primanern. Mit Theodolit und Nivellierlatte wurde der Neigungswinkel jedes Abschnitts gegen eine wagerechte Ebene bestimmt. Der gröfste derselben war nur $1^0\,24'$. Durch Multiplizieren mit dem Kosinus des Neigungswinkels wurden die Ablotungen der Strecken auf die wagerechte Grundebene erhalten. Die Summe gab die Länge der Grundlinie 1 209,943 m. Das Messen dieser über ein Kilometer langen Linie (am 24. Sept. 1867) dauerte 4 Stunden. — Zur Beurteilung der Genauigkeit einer Messung fügt man der Angabe die Gröfse des mittleren Fehlers bei. Die Abweichungen der einzelnen 3 Messungen einer Strecke von ihrem Mittelwerte betrachtet man als ihre Fehler. Da sie positiv und negativ sind und deshalb in der Summe aller sich zum Teil aufheben würden, nimmt man ihre Quadratzahlen, die alle positiv sind. Das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers w ist der Mittelwert aller Fehlerquadrate. Es ergab sich $w^2 = 0{,}001\,444$, also $w = \pm 0{,}038$ m. Demnach lautet die vollständige Angabe der Länge der Grundlinie $AB = 1\,209{,}943$ m $\pm$ 0,038 m. Die Unsicherheit ist also nur $^1/_{32\,000}$ der Länge.

Die Winkel wurden auf folgende Weise bestimmt. Nachdem senkrecht über dem Anfangspunkte A der Grundlinie AB, die in Figur 51 in $^1/_{40\,000}$ ihrer Gröfse dargestellt

der Spitze des Turmes der Marienkirche auf die wagerechte Grundebene gefällten Senkrechten und P den Fufspunkt der Höhe der Petrikirche. Die Messung ergab für den Winkel MAP den Mittelwert $\alpha = 5^0\,32'\,12^1/_2''$, für $\angle PAB\ \beta = 79^0\,10'\,10''$, für $ABM\ \gamma = 67^0\,8'\,45''$ und für $\angle MBP\ \delta = 11^0\,35'\,10''$. Wie grofs ist der Fufspunktsabstand MP und der Winkel BPM?

Ergebnis. Aus φ $x_1 = 833{,}56$ m und aus ψ $x_2 = 833{,}57$ m. $MP = x = 833{,}565$ m. $\angle BPM = \psi = 37^0\,58'\,32''$. Siebenstellige Logarithmen liefern $MP = 833{,}5817$ m und $\angle BPM = 37^0\,58'\,30{,}32''$.

2) An den Endpunkten der Grundlinie $AB = s = 1\,209{,}943$ m wurde das Fernrohr auch auf die Spitze der Parochialkirche gerichtet. Der Fufspunkt der von ihrer Spitze auf die wagerechte Grundebene gefällten Senkrechten ist in Figur 52 mit O bezeichnet. Man erhielt für den Winkel MAO den Mittelwert $\alpha = 12^0\,42'\,22^1/_2''$, für $\angle OAB$ $\beta = 72^0\,0'\,0''$, für $\angle ABM$



Figur 52 in 1/40000 der wirklichen Gröfse.

---

ist, der Theodolit aufgestellt und sein Grundkreis nach Angabe der Libelle mittels der 3 Stellschrauben wagerecht gemacht war, wurde das Fernrohr auf die Spitze des Turmes der Marienkirche gerichtet und die Lage der Linie AM an der Grundkreisteilung, die durch zwei gegenüberstehende Vernier halbe Minuten angiebt, abgelesen; beide Angaben wurden aufgeschrieben. Hierauf wurde das Fernrohr auf die Spitze der Petrikirche eingestellt. Die wagerechte Drehung, welche der Fernrohrträger beim Übergehen aus der ersten in die zweite Stellung auf dem festen Grundkreise machte, also der Grundwinkel MAP, ist der Unterschied der ersten und zweiten Richtungsablesung am Grundkreise. Dann wurde das Fernrohr nach der im Endpunkte B der Grundlinie senkrecht in den Erdboden eingesteckten weifsen Fahnenstange herumgewandt und der Winkel PAB bestimmt. Hierauf wurde der Theodolit auf dem Dreifufse um etwa 120° herumgedreht und noch einmal ebenso beobachtet; dann wurde er abermals in demselben Sinne weiter herumgedreht und die dritte Beobachtung gemacht. Bei den Wiederholungen liefen also die Richtungen über andere der 360 Grade der Grundkreisteilung, und es konnte der Mittelwert der dreimal zwei Gröfsenangaben für denselben Winkel etwaige kleine Fehler der Grundkreisteilung unschädlich machen und den Minutenbruch genauer bestimmen. Am Endpunkte B der Grundlinie wurden die Winkelmessungen ebenso ausgeführt.

$\gamma = 67^0\ 8'\ 45''$ und für $\angle$ *MBO* $\delta = 12^0\ 43'\ 5''$. Man berechne den Fufspunktsabstand *MO* und gebe, da in der vorhergehenden Aufgabe der Winkel *AMP* $= 158^0\ 35'\ 10''$ (12,18") gefunden wurde, auch die Gröfse des Winkels *PMO* an.

Ergebnis. Man erhält *MO* = 564,56 m und $\angle$ *PMO* $= 58^0\ 20'\ 25''$ und beim Rechnen mit siebenstelligen Logarithmen *MO* = 564,5493 m und $\angle$ *PMO* $= 58^0\ 20'\ 20{,}91''$.

3) Endlich ist noch die dritte Seite *OP* des Grunddreiecks *MOP* mit den beiden anliegenden Winkeln zu bestimmen aus der Grundlinie *AB* = s = 1 209,943 m. Es war für den Winkel *PAO* der Mittelwert $\alpha = 7^0\ 10'\ 10''$, für $\angle$ *OAB* $\beta = 72^0\ 0'\ 0''$, für $\angle$ *ABP* $\gamma = 78^0\ 43'\ 55''$ und für $\angle$ *PBO* $\delta = 1^0\ 7'\ 55''$. Man berechne den Fufspunktsabstand *OP* und gebe, da in der ersten Aufgabe $\angle$ *BPM* $= 37^0\ 58'\ 32''$ (30,318") und in der zweiten $\angle$ *BOM* $= 95^0\ 11'\ 3''$ (bei 7stell. Log. $95^0\ 10'\ 56{,}23''$) gefunden wurde, auch die Gröfse der Winkel *MPO* und *MOP* an.

Ergebnis. $\omega - 45^0 = -33^0\ 48'\ 8{,}5''$ giebt für $\angle$ *APO* $= \varphi$ und *BOP* $= \psi$ $^1/_2\,(\varphi - \psi) = -74^0\ 33'\ 0''$. $x_1 = 720{,}83$ m und $x_2 = 720{,}81$ m; also *OP* $= x = 720{,}82$ m. Mit siebenstelligen Logarithmen erhält man den Mittelwert *OP* = 720,7982 m.

		5 stell. Logar.	7 stell. Logar.
	$\angle$ *MPO* =	$41^0\ 48'\ 37''$	(35,33")
	$\angle$ *MOP* =	$79^0\ 50'\ 57''$	(51' 3,75")
dazu nach 2)	$\angle$ *PMO* =	$58^0\ 20'\ 25''$	(20,91")
giebt zur Probe für die Rechnung		$179^0\ 59'\ 59''$	(59,99")

und nicht voll 180^0, weil beim Fortlassen des Sekundenbruchteils die letzte Ziffer bei keinem dieser Winkel zu erhöhen war.

Anmerkung. Die Strecke *PM* bildet mit der Nordrichtung *PN* der durch *P* gehenden Mittagslinie *NS* auf deren Ostseite einen Winkel *NPM* von $12^5/_8$ Grad.*) Daher kann man an eine auf dem Zeichenblatte von oben nach unten gezogene Gerade *NS* im gewählten Punkte *P* mit dem Winkelmesser den Winkel *NPM* wenig über $12^1/_2{}^0$, mit der Öffnung nach rechts oben, antragen und ebenso den Winkel *NPO* wenig unter $54^1/_2{}^0$, und auf deren Schenkeln für die Strecken *PM* und *PO* z. B. den 20000sten Teil der berechneten wirklichen Gröfse (also für *PM* 41,7 mm und für *PO* 36,0 mm) abtragen. Dann hat man das Dreieck *MOP* auch in richtiger Kartenlage als Ausgang für eine „Planzeichnung in $^1/_{20000}$ der wirklichen Gröfse."

3. Die Snelliussche Aufgabe.**) Die Schenkel des gegebenen Winkels γ sind a und b Meter lang. Von einem in derselben Ebene liegenden Punkte aus erscheint die Strecke a unter dem Winkel α, b unter dem Winkel β. Man soll den Abstand des Punktes vom Scheitel des Winkels berechnen.

Ausführung. Der Punkt kann innerhalb oder aufserhalb des Winkels γ liegen.

*) Nach einer Mitteilung des städtischen Amtes zur Herstellung der Karte von Berlin ist Winkel *NPM* $= 12^0\ 37'\ 28''$.

**) Die Aufgabe ist zuerst von Snellius behandelt im Jahre 1614 (1. T., 12, 15, 33 unten). Deshalb ist sie nach ihm zu benennen, nicht nach Pothenot, der sie 1692 löste.

Erster Fall. Der Punkt L befindet sich innerhalb des Winkels OMP. Es sei der mit α in einem Dreiecke vorkommende Winkel $LPM = \varphi$ und der zu β gehörige $\angle LOM = \psi$. Der Sinussatz giebt

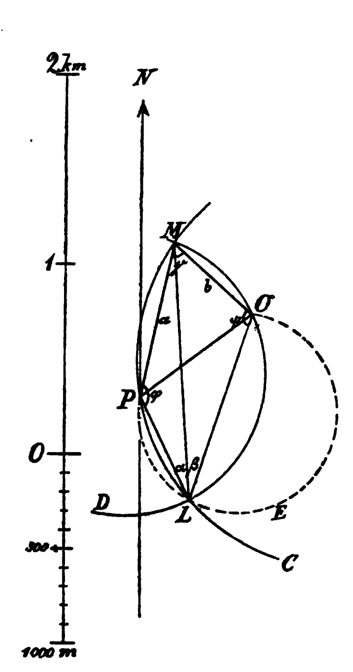
$$1)\ \frac{x}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin\alpha} = d$$

wo d den Durchmesser des um das Dreieck MPL beschriebenen Kreises bedeutet und durch $a : \sin\alpha$ bestimmt wird. Ebenso mit dem Durchmesser d_1 des um das Dreieck MOL beschriebenen Kreises

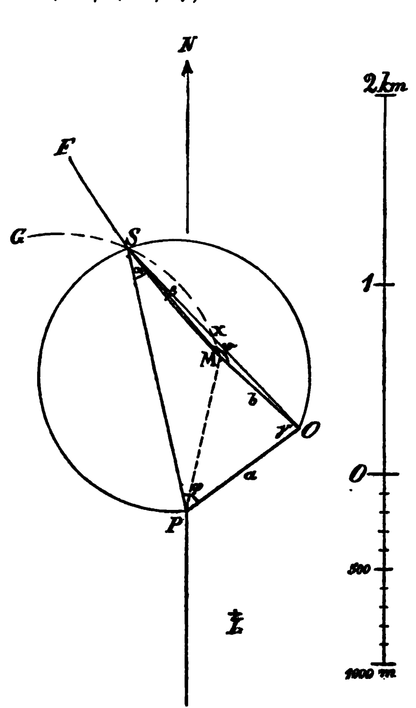
$$2)\ \frac{x}{\sin\psi} = \frac{b}{\sin\beta} = d_1$$

und zur Bestimmung der 3 Unbekannten noch

$$3)\ \varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma).$$



Figur 53 in 1/40000 der wirklichen Gröfse (zum 1. Fall.)



Figur 54 in 1/40000 der wirklichen Gröfse (zum 2. Fall. S. 62.)

Um x zu beseitigen, wird die Gleichung 2) durch 1) dividiert

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{d_1}{d}.$$

Der genaueren Rechnung wegen führt man den Hilfswinkel ω ein durch

$$4)\ \operatorname{ctg}\omega = \frac{d_1}{d}$$

und erhält wie in Nr. 2 aus

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

$$\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi - \psi)}{\operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi + \psi)} = - \operatorname{tg} (\omega - 45^0).$$

Aus 3) ist 5) ${}^1/_2 (\varphi + \psi) = 180^0 - {}^1/_2 (\alpha + \beta + \gamma)$

also 6) $\operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi - \psi) = \operatorname{tg} (\omega - 45^0) \operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha + \beta + \gamma)$

wodurch die Winkel φ und ψ gefunden werden. Dann hat man aus 1) und 2)

7) $x = d \sin\varphi = d_1 \sin\psi$.

Zweiter Fall. Der Punkt S steht aufserhalb des Winkels MOP. Hier ist der Winkel OSP α und OSM β. Zu α gehört $\angle OPS = \varphi$ und zu β $\angle OMS = \psi$. Zu den Gleichungen 1) und 2) kommt in diesem Falle eine andere dritte. Denkt man PM verlängert, so geben die Teile des Winkels ψ durch den Satz vom Dreiecksaufsenwinkel $\psi = (\alpha - \beta) + \varphi + \gamma$, also hier 3) $\psi - \varphi = \alpha - \beta + \gamma$.

Da nun ψ der gröfsere Winkel ist, werde Gleichung 1) durch 2) dividiert und mit umgekehrter Ordnung der Durchmesser

$$4) \operatorname{ctg} \omega = \frac{d}{d_1}$$

eingeführt. Zum bekannten Unterschiede $\psi - \varphi$ ist in diesem Falle die Summe $\psi + \varphi$ zu suchen und deshalb aus

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

abzuleiten

$$\frac{\sin\psi + \sin\varphi}{\sin\psi - \sin\varphi} = \frac{\cos\omega + \sin\omega}{\cos\omega - \sin\omega}$$

woraus hervorgeht

$$\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 (\psi + \varphi)}{\operatorname{tg} {}^1/_2 (\psi - \varphi)} = \operatorname{tg} (\omega + 45^0).$$

Nach 3) ist 5) ${}^1/_2 (\psi - \varphi) = {}^1/_2 (\alpha - \beta + \gamma)$

also 6) $\operatorname{tg} {}^1/_2 (\psi + \varphi) = \operatorname{tg} (\omega + 45^0) \operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha - \beta + \gamma)$.

Die hierdurch gefundenen Winkel φ und ψ liefern aus 1) und 2)

7) $x = d \sin\varphi = d_1 \sin\psi$.

Anmerkung. Um den Punkt, den gegebenen Winkeln α und β entsprechend, in die Figur zu bringen, könnte man nach Herstellung des Dreiecks MOP im ersten Falle (Figur 53) über PM als Sehne den Kreisbogen PLC beschreiben, welcher den Winkel α fafst, und über MO den Bogen OLD mit den Winkel β. Ihr Schnittpunkt L ist der gesuchte Punkt. Der über OP als Sehne beschriebene Kreisbogen PEO, welcher den Winkel $(\alpha + \beta)$ fafst, mufs durch denselben Punkt L gehen, weil er der Ort aller Punkte ist, deren nach P und O gehende Verbindungslinien den Winkel $(\alpha + \beta)$ einschliefsen, und zu ihnen gehört L, da $\angle PLO = \alpha + \beta$ ist.

Bei Messungen, welche die Sekunden der Winkel α und β nicht genau angeben können, ist es zur Erlangung eines möglichst zuverlässigen Ergebnisses nicht gleichgültig, welches Paar der drei Bogen man zur Bestimmung des Punktes L benutzt. Die für die Rechnung gegebenen Gröfsen der Winkel α und β liefern Bogen, die nur in der Nähe der in Wirklichkeit vorhandenen Bogen laufen. Diese können innerhalb oder aufserhalb der gezeichneten Bogen liegen. Nähme man zu PC den

Bogen PLE, welcher bis L selber an ihm hin läuft, so würde, wenn im ungünstigsten Falle die wahren Bogen beide aufserhalb sind, der wirkliche Punkt L südöstlich (rechts unterhalb) von dem durch die Rechnung bestimmten Punkte L in nicht unerheblichem Abstande sein, PL wäre also merklich zu kurz gefunden; dagegen zu grofs, wenn die wahren Bogen beide innerhalb liegen. Viel nachteiliger aber ist die seitliche Verschiebung, da sie besonders den Winkel ψ ändert. — Weit günstiger ist es mit dem Bogen OD. Mag der wahre Bogen OD ein wenig nach innen oder aufsen sich befinden, ihn schneidet der wahre Bogen PC immer in unmittelbarer Nähe von L, weil er fast rechtwinklig durch ihn hindurch geht; mit PE und OD ist dies weniger gut der Fall. Man wird also dasjenige Paar der Bogen wählen, welches sich nahezu rechtwinklig schneidet.

In Figur 54 war zum Bogen OSP der flache Bogen MSF zu nehmen, weil er ihn unter gröfserem Winkel schneidet, als der Bogen MSG, welcher über der Sehne MP den Winkel $(\alpha - \beta)$ fafst. Die Figur 54 zeigt durch den spitzwinkligen Schnitt der Bogen MSG und MSF, dafs zur genauen Bestimmung dieser Lage des Punktes S nicht wieder der Winkel PMO des ersten Falles zu verwenden war.

Beispiele.

1) Standpunkt auf dem Turme der Luisenstädtischen Kirche zu Berlin.

An der Westecke des Umganges oben auf dem Turme der Luisenstädtischen Kirche, welche südlich von der Marienkirche liegt, wurde das Fernrohr des Theodoliten auf die Spitzen der Petri-, Marien- und Parochialkirche gerichtet. Es ergab sich aus drei Beobachtungen, wenn in der Figur 53 der Punkt L den Fufspunkt der vom Mittelpunkte des Theodoliten auf die wagerechte Grundebene gefällten Senkrechten ist, der Winkel PLM $\alpha = 23^0\ 4'\ 12''$ und $\angle\ OLM\ \beta = 23^0\ 16'$. Nach den Ergebnissen in **6**, 2, 1) und 2) ist MP $a = 833{,}565$ m, MO $b = 564{,}56$ m und $\angle\ PMO\ \gamma = 58^0\ 20'\ 25''$. (Bei der Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen ist zu nehmen $a = 833{,}5817$ m, $b = 564{,}5493$ m und $\gamma = 58^0\ 20'\ 20{,}91''$.) Wie grofs sind LM, die Teile des Winkels γ, LMP und LMO, die Seite LO und der Winkel LOM?

Ergebnis. Es ergiebt sich für die Entfernung $LM = 1311{,}76$ m, $\angle\ LMP = 15^0\ 0'\ 5{,}5''$ und $\angle\ LMO = 43^0\ 20'\ 19{,}5''$, der Abstand $LO = 980{,}90$ m und $\angle\ LOM = \psi = 113^0\ 23'\ 40{,}5''$. (Siebenstellige Logarithmen liefern $LM = 1311{,}7145$ m, $\angle\ LMP = 14^0\ 59'\ 58{,}78''$, $\angle\ LMO = 43^0\ 20'\ 22{,}13''$, $LO = 980{,}8871$ m und $\angle\ LOM = 113^0\ 23'\ 37{,}87''$.)

2) Standpunkt auf dem Turme der Sophienkirche in Berlin.

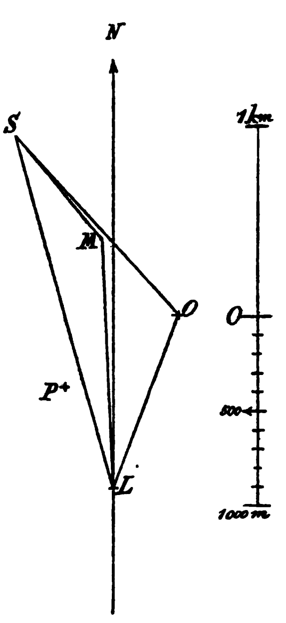
An der Südwest-Ecke des unteren Umganges auf dem Turme der Sophienkirche, welche nordwestlich von der Marienkirche liegt, wurde ebenso, wie in der vorhergehenden Aufgabe angegeben ist, beobachtet. In der Figur 54 bezeichnet S den Fufspunkt der dort vom Mittelpunkte des Theodoliten auf die wagerechte Grundebene gefällten Senkrechten. Es war der Winkel OSP $\alpha = 30^0\ 59'\ 24''$ und $\angle\ OSM\ \beta = 2^0\ 17'\ 47''$. Nach den Ergebnissen in **6**, 2, 2) und 3) ist OP $a = 720{,}82$ m, MO $b = 564{,}56$ m und $\angle\ MOP$ $\gamma = 79^0\ 50'\ 57''$. (Beim Rechnen mit siebenstelligen Logarithmen ist zu nehmen $a = 720{,}7982$ m, $b = 564{,}5493$ m und $\gamma = 79^0\ 51'\ 3{,}75''$.) Wie grofs ist die Entfernung OS, der Winkel MOS, der Abstand MS und der Winkel SMP, da in der Aufgabe **6**, 2, 2) der Winkel $PMO = 58^0\ 20'\ 25''$ $(20{,}91'')$ gefunden wurde?

Ergebnis. $x_1 = 1281{,}265$ m und $x_2 = 1281{,}353$ m; Mittelwert $OS = x = 1281{,}31$ m. $\angle MOS = 2^0\ 55'\ 17''$. $MS = 718{,}11$ m und $\angle SMP = 126^0\ 52'\ 39''$. (Siebenstellige Logarithmen liefern $OS = 1281{,}2364$ m, $\angle MOS = 2^0\ 55'\ 15{,}76''$, $MS = 717{,}9975$ m und $\angle SMP = 126^0\ 52'\ 41{,}85''$.)

4. Anhang.

1. Eine grofse Standlinie mitten in Berlin.

Aus den Ergebnissen der beiden vorhergehenden Aufgaben kann nun, um eine für die folgenden Ortsbestimmungen günstig gelegene Standlinie zu gewinnen (deren unmittelbare Messung unmöglich ist), der gegenseitige Abstand der Fufspunkte L und S berechnet werden, und zwar aus zwei Dreiecken, aus LMS und LOS. (Das dritte Dreieck, LPS, ist zu schmal, um einen genauen Wert zu liefern.) In diesen kennt man zwei Seiten und den Zwischenwinkel und wird zur Feststellung der Länge von LS die genauere Berechnungsweise, mittels des Tangenssatzes und der ersten Mollweideschen Formel, nehmen.



Figur 55
in 1/40000 der wirklichen Gröfse.

Es ergab sich $\angle LMP = 15^0\ 0'\ 5{,}5''$ und $\angle SMP = 126^0\ 52'\ 39''$, also ist $\angle LMS = 141^0\ 52'\ 44{,}5''$; dazu $LM = 1311{,}76$ m und $MS = 718{,}11$ m. Ferner war $\angle LOM = 113^0\ 23'\ 40{,}5''$ und $\angle MOS = 2^0\ 55'\ 17''$, also $\angle LOS = 116^0\ 18'\ 57{,}5''$ mit $OS = 1281{,}31$ m und $LO = 980{,}90$ m. (Beim Rechnen mit siebenstelligen Logarithmen ist zu nehmen: $\angle LMS = 141^0\ 52'\ 40{,}63''$, $LM = 1311{,}7145$ m und $MS = 717{,}9975$ m; dann $\angle LOS = 116^0\ 18'\ 53{,}63''$, $OS = 1281{,}2364$ m, $LO = 980{,}8871$ m.)

Ergebnis. Fünfstellige Logarithmen liefern aus dem Dreieck LMS $LS = c_1 = 1928{,}34$ m und aus LOS $c_2 = 1928{,}27$ m, also $LS = 1928{,}3$ m. Siebenstellige Logarithmen: $c_1 = 1928{,}1991$ m und $c_2 = 1928{,}1984$ m, also ist die Standlinie $LS = 1928{,}199$ m.*)

Nach diesem genaueren Ergebnis

$$\log LS = 3{,}285\,1519$$

werde für die folgenden Rechnungen bei fünfstelligen Logarithmen genommen

$$\log LS = 3{,}28\,515.$$

*) Das städtische Amt zur Herstellung einer grofsen Karte von Berlin ging in seinen Berechnungen von der Grundlinie aus, welche für die Erdmessung 1846 südlich bei Berlin gemessen war. Es bestimmt die Orte durch ihre Abstände von den beiden Geraden, welche in der wagerechten Grundebene durch den Fufspunkt der abwärts verlängerten Achse der eisernen Fahnenstange des Rathausturmes von Süd nach Nord und von West nach Ost gehen. Der Verfasser vorliegenden Buches erhielt 10 Jahre nach obiger Messung eine gute Bestätigung seines Ergebnisses durch die in diesem Amte soeben festgestellten Werte für die Standorte der Punkte M, O und P. Er berechnete aus denselben die Länge seiner Standlinie LS aus beiden Dreiecken, LMS und LOS, mit siebenstelligen Logarithmen und erhielt $LS = 1928{,}080$ m
während seine eigene Messung geliefert hatte $LS = 1928{,}199$ m
also nur 11,9 cm mehr,
das ist 1/16000 der Länge LS. Das Ergebnis ist also sehr zuverlässig.

2. Zum Entwurf der ersten Grundlage für eine

Karte von Berlin.

Aus den Angaben folgender Tabelle kann man viele Aufgaben über Entfernungsbestimmungen bilden. Bei ihrer Berechnung ist zu nehmen

$$\log LS = 3{,}28\,515.$$

Nr.	Beobachtete*) Richtung nach	Von L nach S gesehen,	Winkel an der Standlinie LS	
			bei L	bei S
1.	Marienkirche	rechts	13° 17′ 23″	24° 49′ 56″
2.	Petrikirche	links	9 46 49	3 51 41
3.	Parochialkirche	rechts	36 33 23	27 7 43
4.	Schloſskuppel	links	11° 46′ 25″	12° 14′ 50″
5.	Rathausturm	rechts	18 19 20	20 41 34
6.	Nikolaikirche (Nordspitze)	„	13 40 4	11 9 30
7.	Jakobikirche	links	157 29 4	4 31 37½
8.	Hedwigskirche	„	32 11 25	33 8 22½
9.	Türme auf dem Schillerplatze { der nördliche	links	43° 2′ 40″	38° 3′ 7½″
10.	Türme auf dem Schillerplatze { „ südliche	„	50 42 10	34 42 45
11.	Georgenkirche	rechts	35 26 4	56 18 37½
12.	Bartholomäuskirche	„	44 14 50	82 1 52½
13.	Dreifaltigkeitskirche	links	62 13 10	46 4 20
14.	Dorotheenstädtische Kirche	links	40° 15′ 4″	67° 2′ 10″
15.	Kreuzbergdenkmal	„	127 20 37½	32 12 52½
16.	Johanneskirche in Moabit	„	49 54 10	104 35 34
17.	Borsigs Hauptschornstein zum Eisenhammer in Moabit	„	55 27 26	101 37 56

Zum Plane in $^1/_{20000}$ der wirklichen Gröſse ist ein ganzer Bogen Papier erforderlich. Auf seiner von links nach rechts gehenden Mittellinie ist der Punkt L 6 cm rechts von der Mitte anzunehmen und durch ihn die Mittagslinie nach Süd und Nord zu ziehen. Von ihrer Nordrichtung geht die Standlinie LS ab nach der Seite von Nord-Nordwest unter einem Winkel von $15^2/_3$ Grad.*) Auf ihr trägt man für LS,

*) Die für die Winkel angegebenen Zahlen sind die Mittelwerte aus zwei Beobachtungen, also aus 4 Ablesungen am Theodolitengrundkreise, der halbe Minuten angiebt durch zwei Vernier. Wenn bei einer Ablesung zwei Nachbarstriche des Vernier gleich gut paſsten, also ¼ Minute zu nehmen war, so kamen im Mittelwerte der 4 Ablesungen Sechzehntel der Minute. Diese Sekundenzahlen wurden, um unbequemes Rechnen zu vermeiden, um 1″ abgerundet. Die Sekunden bei Nr. 1—3 sind nach der Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen eingesetzt.

**) Diesen Winkel findet man dadurch, daſs man den Winkel PM Süd $= \angle MP$ Nord $= 12° 37′ 28″$ (Anmerkung zu 6, 2, 3) vom Winkel $LMP = 14° 59′ 59″$ (Ergebnis siebenstelliger Logarithmen bei der Aufgabe 6, 3, 1) abzieht, es bleibt $\angle LM$ Süd $= 2° 22′ 31″$. Fügt man zu diesem nach dem Satze vom Dreiecksauſsenwinkel $\angle MLS = 13° 17′ 23″$ (6, 4, 1), so hat man den gesuchten Winkel $= 15° 39′ 54″$. (Die mit fünfstelligen Logarithmen erhaltenen Werte geben 15° 40′ 4″.)

wenn der Mafsstab $^1/_{20000}$ genommen wird, 96,4 mm ab. Diese Standlinie LS ist nach beiden Seiten zu verlängern, um die in der Tabelle stehenden Winkel auf der angegebenen Seite der Linie in L und in S mittels des Winkelmessers mit möglichster Genauigkeit antragen zu können. Durch den gefundenen Schnittpunkt der Schenkel ist sogleich ein Kreuz, wie +, zu legen und der Name des Turmes in kleiner Schrift beizuschreiben. Zum richtigen Eintragen der Standorte für die Punkte Nr. 15—17, die sehr fern liegen, ist es gut, die Länge der Nebenseiten des Dreiecks in Metern und in Plangröfse zu berechnen und diese auf dem angelegten Schenkel mit dem Millimetermafse abzutragen. Der durch die ungenau gezogenen Schenkel entstandene Fehler ist leicht auszugleichen. Auch bei kurzen Entfernungen sind die Winkel anzutragen; man mufs **nicht** mit den berechneten Abständen um L und S Kreuzbogen beschreiben, weil der geringste Fehler in der Zirkelspannung den Schnittpunkt seitwärts verlegt. — Man vergesse nicht, die Gröfse des Mafsstabes (1 : 20 000) auf dem Plane anzugeben und seine Länge, „1 Kilometer," mit Unterabteilungen zu 100 Metern, hinzuzeichnen.

Figur 56
in $^1/_{80000}$ der wirklichen Gröfse.

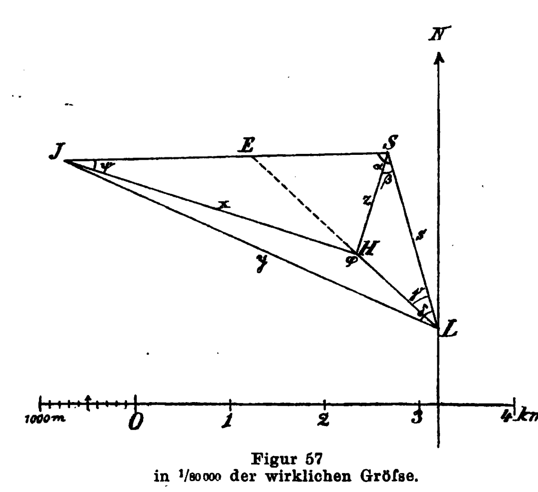
Beispiele zum Gebrauche der Tabelle.

1) Entfernung von der Dorotheenstädtischen Kirche bis zur Bartholomäuskirche in Berlin. (Nr. 14 und 12.)

Es sei in der wagerechten Grundebene, in welcher die Standlinie LS liegt, D der Fufspunkt der Höhe der Dorotheenstädtischen Kirche und B der der Bartholomäuskirche. Die nach diesen Punkten von den Endpunkten L und S gehenden Geraden bilden mit ihr die Winkel $DSL\ \alpha = 67^0\ 2'\ 10''$, $BSL\ \beta = 82^0\ 1'\ 52^1/_2''$. $BLS\ \gamma = 44^0\ 14'\ 50''$ und $DLS\ \delta\ 40^0\ 15'\ 4''$. Wie grofs ist demnach, mit $\log LS = 3{,}28\,515$, der Abstand der Punkte D und B?

Ergebnis. Aus $\varphi\ x_1 =$ 2867,7 m, aus $\psi\ x_2$ 2867,8 m. Der Abstand der Höhenfufspunkte beträgt $2867^3/_4$ m. Der Weg von der einen Kirche zur andern ist also 3 km.

2) Entfernung von der Hedwigskirche bis zur Johanneskirche im Berliner Stadtteile Moabit. (Nr. 8 und 16.)



Figur 57
in $^1/_{80000}$ der wirklichen Gröfse.

Es bezeichnen J und H in der wagerechten Grundebene die Fufspunkte der Höhen der Johannes- und der Hedwigskirche. Die Beobachtungen an den Endpunkten der Standlinie LS ergaben

$\angle JSL\ \alpha = 104^0\,35'\,34''$, $\angle HSL\ \beta = 33^0\,8'\,22^1/_2''$, $\angle HLS\ \gamma = 32^0\,11'\,25''$ und $\angle JLS\ \delta = 49^0\,54'\,10''$. Man berechne mit $\log LS = 3{,}28\,515$ die Entfernung HJ.

Ergebnis. $HJ = x = 3\,247{,}9$ m. Die Entfernung beträgt schon $3^1/_4$ km.

5. Übungen.

1) Ein Viereck aus den Seiten a, b, c, d so herzustellen, dafs $\angle ab = \angle cd$ wird. Man bestimme diese Winkel durch $\operatorname{ctg} {}^1/_2\, ab$, um auch die beiden andern Winkel aus ihren durch die Eckenlinie entstehenden Teilen leicht berechnen zu können. Beispiele:

$$1)\ a = 18,\ b = 12,\ c = 17,\ d = 7;$$
$$2)\ a = 18,\ b = 17,\ c = 12,\ d = 7.$$

Ergebnis. Mit dem Umfange $2s$ wird

$$\operatorname{ctg} {}^1/_2\, ab = \sqrt{\frac{s\cdot[s-(c+d)]}{[s-(b+d)]\,[s-(a+d)]}}.$$

Im 1. Beispiele $\angle ad = 150^0\,59'\,58''$
im 2. „ $\angle ad = 209^0\,0'\,2{,}8''$. (Ein Zusammenhang?)

Abschlufs. Die Seiten dürfen nicht paarweise gleich sein. (Drei Fälle. Die Werte $\cos {}^1/_2\, ab$ und $\sin {}^1/_2\, ab$ werden unbrauchbar; was für solchen Fall sehr leicht erklärlich ist.)

2) Zu einem Vierecke sind eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel α und β gegeben; die drei andern Seiten sollen gleich grofs werden. Man berechne diese Seiten. $a = 100$ cm, $\alpha = 112^0\,26'$, $\beta = 48^0\,34'$. Man drücke die durch α gehende Eckenlinie auf zwei Weisen aus; die durch Gleichsetzen entstehende Gleichung liefert den Winkel φ zwischen a und der Eckenlinie aus

$$\sin(\alpha - 2\varphi) = 2\cos {}^1/_2(\alpha+\beta)\,\sin {}^1/_2(\alpha-\beta).$$
$$x = 79{,}066 \text{ cm}.$$

3) Es ist um den Kreis vom Halbmesser ϱ das Viereck $ABCD$ beschrieben. Es sei $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, ... Man soll die Summe zweier Gegenseiten $a + c = s$ durch ϱ und die Winkel bestimmen. Damit ist dann der Umfang $2s$ und der Inhalt $J = \varrho s$ gefunden. (1. Teil, **12**, 8 und **21**, 8.)

Ergebnis. $$s = \frac{\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)\,\sin {}^1/_2(\alpha+\gamma)\,\sin {}^1/_2(\alpha+\delta)}{\sin {}^1/_2\alpha\,\sin {}^1/_2\beta\,\sin {}^1/_2\gamma\,\sin {}^1/_2\delta}\cdot\varrho.$$

4) Man bestimme durch die Winkel und den Inhalt V eines umbeschriebenen Vierecks den Inhalt V_1 des einbeschriebenen, dessen Ecken die Berührungspunkte sind.

$$V_1 = 2\sin {}^1/_2\alpha\,\sin {}^1/_2\beta\,\sin {}^1/_2\gamma\,\sin {}^1/_2\delta\cdot V.$$

5) Martus, Aufgabe 371.

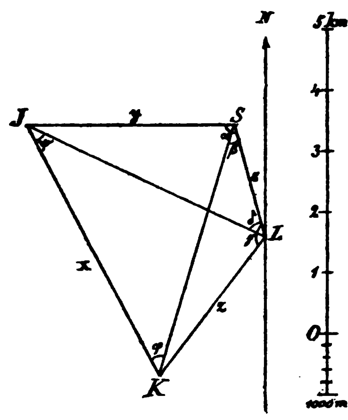
Beispiele zu obiger Aufgabe 2.

6) Abstand der Höhenfufspunkte der Marienkirche und des Rathausturmes in Berlin. (Nr. 1 und 5 der Tabelle.) Die Fufspunkte M und R dieser Höhen liegen in der Grundebene beide auf der rechten Seite der Standlinie LS. (Figur 55.) Es ist $\angle MSL\ \alpha + \beta = 24^0\,49'\,56''$, $\angle RSL\ \beta = 20^0\,41'\,34''$, $\angle RLS\ \gamma + \delta = 18^0\,19'\,20''$ und $\angle MLS\ \gamma = 13^0\,17'\,23''$. Man berechne die Gröfse der Strecke MR mit $\log LS = 3{,}28\,515$.

5*

Ergebnis. Der Abstand der Höhenfufspunkte ist 252,133 m. (Siebenstellige Logarithmen liefern 252,1328 m.)

7) Entfernung vom Rathausturme bis zum Turme der Petrikirche in Berlin. (Nr. 5 und 2 der Tabelle.) In der wagerechten Grundebene, in welcher die Standlinie LS sich befindet, sei P der Fufspunkt der Höhe der Petrikirche und R der der Höhe des Rathausturmes. Die Figur entspricht der Figur 56; es tritt P für D und R für B nahe bei LS ein. (Vergl. Figur 55 und 59.) Die Messung ergab $\angle LSP\ \alpha = 3^0\,51'\,41''$, $\angle LSR\ \beta = 20^0\,41'\,34''$, $\angle RLS\ \gamma = 18^0\,19'\,20''$ und $\angle PLS\ \delta = 9^0\,46'\,49''$. Wieviel Meter erhält man demnach durch $\log LS = 3{,}28\,515$ für die kurze Strecke PR?

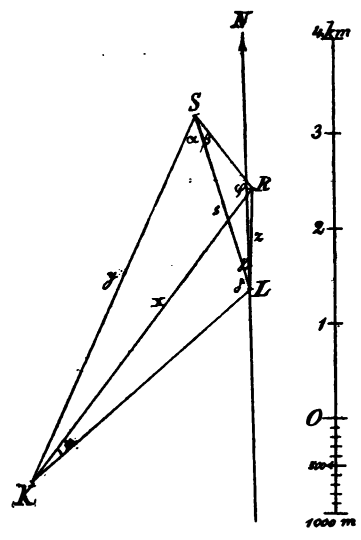


Figur 58
in 1/125000 der wirklichen Gröfse.

Ergebnis. Für den Fufspunktsabstand PR der von den Turmspitzen auf die Grundebene gefällten Senkrechten liefern fünfstellige Logarithmen 650,61 und 650,60 m, siebenstellige 650,582 m. [Aufgabe **5**, 5, 29.]

8) Entfernung des Kreuzbergdenkmals von der Johanneskirche im Berliner Stadtteile Moabit. (Nr. 15 und 16 der Tabelle.) An den Endpunkten der Standlinie LS wurde, wenn in Figur 58 J und K die in der wagerechten Grundebene senkrecht unter den Spitzen der Johanneskirche und des Kreuzbergdenkmals stehenden Punkte bedeuten, gemessen $\angle JSL\ \alpha = 104^0\ 35'\ 34''$, $\angle KSL\ \beta = 32^0\ 12'\ 52^1/_2{}''$, $\angle KLS\ \gamma = 127^0\ 20'\ 37^1/_2{}''$ und $\angle JLS\ \delta = 49^0\ 54'\ 10''$. Man berechne mit $\log LS = 3{,}28\,515$ die Entfernung JK, indem man die an JK liegenden Teile der Viereckswinkel als Unbekannte nimmt, nicht die Viereckswinkel selbst, weil diese zu nahe einander gleich sind. (Vgl. Anmerk. 1 zu **6**, 2.)

Ergebnis. Aus $\varphi\ x_1 = 4\,679{,}30$ m und aus $\psi\ x_2 = 4679{,}35$ m; Mittelwert $x = 4\,679{,}32$ m. (Siebenstellige Logar. liefern 4 679,314 m.) Die Entfernung ist schon über $4^2/_3$ km.



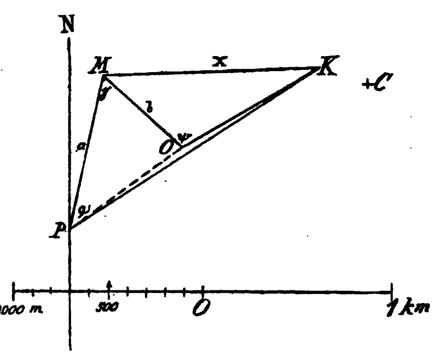
Figur 59
in 1/80000 der wirklichen Gröfse.

9) Entfernung des Kreuzbergdenkmals vom Rathausturme in Berlin. (Nr. 15 und 5 der Tabelle.) In der Figur 59 bezeichnet K den Fufspunkt der bis zur wagerechten Grundebene verlängerten Höhe des Kreuzbergdenkmals und R den der ebenso herabgeführten Achse der Fahnenstange auf dem Rathausturme. Die Beobachtungen an den Endpunkten der Standlinie LS ergaben $\angle KSL\ \alpha = 32^0\ 12'\ 52^1/_2{}''$, $\angle RSL\ \beta = 20^0\ 41'\ 35''$, $\angle RLS\ \gamma = 18^0\ 19'\ 20''$ und $\angle KLS\ \delta = 127^0\ 20'\ 37^1/_2{}''$. Wie grofs ist demnach, mit $\log LS = 3{,}28\,515$, der Abstand KR?

Ergebnis. Aus $\varphi\ x_1 = 3\,885{,}2$ m und aus $\psi\ x_2 = 3\,885{,}1$ m; Mittelwert $KR = 3\,885{,}15$ m. [Wer beim fünfstelligen log LS in der letzten Bruchstelle (nach dem Ergebnis **6**, 4, 1) eine 7 nimmt, erhält 17 cm mehr.] (Siebenstellige Logar. liefern $KR = 3\,885{,}1535$ m.) Der Abstand der Punkte K und R beträgt 3 885 m. (Vergl. **1**, 9, 9 am Ende.)

Beispiele zur Snelliusschen Aufgabe.

10) Abstand des Turmes der Königstädtischen höheren Lehranstalten von der Marienkirche in Berlin. Mit einem Sextanten, dessen Vernier die Gröfse der Winkel bis auf 10 Sekunden angiebt, wurde für den Endpunkt K der Achse des Turmes gefunden $\angle MKP\ \alpha = 30^0\,27'\,0''$ und $\angle MKO\ \beta = 27^0\,39'\,50''$. Nach den Ergebnissen (siebenstelliger Logarithmen) in **6**, 2, 1) und 2) ist $MP = a = 833{,}58$ m, $MO = b = 564{,}55$ m und $\angle OMP = \gamma\ 58^0\,20'\,21''$. Man berechne den Abstand KM. — Zur Probe wurde noch von einem Standpunkte K_1 aus beobachtet, welcher 98 cm weiter von der Marienkirche entfernt ist. Dort war $\angle MK_1P$ nur $\alpha_1 = 30^0\,25'\,50''$ und $\angle MK_1O$ hatte sich vermindert auf $\beta_1 = 27^0\,38'\,10''$. Man führe diese Rechnung neben der ersten zugleich mit ihr aus.



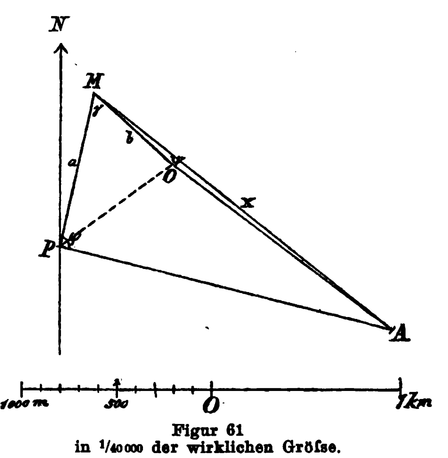
Figur 60
in 1/40000 der wirklichen Gröfse.

Ergebnis. $KM = x = 1167{,}0$ m und für den 98 cm weiter entfernten Standpunkt 1167,95 m. Man sieht, wie genau das Snelliussche Verfahren durch Messen der Winkel α und β den Standort bestimmt, vorausgesetzt, dafs die drei Gröfsen des Grunddreiecks MOP ganz richtig sind. Die Achse des Turmes der Königstädtischen höheren Lehranstalten hat von der Höhe der Marienkirche einen Abstand von 1167 m.

11) Entfernung des Turmes der Markuskirche von der Marienkirche in Berlin. Auf dem Turme der Markuskirche befand sich der Theodolit an der Ost-Ecke um $d = 3{,}19$ m hinter dem Mittelpunkte, so dafs man über die Mitte der Deckfläche hin zur Marienkirche sah. In Figur 60 bezeichnet C in der Grundebene den Lotfufspunkt des Standortes. Dreimaliges Messen lieferte $\angle MCP\ \alpha = 28^0\,13'\,30''$ und $\angle MCO\ \beta = 20^0\,36'\,0''$. Man berechne hieraus mittels $MP = a = 833{,}58$ m, $MO = b = 564{,}55$ m und $\angle PMO = \gamma = 58^0\,20'\,21''$ den Abstand der Achse des Turmes von der Höhe der Marienkirche.

Ergebnis. $x - d = 1405{,}45$ m $- 3{,}19$ m $= 1402{,}26$ m. Der Fufspunkt der Höhe der Marienkirche hat von dem der Achse des Turmes der Markuskirche 1402 m Abstand.

12) Entfernung von der Marienkirche bis zur Andreaskirche in Berlin. Im Turme der Andreaskirche stand

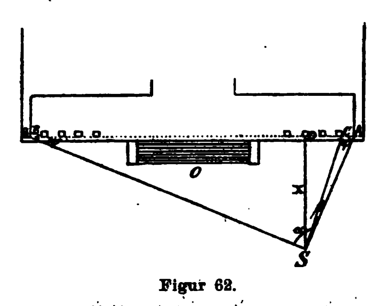


Figur 61
in 1/40000 der wirklichen Gröfse.

der Theodolit $d = 1{,}47$ m vor der Höhe des Turmes am geöffneten Fenster und lieferte, wenn der senkrecht unter seinem Mittelpunkte in der wagerechten Grundebene liegende Punkt in Figur 61 mit A bezeichnet wird, für die geradeaus erblickte Marienkirche $\angle MAP\ \alpha = 24^0\ 27'\ 30''$ und $\angle MAO\ \beta = 3^0\ 23'\ 15''$. Man berechne hieraus mittels $MP = a = 833{,}58$ m, $MO = b = 564{,}55$ m und $\angle OMP = \gamma = 58^0\ 20'\ 21''$ den Fufspunktsabstand der Höhen der Andreas- und Marienkirche.

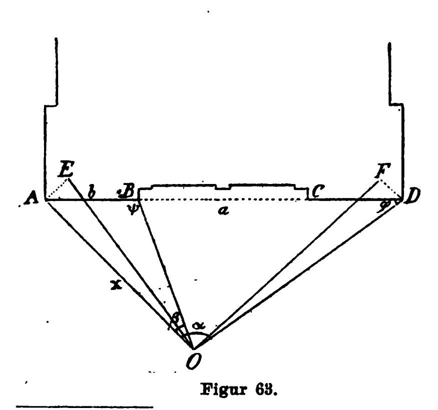
Ergebnis. $y = x + d = 2012{,}59 \text{ m} + 1{,}47 \text{ m} = 2014{,}06$ m. Der Fufspunktsabstand der Höhen beider Kirchen beträgt 2 014 m. Die Luftlinie von der Marien- zur Andreaskirche ist also gerade 2 km.

13) Höhe des Museums am Lustgarten in Berlin. In der Vorhalle des Museums beträgt die Entfernung von der westlichen Seitenwand B bis zur Grundfläche der letzten Säule C (einschliefslich) $BC = a = 79{,}280$ m und von dieser bis zur östlichen Seitenwand A $AC = b = 2{,}707$ m. In einem im Lustgarten mehr nach der Ostseite gewählten Standpunkte S wurden die Grundwinkel BSC $\alpha = 55^0\ 22^1/_4'$ und $ASC\ \beta = 2^0\ 39^1/_2'$ gemessen, und die Richtung zu dem gerade vor dem Beobachter befindlichen Punkte der obersten Kante des Gebäudes, auf welcher die Adler sitzen, hatte den Steigungswinkel $\gamma = 17^0\ 38'$, dessen Scheitel S in einer Höhe von $h = 1{,}010$ m über der Erweiterung der Ebene der Granitplatten O vor der Freitreppe des Museums sich befand. — Für eine zweite Berechnung des Abstandes SD ist statt der ersten Strecke die Entfernung B_1C von der ersten bis zur letzten Säule (beide einschliefslich)*) $a_1 = 76{,}554$ m mit dem Grundwinkel $B_1SC\ \alpha_1 = 54^0\ 24^3/_4'$ zu nehmen. — Wie hoch über der Grundebene O ist die oberste Kante der Vorderseite des Museums und wie grofs sind die Säulen, da für die gerade vor dem Beobachter stehende die Richtung zur obersten Kante den Steigungswinkel $\delta = 14^0\ 18'$ und die zur untersten Kante $\varepsilon = 2^0\ 28'$ hatte?



Figur 62.

Ergebnis. Für die Höhe des Museums ergiebt sich $y_1 = 19{,}470$ m und $y_2 = 19{,}467$ m, und für die Gröfse der Säulen $z_1 = 12{,}301$ m und $z_2 = 12{,}300$ m. Das Museum ist 19,47 m und die Säulen sind 12,30 m hoch. Nebenbei findet man, dafs der Fufsboden der Säulenhalle 3,512 m über dem Bürgersteige vor der Freitreppe ist. (Das ist etwas mehr, als die Höhe eines Wohnzimmers.)



Figur 63.

14) Höhe der Werderschen Kirche in Berlin. Die Vorderseite der Werderschen Kirche hat eine Grundlinie AD von $a = 20{,}350$ m Länge; davon kommt auf die Breite AB und CD jedes der beiden Türme die Strecke $b = 6{,}185$ m. Die Türme haben keine Spitzen, sie sind oben flach. Die Lotfufspunkte E und F der äufseren Ecken der

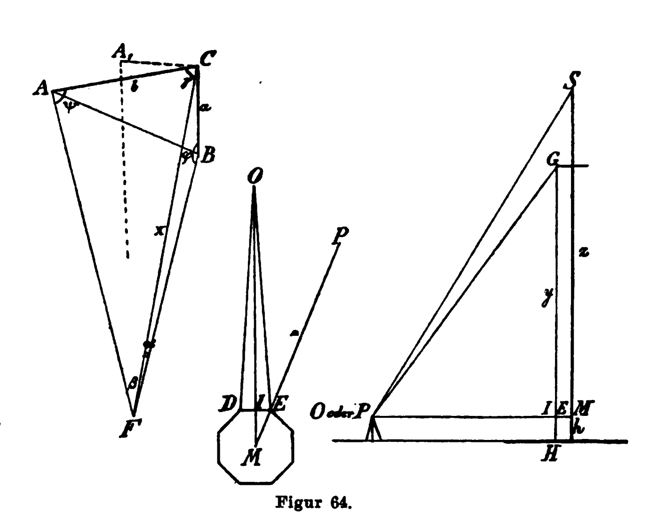
*) Dreimaliges Messen der Strecke B_1C ergab 76,541 m, 76,567 m und 76,555 m.

Deckflächen liegen im Grundrifs hinter AB und CD, so dafs $\angle EAB$ und FDC 45^0 betragen. Im Standpunkte O vor der Kirche war $\angle AOD$ $\alpha = 33^0\, 5^1/_2{}'$, $\angle AOB$ $\beta = 9^0\, 56^1/_2{}'$, $\angle AOE = 0^0\, 56'$, $\angle DOF = 0^0\, 46'$ und der Steigungswinkel der Richtung zur westlichen Ecke (über E) $\delta = 46^0\, 25^1/_2{}'$ und der zur östlichen (über F) $\varepsilon = 46^0\, 16'$, deren Scheitelpunkt $h = 1{,}300$ m hoch über der Ebene vor dem Kircheingange sich befand. Man berechne hieraus die beiden in E und F stehenden Höhen der Türme.

Ergebnis. Für E $y_1 = 39{,}089$ m und für F $y_2 = 39{,}020$ m. (Siebenstellige Logarithmen liefern ganz dasselbe.) Die Höhe der Werderschen Kirche ist wenig über 39 m.

Anmerk. Die Verschiedenheit der Ergebnisse kann hauptsächlich herrühren von geringer Unsicherheit in der Richtung OB, die nicht so scharf zu beobachten war, wie die nach den sich deutlich vom Hintergrunde abhebenden äufseren Rändern bei A und D. In dem hier vorliegenden Falle (wo der Winkel zwischen den Strecken a und b null ist) schneiden sich die über ihnen als Sehnen zu beschreibenden Kreisbogen, welche α und β fassen, (Figur 53 und 54 in **6**, 3.) unter sehr spitzem Winkel. (Anmerk. zu **6**, 3.) Bei zu kleinem Werte von β verlegt der Bogen des zu kleinen Winkels den Schnitt auf dem zu α gehörigen Bogen rechts neben den wahren Standort und darum mufs der beobachtete Steigungswinkel den rechts stehenden Turm durch die Annäherung zu klein und den linken durch den vergröfserten Abstand zu grofs ergeben.

15) Höhe des Rathausturmes in Berlin. Weil das Messen einer ausreichend langen Standlinie in der Nähe des Rathauses unausführbar ist, wurde zur Bestimmung der grofsen Höhe eine nahe davor stehende andere Höhe benutzt. Es wurde auf dem Rathausturme von dem mit dem vergoldeten Geländer umgebenen Standorte aus das Fernrohr des Theodoliten auf die Fufspunkte A, B, C von drei Laternen auf dem Neuen Markte gerichtet. Es ergab sich, wenn F den Fufspunkt der vom Standorte auf die wagerechte Grundebene gefällten Senkrechten bezeichnet, $\angle BFC$ $\alpha = 1^0\, 2'$ und $\angle AFC$ $\beta = 11^0\, 50'\, 30''$. Das dreimalige Messen der Seiten des Dreiecks ABC lieferte für BC $a = 35{,}076$ m, für AC $b = 58{,}172$ m und der Zwischenwinkel ACB, $\gamma = 80^0\, 12'\, 32''$, wurde in der Aufgabe **5**, 6, 13) berechnet. Hieraus findet man für den Punkt F, welcher innerhalb des Winkels ACB sich befindet, die Abstände FC und FA. Doch werde FC nur aus dem Winkel $FAC = \psi$ bestimmt, nicht auch aus FBC, weil dieser Winkel φ bei fünfstelligen Logarithmen ungenaue



Figur 64.

Werte giebt.*) Aus den Abständen FC und FA geht dann die Hilfshöhe y des oberen Randes vom vergoldeten Geländer über der Grundebene durch den Senkungswinkel der Richtung nach C $\gamma_1 = 15^0\,41^1/_2{}'$ und nach A $\alpha_1 = 16^0\,21^1/_2{}'$, deren Scheitelpunkt sich um $t = 0{,}150$ m über dem Geländerrande befand, leicht hervor, nachdem aufser t noch in Abzug gebracht ist $h_C = 0{,}102$ m und $h_A = 0{,}355$ m; denn um so viel liegen die Punkte C und A unter der Grundebene. — Bei der andern Messung trat der Fufspunkt A_1 einer andern Laterne statt A ein, so dafs nun zu rechnen ist mit $\alpha = 1^0\,2'$, $\beta = 6^0\,22'\,30''$, $a = 35{,}076$ m, $b = 31{,}395$ m, $\gamma = 94^0\,11'\,55''$; $\gamma_1 = 15^0\,41^1/_2{}'$, $\alpha_1 = 15^0\,42^1/_4{}'$, $t = 0{,}150$ m, $h_C = 0{,}102$ m und $h_{A1} = 0{,}197$ m. — Aus diesen beiden Messungen erhält man drei Werte für die Höhe y. Um aus der Mittelgröfse derselben, $y = 79{,}036$ m, die gesuchte Höhe z der Spitze der eisernen Fahnenstange auf dem Rathausturme über der Grundebene zu bestimmen, wurde in einem auf dem Neuen Markte gerade vor dem Rathausturme gewählten Standorte O der Steigungswinkel der Richtung zur Mitte des Geländerrandes G $\delta = 22^0\,12'$ und der zur Spitze S der Fahnenstange $\varepsilon = 25^0\,28^1/_2{}'$ gemessen, wobei der Scheitelpunkt dieser Winkel $h = 1{,}023$ m über derselben Grundebene H war. Der äufsere Rand des vergoldeten Geländers ist ein regelmäfsiges Achteck von $s = 2{,}177$ m Seite, durch dessen Mittelpunkt die abwärts verlängerte Achse der Fahnenstange geht. Die Ablotung des Achtecks auf die durch den Beobachtungspunkt O gehende wagerechte Ebene ist in Figur 64 gezeichnet. — Die Gegenmessung hierzu wurde von einer Stelle P der Strafse „Hoher Steinweg" ausgeführt, die so gewählt war, dafs ein Eckpunkt des Geländerachtecks vor der Verlängerung der Fahnenstange gesehen wurde. Hier war der Steigungswinkel der Richtung zum Eckpunkte G $\delta = 33^0\,8'$ und der zur Stangenspitze S $\varepsilon = 37^0\,4'$, deren Scheitel $h = 1{,}535$ m hoch über der Grundebene war. Diese ist der Bürgersteig der Königstrafse vor dem Rathause an der Mündung der Jüdenstrafse. Wie hoch ist demnach der Rathausturm bis zur Spitze der Fahnenstange?

Ergebnis. Man erhält aus der ersten Messung $y_C = 79{,}050$ m und aus der zweiten $y_C = 79{,}051$ m; bei der ersten $y_A = 79{,}022$ m, bei der zweiten $y_{A1} = 79{,}034$ m. Diese drei Werte geben die Mittelgröfse $y = 79{,}036$ m. Der obere Rand des vergoldeten Geländers an der Spitze des Rathausturmes ist 79,036 m über der Grundebene. Aus dieser Hilfshöhe (die deshalb nicht abgerundet angegeben wird) ergiebt sich die ganze Höhe des Rathausturmes aus der Beobachtung in O $z_O = 93{,}354$ m und aus der in P $z_P = 93{,}375$ m. Demnach befindet sich die Spitze der Fahnenstange auf dem Berliner Rathausturme 93,36 m über dem Bürgersteige in der Königstrafse.

Zugabe. Höhe der Marienkirche in Berlin. Aus der Höhe des Rathausturmes läfst sich schnell die der Marienkirche bestimmen durch eine auf dem Umgange am Petriturme ausgeführte Winkelmessung. Dort hatte die Richtung zur Spitze der Fahnenstange des Rathausturmes den Steigungswinkel $\alpha = 3^0\,37^1/_4{}'$ und die zur

*) Der Winkel FBC müfste aus dem Dreieck ABC und, bei der andern Messung, aus $\triangle\, A_1BC$ gleich grofs gefunden werden. Siebenstellige Logarithmen liefern aus ABC $\varphi = 171^0\,39'\,17{,}75''$ und aus A_1BC $171^0\,39'\,17{,}15''$, also nur um 0,6" verschieden. Folglich ist die Messung gut. Fünfstellige Logarithmen aber geben φ aus $\triangle\, ABC$ um 2" zu grofs und aus $\triangle\, A_1BC$ um 2" zu klein. Diese geringe Ungenauigkeit, welche gewöhnlich ganz unbeträchtlich ist, übt hier erheblichen Einflufs, weil der kleine Sinus stark veränderlich ist. Die durch deren Logarithmen in FC gebrachte Abweichung von 4,6 cm, welche bei siebenstelligen Logarithmen nur 5,6 mm beträgt, würde für die zu berechnende Höhe falsche Werte geben.

Spitze der Marienkirche $\beta = 2^0\ 31^1/_2'$. Der Abstand des Petriturmes von der Höhe des Rathausturmes ist $a = 650{,}58$ m (**6**, 5, 7) und von der Marienkirche $b = 833{,}58$ m (**6**, 2, 1). (Der Standpunkt zur Seite des Turmes lag so, dafs von diesen Entfernungen nichts abzuziehen ist.) Wie hoch ist demnach die Spitze der Marienkirche über der erweiterten Ebene des Bürgersteiges in der Königstrafse?

Ergebnis. Die Höhe der Marienkirche beträgt 88,95 m.

---

7. Glied. Anhänge.

A. Newtons Reihen für Sinus und Kosinus.

B. Der Moivresche Satz nebst Lösung der reinen Gleichung *n*ten Grades.

C. Auflösung der Gleichungen dritten Grades.

A. Hilfssätze 1 bis 5.

Eine aus positiven und negativen Gliedern zusammengesetzte Summe kann gleich Null werden entweder dadurch, dafs eine genau hinreichende Menge von Gliedern negativ ist, oder dadurch, dafs jedes Glied selbst null ist. Der folgende Satz sagt, dafs unter der festgesetzten Bedingung bei der für ihn aufgestellten Summe nur der letzte Fall möglich ist.

1. Soll eine nach steigenden Potenzen der Zahl x fortschreitende Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots\ldots$$

für jeden Wert von x gleich Null sein, so mufs jede der Zahlen $a, b, c, d, \ldots\ldots$ Null sein.

Beweis. Zunächst möge die Reihe nur aus zwei Gliedern bestehen. Es soll für jeden Wert von x

$a + bx = 0$ sein, also für einen andern Wert y auch

$a + by = 0$ sein. Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab,

so folgt $b(x - y) = 0$. Ein Produkt ist null, wenn wenigstens einer der Faktoren null ist. Da y eine andere Zahl als x sein sollte, so ist der zweite Faktor $(x - y)$ nicht null. Also mufs der erste Faktor $b = 0$ sein. Und nun folgt aus $a + 0 \cdot x = 0$ auch $a = 0$.

Jetzt bestehe die Reihe aus drei Gliedern. Es soll für jeden Wert von x

$a + bx + cx^2 = 0$ sein; also für eine andere Zahl y

$a + by + cy^2 = 0$ und für noch eine andere Zahl z

$a + bz + cz^2 = 0$. Durch Abziehen der zweiten von der ersten Gleichung

folgt $b(x - y) + c(x^2 - y^2) = 0$ oder $(x - y)[b + c(x + y)] = 0$. Der erste Faktor ist nicht null; also mufs

$b + c(x + y) = 0$ sein. Ebenso kommt durch Abziehen der dritten von der ersten Gleichung

$b + c(x + z) = 0$ und wenn man wieder abzieht

$c(y - z) = 0$. Da y und z verschiedene Zahlen sein sollten, ist $(y - z)$ nicht null, und es mufs $c = 0$ sein. Damit giebt

$b + 0 \cdot (x + y) = 0$ auch $b = 0$ und die erste Gleichung

$a + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 0$ auch $a = 0$.

Hat die gegebene Reihe vier Glieder

$a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$, so ist sie mit vier verschiedenen Zahlen aufzustellen. Das Abziehen giebt

$$b + c(x+y) + d(x^2 + xy + y^2) = 0$$
$$b + c(x+z) + d(x^2 + xz + z^2) = 0,\text{ woraus}$$
$$c(y-z) + d[x(y-z) + (y^2 - z^2)] = 0$$

$c + d[x + y + z] = 0$ und die vierte Gleichung mit der Zahl u statt z bringt

$$c + d[x + y + u] = 0;\text{ daher}$$

$d[z - u] = 0$, mithin $d = 0$ und, wenn man in den Gleichungen zurückgeht, $c = 0$, $b = 0$, $a = 0$.

So kann man beliebig weit fortfahren. Stets läfst sich $(x - y)$ als Faktor herausziehen aus dem Unterschiede gleich hoher Potenzen, $(x^n - y^n)$. Denn durch Ausmultiplizieren findet man

$$(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})(x - y) = x^n - y^n.$$

Somit ist erwiesen, dafs eine Reihe, wenn sie für jeden Wert von x gleich Null sein soll, lauten mufs

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots\ldots$$

Dieser Satz wird zum Beweise des folgenden wichtigen Lehrsatzes gebraucht.

2. Sollen zwei nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihen für jeden Wert von x einander gleich sein,

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

so müssen die Vorzahlen gleich hoher Potenzen gleich sein; also

$$A = a,\ B = b,\ C = c,\ D = d, \ldots.$$

Beweis. Bringt man alle Glieder von rechts nach links, so entsteht die Reihe

$$(a-A) + (b-B)x + (c-C)x^2 + (d-D)x^3 + \ldots. = 0$$

welche nach Voraussetzung für jeden Wert von x gleich Null ist. Daher mufs nach dem vorhergehenden Satze

$$a - A = 0,\ b - B = 0,\ c - C = 0, \ldots.$$

also $A = a,\quad B = b,\quad C = c, \ldots.$ sein.

Anwendung. Den Ausdruck zweiten Grades, $3 + 2x - 8x^2$, in ein Produkt zweier Faktoren ersten Grades zu zerlegen.

Sind a, b, c, d zu bestimmende Zahlen, so soll werden

$$3 + 2x - 8x^2 = (a + bx)(c + dx)$$

welchen Wert x auch haben möge. Multipliziert man die Klammern aus, so soll

$$3 + 2x - 8x^2 = ac + (bc + ad)x + bd\,x^2$$

für jeden Wert von x sein; also mufs

$$ac = 3,\quad bc + ad = 2,\quad bd = -8$$

sein. Setzt man $d = -\dfrac{8}{b}$ und $c = \dfrac{3}{a}$ in die mittlere Gleichung ein, so hat man

$$3\frac{b}{a} - 8\frac{a}{b} = 2,\text{ oder, mit } \frac{b}{a} \text{ multipliziert,}$$

$$3\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{b}{a} - 8 = 0,\text{ woraus hervorgeht}$$

$$1)\ b = 2a \qquad 2)\ b = -{}^4/_3\,a;$$

dies macht 1) $d = -\dfrac{4}{a}$ und 2) $d = \dfrac{6}{a}$.

Setzt man die Ausdrücke in die Ansatzgleichung ein, so hat man

$$3 + 2x - 8x^2 = (a + 2ax)\left(\frac{3}{a} - \frac{4}{a}x\right) = (1 + 2x)(3 - 4x)$$

oder

$$= (a - {}^4/_3 ax)\left(\frac{3}{a} + \frac{6}{a}x\right) = (3 - 4x)(1 + 2x)$$

also das erste Ergebnis mit Umstellung der Faktoren. Das Auflösen der Klammern bestätigt die Richtigkeit der gefundenen Zerlegung.

3. Über den Ausdruck $\frac{0}{0}$.

In der abschliefsenden Betrachtung zur Aufgabe **6**, 5, 1) zeigte sich, dafs $\cos {}^1/_2 ab$ und $\sin {}^1/_2 ab$ für die beiden besonderen Fälle $a = c$, $b = d$ und $a = d$, $b = c$ in die Form $\frac{0}{0}$ übergehen und keinen Wert für den Winkel ab liefern. Der Winkel mufste unbestimmt bleiben, weil im ersten der beiden besonderen Fälle jede Raute mit den Seiten $a = c$, $b = d$ die Gegenwinkel gleich hat, und im andern in jedem gleichschenkligen Vierecke mit $a = d$, $b = c$ die Gegenwinkel ab und cd gleich sind. Hier gab die Mathematik mit dem Ausdrucke $0 : 0$ an, dafs die Aufgabe für diesen Fall unbestimmt und selbstverständlich sei.

Wird aber die Aufgabe für den besonderen Fall nicht unbestimmt, so hat der Ausdruck $\frac{0}{0}$ einen ganz bestimmten Wert, der auf anderem Wege erst noch zu ermitteln ist. Zum Beispiel bei der aus n Gliedern bestehenden Summe

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + \ldots + ab^{n-2} + ab^{n-1}$$

welche die Eigenschaft hat, dafs der Bruch aus jedem Gliede und dem vorhergehenden $= b$ ist (weshalb sie eine Bruchreihe heifst), findet man den Wert der Summe, wenn man die Gleichung mit b multipliziert, und, im Falle $b < 1$ ist, die Gleichung bs von der Gleichung s abzieht,

$$s = \frac{1 - b^n}{1 - b} \cdot a$$

umgekehrt aber, wenn $b > 1$ ist; doch geht das Ergebnis $s = \frac{b^n - 1}{b - 1} \cdot a$ in die erste Form über, wenn man den Zähler und Nenner mit -1 multipliziert; so dafs, mag b kleiner oder gröfser als 1 sein, stets ist

$$s = \frac{1 - b^n}{1 - b} \cdot a.$$

Für b gleich 1 wird

$$s = \frac{0}{0} \cdot a.$$

Die Aufgabe ist in diesem Falle nicht unbestimmt; die Summe ist

$$s = a + a + a + a + \ldots + a + a.$$

Da sie aus n Gliedern besteht, wird $s = n \cdot a$. Also ist

in diesem Falle $\frac{0}{0} = n$.

Hatte die Reihe 7 Glieder, so ist $\frac{0}{0} = 7$; bestand sie aus 89 Gliedern, so ist $\frac{0}{0}$ keine andere Zahl als 89; also in jedem Falle ein ganz bestimmter Wert.

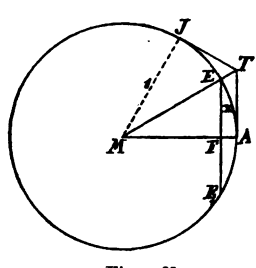
4. Allgemeiner, als das eben behandelte Beispiel, ist die Gleichung, welche aus der am Ende von No. 1 stehenden hervorgeht,

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}.$$

Sie hat rechts n Glieder. Läfst man y so grofs werden wie x, so ergiebt sie

$$\frac{x^n - x^n}{x - x} = \frac{0}{0} = nx^{n-1}.$$

5. In dem mit dem Längenmafse beschriebenen Kreise wurde der Bogen $AE = x$ kleiner als 90^0 genommen. Die vom Endpunkte gefällte Senkrechte EF, deren Mafszahl den Wert $\sin x$ liefert, ist bis zum Schnitt in E_1 verlängert. Weil der auf der Sehne EE_1 senkrechte Halbmesser MA die Sehne und den Bogen halbiert, ist die Mafszahl von EFE_1 $2\sin x$ und die von EAE_1 $2x$. Da der gerade Weg EFE_1 der kürzeste von E nach E_1 ist, so hat man $2\sin x < 2x$, also



Figur 65.

$$\sin x < x.$$

Die Verlängerung des Halbmessers ME schneidet von der an A gelegten Berührungslinie die Strecke AT ab, deren Mafszahl $\operatorname{tg} x$ heifst. Von T ist die zweite Berührungslinie TJ an den Kreis gezogen und man hat aus dem gleichschenkligen Viereck $ATJM$ den Grund für $JE = EA$. Von den Wegen AEJ und ATJ ist der zweite der gröfsere Umweg, $2x < 2\operatorname{tg} x$, also

$$x < \operatorname{tg} x.$$

Wenn man $\sin x = \sin x = \sin x$
durch die Ergebnisse $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dividiert, so folgt

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Läfst man den Bogen x kleiner werden, so nähert sich die untere Grenze, $\cos x$, der fest stehenden oberen Grenze 1 und wird auch zu 1 bei $x = 0$. Da ist

$$1 = \frac{\sin 0}{0} = 1.$$

Also beim Verhältnis

$$\frac{\text{Sinus}}{\text{Bogen}} \text{ ist } \frac{0}{0} = 1.$$

6. Um für jeden beliebigen Bogen x den Sinus und den Kosinus auf bequeme Weise berechnen zu können, stellte sich **Newton***) die Aufgabe:

Für $\sin x$ und $\cos x$ Reihen zu entwickeln, welche fortschreiten nach den Potenzen der Mafszahl x vom Bogen mit dem Halbmesser 1.

Ausführung. Bezeichnen a, b, c, d, ... Zahlen, welche durch die Untersuchung zu bestimmen sind, so soll werden

$$\sin x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots.$$

Die vielen Zahlen a, b, c, d, ... sollen so bestimmt werden, dafs sie für jeden positiven und negativen Wert von x gelten. Zunächst für $x = 0$:

$$\sin 0 = a, \text{ also } a = 0.$$

Es fordert $x = 0$, dafs die Reihe kein von x freies Glied besitze; sie mufs lauten

$$\sin x = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots.$$

*) Isaak Newton, geb. am 25. Dez. 1642, gest. am 20. März 1727 in London.

Da sie auch für negative Bogen gelten soll, so werde nun $(-x)$ für x geschrieben:

$$\sin(-x) = -bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + - + - \dots.$$

Dieser Ausdruck und der für $\sin x$ selbst werden eingesetzt in die Gleichung (2, 6)

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$-bx+cx^2-dx^3+ex^4-fx^5+gx^6-+\dots = -bx-cx^2-dx^3-ex^4-fx^5-gx^6--\dots.$$

Dadurch hat man zwei Reihen, die für jeden Wert von x einander gleich sein müssen; also sind, nach Nr. 2, die Vorzahlen aller gleich hohen Potenzen von x gleich:

$$+c = -c \text{ giebt } 2c = 0, \quad c = 0;$$
$$+e = -e \qquad 2e = 0, \quad e = 0;$$
$$+g = -g \qquad 2g = 0, \quad g = 0; \text{ und so fort:}$$

alle Vorzahlen der Glieder mit geraden Gradzahlen müssen $= 0$ sein.

Die Reihe für $\sin x$ schreitet nach Potenzen mit ungeraden Gradzahlen fort:

$$\sin x = bx + dx^3 + fx^5 + hx^7 + kx^9 + \dots.$$

Von der durch x dividierten Reihe

$$\frac{\sin x}{x} = b + dx^2 + fx^4 + \dots.$$

fordert $x = 0$ $\quad \dfrac{\sin 0}{0} = b$, dafs $b = 1$ sei nach Nr. 5;

also

$$\text{I.} \quad \sin x = x + dx^3 + fx^5 + hx^7 + kx^9 + \dots.$$

Die Reihe lautet für einen andern Bogen y

$$\sin y = y + dy^3 + fy^5 + hy^7 + ky^9 + \dots.$$

Zieht man diese von jener ab, so folgt

$$2\cos {}^1/_2(x+y)\sin {}^1/_2(x-y) = (x-y) + d(x^3-y^3) + f(x^5-y^5) + h(x^7-y^7) + \dots.$$

und wenn man sie durch $(x-y)$ dividiert und die 2 in den Nenner bringt, so hat man

$$\cos {}^1/_2(x+y)\cdot\frac{\sin {}^1/_2(x-y)}{{}^1/_2(x-y)} = 1 + d\cdot\frac{x^3-y^3}{x-y} + f\cdot\frac{x^5-y^5}{x-y} + h\cdot\frac{x^7-y^7}{x-y} + k\frac{x^9-y^9}{x-y} + \dots.$$

Im links stehenden Bruche ist ein Sinus durch seinen Bogen dividiert. Dieser Bruch wird, wenn man y gleich x werden läfst, nach Nr. 5 zu 1, und die Werte der rechts stehenden Brüche für $y = x$ kennt man aus Nr. 4:

$$\text{II.} \quad \cos x = 1 + 3dx^2 + 5fx^4 + 7hx^6 + 9kx^8 + \dots.$$

Diese Reihe lautet für den Bogen y

$$\cos y = 1 + 3dy^2 + 5fy^4 + 7hy^6 + 9ky^8 + \dots.$$

Zieht man diese von jener ab, so bekommt man, wenn man links $\cos x - \cos y$ als $-(\cos y - \cos x)$ nimmt, (Formel 21 in 3, 5)

$$-2\sin {}^1/_2(x+y)\sin {}^1/_2(x-y) = 3d(x^2-y^2) + 5f(x^4-y^4) + 7h(x^6-y^6) + \dots.$$

und, wenn man durch $-(x-y)$ dividiert,

$$\sin {}^1/_2(x+y)\cdot\frac{\sin {}^1/_2(x-y)}{{}^1/_2(x-y)} = -3d\frac{x^2-y^2}{x-y} - 5f\frac{x^4-y^4}{x-y} - 7h\frac{x^6-y^6}{x-y} - 9k\frac{x^8-y^8}{x-y} - \dots$$

Aus dieser Gleichung geht für $y = x$ hervor

$$\text{III.} \quad \sin x = -2\cdot 3dx - 4\cdot 5fx^3 - 6\cdot 7hx^5 - 8\cdot 9kx^7 - \dots.$$

In III und I hat man zwei Reihen, die für jeden Wert von x einander gleich sind,

$$-2\cdot 3dx - 4\cdot 5fx^3 - 6\cdot 7hx^5 - 8\cdot 9kx^7 - \dots = x + dx^3 + fx^5 + hx^7 + \dots.$$

also mufs sein

$$-2 \cdot 3d = 1, \qquad d = -\frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$-4 \cdot 5f = d, \qquad f = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$-6 \cdot 7h = f, \qquad h = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$-8 \cdot 9k = h, \qquad k = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$$

und so immer weiter.

Von den als Nenner auftretenden Produkten der ganzen Zahlen (vorn kann 1 mit hinzugesetzt werden) braucht man nur anzugeben, bis wie weit sie gehen. Man spricht bei dem von k „bis 9“ und schreibt 9!

Setzt man für die eingeführten Buchstaben die gefundenen Werte in I und II ein, so hat man

Newtons Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + - \dots$$

Da hinter 45^0 die Werte von Sinus und Kosinus sich wiederholen, so braucht man nur $x < {}^1/_4\,\pi$, $x < 0{,}7854$ zu nehmen. Die Potenzen des echten Bruches werden immer kleiner und sind durch die immer stärker wachsenden Nenner zu dividieren. Daher werden die Glieder der Reihen ziemlich bald so klein, dafs die folgenden auf die zu berechnende Anzahl der Bruchstellen von $\sin x$ oder $\cos x$ gar keinen Einflufs mehr haben und unberechnet fortbleiben.

1. Beispiel. $\sin 6^0\,36'$ durch verkürztes Multiplizieren zu berechnen auf 6 Bruchstellen.

Ausführung. Im Kreise vom Halbmesser 1 sind

$$180^0 = \pi = 3{,}1416$$

also

$$6^0 = 0{,}104\,720$$
$$0{,}6^0 = 0{,}010\,472$$
$$x = 0{,}115\,192.$$

Da die erste Bruchstelle eine niedrige Zahl ist, braucht man zur Berechnung des x^2 von x nur 4 Bruchstellen zu nehmen. Es wird $x^2 = 0{,}01\,327$ und $\frac{x^2}{3!} = 0{,}00\,221$; daher $\frac{x^3}{3!} = 0{,}000\,254$.

Weil $\frac{x^3}{5!} = 0{,}000\,013$ und $x^2 = 0{,}01$ ist, so wird $\frac{x^5}{5!} = 0{,}000\,000\,1$, hat also auf 6 Bruchstellen keinen Einflufs, und die folgenden Glieder um so weniger. Demnach

$$x = 0{,}115\,192$$
$$\frac{x^3}{3!} = 0{,}000\,254$$
$$\sin x = 0{,}114\,938.$$

Schlägt man zu dieser Zahl den Logarithmus auf, so findet man

$$\log \sin 6^0\ 36' = 9{,}06\,046 - 10,$$ wie er in der Tafel steht.

2. **Beispiel.** cos $0^0\ 3'\ 27''$ auf 9 Bruchstellen zu berechnen.

Ausführung. Es ist $0^0\ 3'\ 27'' = 0{,}0575^0$.

$$\pi : 60 = 0{,}314\,1593 : 6 = 0{,}052\,3599$$
$$1^0 = \pi : 180 = 0{,}017\,4533$$

für $0{,}0575^0$ also $x = 0{,}001\,003\,565.$

Das Glied $\frac{x^2}{2!} = 0{,}000\,000\,504$ allein giebt

$$\cos 0^0\ 3'\ 27'' = 0{,}999\,999\,496$$

dessen Logarithmus auf sieben Bruchstellen ist $9{,}999\,999\,8 - 10$, also in einer fünfstelligen Logarithmentafel noch nicht abweichend von log 1 angegeben werden kann.

3. **Beispiel.** sin $25^0\ 42'$ auf 6 Bruchstellen zu berechnen.

Ausführung. Der auf 7 Bruchstellen zu nehmende Wert der Länge von 1^0 giebt für $25{,}7^0$ $x = 0{,}448\,550$. Man findet $\frac{x^2}{3!} = 0{,}033\,533$. Dies wird mit x multipliziert (nicht umgekehrt, weil dabei wegen $3 \cdot 5$ auf 7 Bruchstellen gerechnet werden müfste.) Man erhält $\frac{x^3}{3!} = 0{,}015\,041$. Stets wird erst der Nenner besorgt; hier $\frac{x^3}{5!} = 0{,}000\,752$; hiermit wird $x^2 = 0{,}201$ multipliziert; giebt $\frac{x^5}{5!} = 0{,}000\,151$. Hieraus $\frac{x^5}{7!} = 0{,}000\,004$, liefert mit $x^2 = 0{,}2$ $\frac{x^7}{7!} = 0{,}000\,001$ und damit bricht die Berechnung ab. Es war

$$\begin{array}{rl|rl}
x &= 0{,}448\,550 & \frac{x^3}{3!} &= 0{,}015\,041 \\
\frac{x^5}{5!} &= 0{,}000\,151 & \frac{x^7}{7!} &= 0{,}000\,001 \\
\hline
S_1 &= 0{,}448\,701 & S_2 &= 0{,}015\,042 \\
S_2 &= 0{,}015\,042 & & \\
\hline
\sin x &= 0{,}433\,659. & &
\end{array}$$

Der Logarithmus dieses Bruches, $\log \sin 25^0\ 42' = 9{,}63\,715 - 10$ ist in Übereinstimmung mit der Angabe in der Logarithmentafel.

4. **Beispiel.** cos $42^0\ 15'$ auf 6 Bruchstellen zu berechnen.

Ausführung. 1^0, auf 7 Bruchstellen genommen, giebt $42^0 = 0{,}733\,039$ und $1/4^0 = 0{,}004\,363$, also für $42^0\ 15'$ $x = 0{,}737\,402$. Es wird

$$\begin{array}{rl|rl}
1 + \frac{x^4}{4!} &= 1{,}012\,319 & \frac{x^2}{2!} &= 0{,}271\,881 \\
\frac{x^8}{8!} &= 0{,}000\,002 & \frac{x^6}{6!} &= 0{,}000\,223 \\
\hline
S_1 &= 1{,}012\,321 & S_2 &= 0{,}272\,104 \\
S_2 &= 0{,}272\,104 & & \\
\hline
\cos x &= 0{,}740\,217. & &
\end{array}$$

Davon ist $\log \cos 42^0\ 15' = 9{,}86\,936 - 10$, wie er in der Tafel steht.

7. Über Kosinus, Sinus und Tangens sehr kleiner Winkel.

1) Bis zu welchem Winkel, von $0^0\,0'$ an, mufs in einer Tabelle, welche die Werte der Winkelfunktionen bis auf Millionstel angiebt, der Kosinus $= 1$ gesetzt werden?

Der letzte würde sein $\cos x = 0{,}999\,999\,5$, weil nach Fortlassen der 5 noch Erhöhung der vorangehenden Ziffer eintreten mufs, was ihn auf 1 bringt. Da in Newtons Reihen bei kleinen Bogen x die folgenden Glieder immer in einigen Bruchstellen weiter Nullen erhalten, so kommt die 5 in der siebenten Bruchstelle nur von dem zweiten Gliede $\frac{x^2}{2!}$ her. Es ist also x zu bestimmen aus

$$\frac{x^2}{2!} = 0{,}000\,000\,5.$$

Die Länge des Bogens ist $x = \sqrt{0{,}000\,001} = 0{,}001$.

Es sind π Längeneinheiten $= 180^0 = 10\,800'$, also eine $\frac{10\,800'}{\pi}$ und

$$x = 0{,}001 \text{ des Längenmafses ist } \frac{10{,}8'}{\pi} = 3{,}438' = 3'\,26''.$$

In der Tabelle, welche die Werte bis auf Millionstel angeben soll, mufs also stehen

$$\cos 0^0\,3'\,26'' = 1{,}000\,000$$
$$\cos 0^0\,3'\,27'' = 0{,}999\,999.$$

[Vergl. das zweite Beispiel in Nr. 6.]

2) Bis zu welchem Winkel stimmt der auf 6 Bruchstellen anzugebende Sinus noch mit dem Bogen ganz überein?

Hier mufs $\frac{x^3}{3!} < 0{,}000\,000\,5$ bleiben,

$$x < \sqrt[3]{0{,}000\,003}, \qquad x < 0{,}014\,422$$
$$x < 0^0\,49'\,35''.$$

In einer Berechnung, deren Genauigkeit nicht über **sechs** zuverlässige Ziffern hinauszugehen braucht, ist für den **Sinus** eines Winkels, der kleiner als $0^0\,49'\,35''$ ist, der **Bogen** zu nehmen; und bei einem, der kleiner als $0^0\,3'\,27''$ ist, auch für Tangens der **Bogen**.

B. Vorbereitungen 8 bis 10.

8. Erklärung. Eine Zahlengröfse, welche aus einem reellen und einem imaginären Gliede besteht, heifst eine zusammengesetzte Zahl, z. B. $3 - 4i$, wo $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet ist.

9. Lehrsatz. Sollen zwei zusammengesetzte Zahlen einander gleich sein: $a + bi = \alpha + \beta i$, so kann nur das Reelle dem Reellen, das Imaginäre dem Imaginären gleich sein: $a = \alpha$, $b = \beta$.

Bw. Aus der gegebenen Gleichung folgt $a - \alpha = (\beta - b)\,i$; also ist $(a - \alpha)^2 = -(\beta - b)^2$ und $(a - \alpha)^2 + (\beta - b)^2 = 0$. Die Summe zweier positiver Zahlen ist nur dann $= 0$, wenn jeder der Posten null ist. Daher mufs sein $a = \alpha$, $b = \beta$.

10. Von besonderer Eigenschaft sind die zusammengesetzten Zahlen von der Form

$$\cos\alpha \pm i \sin\alpha.$$

Beispiele: $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Für sie gilt der

11. Moivresche Satz*): Für jeden ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Wert von n ist

$$(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha.$$

Bw. Durch Auflösen der Klammern, in welchen entweder die oberen, oder die unteren Vorzeichen gelten sollen, erhält man

$$(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)(\cos\beta \pm i \sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) \pm i \sin(\alpha + \beta)$$

also eine zusammengesetzte Zahl derselben Form. Nach diesem Ergebnis kann man rechts sogleich das Produkt angeben, wenn man beide Seiten mit $\cos\gamma \pm i \sin\gamma$ multipliziert:

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)(\cos\beta \pm i\sin\beta)(\cos\gamma \pm i\sin\gamma) = \cos(\alpha+\beta+\gamma) \pm i\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

So kann man beliebig viele solcher Faktoren aneinander reihen und zusammenziehen. Sind es n Faktoren und wählt man, als besonderen Fall, jeden Bogen gleich α, so ergiebt sich

$$\text{I.} \qquad (\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha.$$

Da n hier eine Anzahl war, so bedeutet n nur eine positive ganze Zahl. Der Satz gilt aber auch, wenn n einen Bruch bedeutet. Es sei $n = \frac{p}{q}$, wo p und q positive ganze Zahlen sein sollen. Nach I wird, da q eine positive ganze Zahl ist, (und dieser Ansatz ist recht zu beachten!)

$$(\cos\frac{1}{q}\alpha \pm i \sin\frac{1}{q}\alpha)^q = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$$

potenziert man mit $\frac{1}{q}$ und schreibt die rechte Seite der Gleichung zuerst, so hat man

$$(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^{\frac{1}{q}} = \cos\frac{1}{q}\alpha \pm i \sin\frac{1}{q}\alpha$$

und wenn man dies mit der positiven ganzen Zahl p potenziert, (nach I)

$$\text{II.} \qquad (\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}\alpha + i \sin\frac{p}{q}\alpha$$

und das ist der Moivresche Satz mit $\frac{p}{q}$ statt n.

Ist nun $n = -m$, wo m eine ganze oder gebrochene Zahl sein kann, so wird wegen $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ im Nenner der rechten Seite nach I oder II

$$(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^{-m} = \frac{1}{\cos m\alpha \pm i \sin m\alpha}$$

und, wenn man den Bruch im Zähler und Nenner mit $\cos m\alpha \mp i \sin m\alpha$ multipliziert $= \frac{\cos m\alpha \mp i \sin m\alpha}{1}$

und hierfür kann man schreiben wegen $\cos(-\beta) = \cos\beta$ und $\sin(-\beta) = -\sin\beta$

*) de Moivre lebte von 1668—1754.

III. $(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{-m} = \cos(-m)\alpha \pm i\sin(-m)\alpha,$
wo überall $-m$ statt des obigen n steht.

Beispiele. $(\cos 3^0 + i\sin 3^0)^{10} = {}^1\!/_2\sqrt{3} + {}^1\!/_2\, i$
$(\cos 10^0 - i\sin 10^0)^9 = -i$
$(\cos 15^0 + i\sin 15^0)^{-4} = {}^1\!/_2 - {}^1\!/_2\sqrt{-3}$
$(\cos 36^0 - i\sin 36^0)^{-5} = -1.$

12. Es ist besonders hervorzuheben der Fall, dafs der Exponent $\frac{1}{n}$ ist:

$$\left[\cos(\alpha + k\cdot 2\pi) \pm i\sin(\alpha + k\cdot 2\pi)\right]^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) \pm i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$$

Die links stehenden Funktionen sind, wenn k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, nichts anderes als $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$. Daher ist die Moivresche Formel für Wurzeln

$$\sqrt[n]{\cos\alpha \pm i\sin\alpha} = \cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) \pm i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right).$$

Sie liefert n Werte. Denn erst wenn k 0, 1, 2, 3, bis $n-1$ durchlaufen hat, kommt man bei $k = n$ wieder auf den ersten Wert, bei $k = n + 1$ auf den zweiten, und so wiederholt es sich fort.

13. Unter einer reinen Gleichung $n$ten Grades versteht man eine solche, welche die Unbekannte nur in der $n$ten Potenz besitzt:

$$x^n = a.$$

Man löst sie dadurch, dafs man setzt

$$x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

so dafs man mit Anwendung des Moivreschen Satzes hat

$$r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = a.$$

Diese Gleichung zerfällt nach dem Lehrsatze Nr. 9 in zwei Gleichungen

$$r^n\cos n\alpha = a \qquad \text{und} \qquad r^n\sin n\alpha = 0$$

welche zur Bestimmung der beiden eingeführten Gröfsen r und α erforderlich sind. Um r zu finden sind die Winkelfunktionen durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen zu beseitigen: $(r^n)^2 = a^2$ giebt den aus

$$r^n = a$$

mit Logarithmen zu berechnenden Wert $r = \sqrt[n]{a}$
und nun hat man aus der ersten der beiden Gleichungen mittels Dividieren durch $r^n = a$

$$\cos n\alpha = 1$$

also ist $\quad n\alpha = k\cdot 2\pi \quad$ und $\quad \alpha = k\cdot\frac{2\pi}{n}.$

Mithin ist

$$x = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos k\cdot\frac{2\pi}{n} + i\sin k\cdot\frac{2\pi}{n}\right]$$

und dieser Ausdruck stellt n Werte dar. Sie hinzuschreiben, setzt man nach $k = 0$ sogleich $k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ wenn n eine gerade Zahl ist, bis $+\frac{n}{2}$, und wenn n ungerade ist, bis $\pm\frac{n-1}{2}$.

Die Gleichung $$x^n = -a$$
wird ebenso behandelt. Hier giebt $r^n \cos n\alpha = -a$ beim Dividieren durch $r^n = a$
$$\cos n\alpha = -1$$
also $n\alpha = (2k+1)\pi$ und damit
$$x = \sqrt[n]{a} \cdot \left[\cos(2k+1)\frac{\pi}{n} + i\sin(2k+1)\frac{\pi}{n}\right].$$

Die Entwicklung hat gelehrt: die n^{te} Wurzel aus jeder Zahl hat n Werte, von denen sind, wenn n eine gerade Zahl ist, bei positiver Zahl a zwei reelle und $(n-2)$ zusammengesetzte Zahlen, oder bei negativer Zahl alle zusammengesetzte Zahlen; bei ungeradem n eine reell und $(n-1)$ zusammengesetzt.

Beispiele. 1) Die sechs Werte der sechsten Wurzel aus 1 anzugeben. Es liefert
$$k = 0 \qquad x_1 = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = 1$$
$$k = \pm 1 \qquad x_{\frac{2}{3}} = \cos 60^0 \pm i\sin 60^0 = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i$$
$$k = \pm 2 \qquad x_{\frac{4}{5}} = \cos 120^0 \pm i\sin 120^0 = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i$$
$$k = 3 \qquad x_6 = \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1.$$

2) Die neun Werte der neunten Wurzel aus 1 nach der Logarithmentafel aufzustellen.
$$x_1 = 1$$
$$x_{\frac{2}{3}} = \cos 40^0 \pm i\sin 40^0 = 0{,}7660 \pm 0{,}6428\,i$$
$$x_{\frac{4}{5}} = \cos 80^0 \pm i\sin 80^0 = 0{,}1736 \pm 0{,}9848\,i$$
$$x_{\frac{6}{7}} = \cos 120^0 \pm i\sin 120^0 = -0{,}5 \pm 0{,}8660\,i$$
$$x_{\frac{8}{9}} = \cos 160^0 \pm i\sin 160^0 = -0{,}9397 \pm 0{,}3420\,i.$$

3) Die vier Werte der vierten Wurzel aus -1 sind
$$(1 \pm i)\sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad (-1 \pm i)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
worauf die Probe leicht zu machen ist.

C. Behandlung der Gleichungen dritten Grades.

14. Es seien x_1, x_2, x_3 bestimmte einfache oder zusammengesetzte Zahlen, x aber eine Unbekannte. Die Gleichung
$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$$
hat die Wurzeln x_1, x_2, x_3. Denn setzt man z. B. x_2 für x, so wird das Produkt durch den zweiten Faktor zu Null.

Löst man die Klammern auf, so wird die geordnete Gleichung
$$\text{I.} \quad x^3 - (x_1+x_2+x_3)\,x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\,x - x_1x_2x_3 = 0.$$

Das zweite und das vierte Glied lehren:

In einer geordneten Gleichung dritten Grades ist die Summe der Wurzeln mit umgekehrtem Vorzeichen die Vorzahl des quadratischen Gliedes, und das Produkt der Wurzeln mit umgekehrtem Vorzeichen ist das von x freie Glied.

Hat man demnach für die Gleichung (deren Vorzeichen der Gleichung I entsprechend genommen sind)
$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

eine Zahl, die als Faktor des Freigliedes $-c$ eine Wurzel der Gleichung sein kann, durch die Probe als x_1 bestätigt, so kennt man

$$x_2 + x_3 = a - x_1 = 2\,s \quad \text{und} \quad x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{x_1} = p$$

und kann nun auch die beiden andern Wurzeln finden durch Ansetzen und Auflösen der Hilfsgleichung

$$x^2 - 2\,s\,x + p = 0.$$

Beispiel. $x^3 + 4\,x^2 - 5\,x - 14 = 0$. Der Faktor 2 von 14 kann eine Wurzel der Gleichung sein. Nimmt man $x = 2$, so wird die linke Seite der Gleichung wirklich zu Null; also ist $x_1 = 2$ die erste Wurzel der Gleichung. Diese giebt $x_2 + x_3 = -4 - 2 = -6$ und $x_2 \cdot x_3 = 7$. Hiermit setzt man die Hilfsgleichung an

$$x^2 + 6\,x + 7 = 0 \quad \text{und findet} \quad x_{\substack{2\\3}} = -3 \pm \sqrt{2}.$$

Stellt man mit diesen Wurzeln x_1, x_2, x_3 die Vorzahlen der Gleichung I auf, so erscheint die gegebene Gleichung, die also die Wurzeln wirklich besitzt.

Andere Beispiele Martus, Aufgaben 1066—1088.

15. Das Beseitigen des zweiten Grades der Unbekannten.

Jede Gleichung dritten Grades kann geschrieben werden in der Form

$$x^3 - 3\,\alpha\,x^2 + 3\,\beta\,x - 2\,\gamma = 0.$$

Denn lautet z. B. das zweite Glied, wie in der eben behandelten Gleichung, $+ 4\,x^2$, so ist $\alpha = -\,^4/_3$.

Man setze $x = y + z$ ein und stelle, zum Ordnen nach fallenden Potenzen von y, die aus den folgenden Gliedern hervorgehenden unter die zugehörigen. Das Zusammenfassen ergiebt

$$y^3 + 3\,(z - \alpha)\,y^2 + 3\,(z^2 - 2\,\alpha\,z + \beta)\,y + z^3 - 3\,\alpha\,z^2 + 3\,\beta\,z - 2\,\gamma = 0.$$

Beim Setzen $x = y + z$ kann man dem z jeden beliebigen Wert geben, dann erhält y einen bestimmten, so dafs die erforderliche Gröfse des x herauskommt. In obigem Beispiele $x_1 = 2 = y + z$ kann man nehmen $z = 7$, dann ist $y = -5$; wählt man $z = -8\,^2/_3$, so mufs $y = 10\,^2/_3$ sein. Diese Freiheit in der Wahl des z ermöglicht, aus der letzten Gleichung das Glied y^2 verschwinden zu lassen; seine Vorzahl, $3\,(z - \alpha)$, mufs zu Null werden, was bei $z = \alpha$ eintritt, und α war ein Teil der Vorzahl $-3\,\alpha$ von x^2. Daher die Vorschrift:

> Man zerlege die Unbekannte x in eine Summe, deren zweiter Posten der mit umgekehrtem Vorzeichen genommene dritte Teil der Vorzahl von x^2 ist.

Durch die Wahl $z = \alpha$ vereinfacht sich die letzte Gleichung in

$$y^3 + 3\,(-\alpha^2 + \beta)\,y - 2\,\alpha^3 + 3\,\alpha\,\beta - 2\,\gamma = 0$$

welche auch geschrieben werden kann

$$y^3 - 3\,(\alpha^2 - \beta)\,y - 2\,(\alpha^3 - \,^3/_2\,\alpha\,\beta + \gamma) = 0.$$

Zur Abkürzung sei

$$\alpha^2 - \beta = a \quad \text{und} \quad \alpha^3 - \,^3/_2\,\alpha\,\beta + \gamma = b;$$

dann lautet das Ergebnis

$$\text{II.} \qquad \mathbf{y^3 - 3\,a\,y - 2\,b = 0.}$$

In dieser Schreibweise hat die **einfache** Gleichung dritten Grades die **gesetzmäfsige Form.** (Die Vorzeichen und Vorzahlen mufs man sich genau merken!)

Beispiel. Die Gleichung $x^3 + 9x^2 + 2x - 48 = 0$ zu vereinfachen und dadurch aufzulösen.

Es giebt $y(y^2 - 25) = 0$ durch $y_1 = 0$ und $y_2 = \pm 5$

die drei Wurzeln $x_1 = -3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -8.$

Andere Beispiele: Martus, Aufgaben 1089—1098.

Anmerkung. Ebenso verfährt man, um aus der Gleichung $n$ten Grades

$$x^n - n\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \ldots + \varphi x - \psi = 0$$

das Glied vom $(n-1)$ten Grade verschwinden zu lassen. Die Entwicklung von $(y+z)^n - n\alpha(y+z)^{n-1}$ nach dem binomischen Satze, wobei man nur die beiden ersten Glieder zu schreiben braucht, liefert $y^n + n(z-\alpha)y^{n-1} + \ldots$ Soll der $(n-1)$te Grad nicht vorhanden sein, so wählt man $z = \alpha$, das ist der mit umgekehrtem Vorzeichen genommene $n$te Teil der Vorzahl von x^{n-1}.

16. Die Cardanische Formel.*)

Für jeden Wert von p und q ist, weil die rechte Seite der Gleichung nur eine Formveränderung der linken ist,

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

also stets

$$\text{III.} \qquad (p+q)^3 - 3pq(p+q) - (p^3+q^3) = 0.$$

Hiermit vergleiche man die einfache Gleichung dritten Grades (II)

$$y^3 - 3\,a\,y - 2b = 0.$$

Es entspricht

$$p+q \text{ dem } y, \quad pq \text{ dem } a, \quad p^3+q^3 \text{ dem } 2b.$$

Die Gleichung III ist in allen Fällen $= 0$, also auch in dem, wo wir uns p und q so wählen, dafs

$$p \cdot q = a \quad \text{und} \quad p^3 + q^3 = 2b$$

ist; und dann wird für $y = p + q$ die Gleichung wirklich zu Null; also ist $y = p + q$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung II.

Da man von den Gröfsen p und q Summe und Produkt ihrer dritten Potenzen kennt,

$$p^3 + q^3 = 2b \quad \text{und} \quad p^3 \cdot q^3 = a^3$$

so findet man sie durch Ansetzen der Hilfsgleichung

$$v^2 - 2bv + a^3 = 0$$
$$v = b \pm \sqrt{b^2 - a^3}$$

also $\quad p^3 = b + \sqrt{b^2 - a^3} \quad$ und $\quad q^3 = b - \sqrt{b^2 - a^3}$

mithin

$$\text{IV.} \qquad p = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} \quad \text{und} \quad q = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}}$$

dann ist $\quad y_1 = p + q.$

Schreibt man hinter y_1 für p und q die Werte (IV) hin, so hat man die Cardanische Formel. [Die Folge der Gradzahlen (Exponenten), 1, 2, 3, läfst die Ausdrücke p und q leicht im Gedächtnis behalten.]

*) Die Formel war 1505 von Scipione dal Ferro gefunden, aus dessen hinterlassenen Papieren Cardano sie sich erbat und 1545 im 10. Teile seines Rechenbuches veröffentlichte. Auch Tartaglia hatte sie 1536 selbständig gefunden, wollte sie aber geheim halten.

Für die beiden andern Wurzeln y_2 und y_3 hat man aus ihrem Zusammenhange mit den Vorzahlen der gegebenen Gleichung, nach Nr. 14, zunächst, weil in ihr ein Glied mit y^2 nicht vorhanden ist, $y_1 + y_2 + y_3 = 0$

$$y_2 + y_3 = -y_1 = -(p+q)$$

und durch
$$y_1 y_2 y_3 = 2b = p^3 + q^3$$

$$y_2 \cdot y_3 = \frac{p^3+q^3}{p+q} = p^2 - pq + q^2.$$

Demnach erhält man y_2 und y_3 durch Ansetzen der Hilfsgleichung

$$y^2 + (p+q)\,y + (p^2 - pq + q^2) = 0$$

deren Auflösung ergiebt

$$y_{\substack{2\\3}} = -\tfrac{1}{2}(p+q) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3(p^2 - 2pq + q^2)}$$

V. $$y_{\substack{2\\3}} = -\tfrac{1}{2}(p+q) \pm \tfrac{1}{2}(p-q)\sqrt{-3}.$$

Aufstellung von Beispielen. 1) Es soll werden $y_1 = 4 + 2$; dann ist $a = pq = 8$ und $2b = 4^3 + 2^3 = 72$; damit entsteht die Gleichung

$$y^3 - 24y - 72 = 0$$

oder in der gesetzmäfsigen Form

$$y^3 - 3 \cdot 8y - 2 \cdot 36 = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung durch Berechnen von p und q (IV) ergiebt

$$y_1 = 6, \quad y_{\substack{2\\3}} = -3 \pm \sqrt{-3}.$$

2) Es werde $y_1 = 4 - 2$; also ist zu nehmen $a = -8$ und $2b = 64 - 8 = 56$. Hiermit wird die Gleichung

$$y^3 + 24y - 56 = 0 \quad \text{oder} \quad y^3 - 3\cdot(-8)\,y - 2\cdot 28 = 0$$

welche ergiebt $y_1 = 2$ und $y_{\substack{2\\3}} = -1 \pm 3\sqrt{-3}.$

3) Es soll herauskommen $y_1 = 1 - 5$. Da ist $a = -5$ und $2b = -124$; also die Gleichung

$$y^3 + 15y + 124 = 0 \quad \text{oder} \quad y^3 - 3\cdot(-5)y - 2\cdot(-62) = 0.$$

Man findet $y_1 = -4$ und $y_{\substack{2\\3}} = 2 \pm 3\sqrt{-3}.$

Anmerkung 1. Eine Gleichung dritten Grades hat zwei gleiche Wurzeln, wenn a^3 gleich b^2 ist. Denn dann verschwindet in der Cardanischen Formel die innere Wurzel und es wird $q = p$, also $y_{\substack{2\\3}} = -\tfrac{1}{2}(p+q) \pm 0 = -p$, während dann $y_1 = 2p$ ist. Dabei ist $p = \sqrt[3]{b}$, $p^2 = \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$, also $p = \sqrt{a}$. Demnach $y_1 = 2\sqrt{a}$ und $y_2 = y_3 = -\sqrt{a}$.

Anmerkung 2. In obigen Beispielen lieferte die Cardanische Formel für y_2 und y_3 immer zusammengesetzte Zahlen, deren imaginärer Bestandteil nur in dem eben behandelten Falle verschwand, wodurch y_2 und y_3 gleich wurden. Es fragt sich, wie die Cardanische Formel sich gestaltet, wenn man weifs, dafs die gegebene Gleichung drei ungleiche einfache Zahlen als Wurzeln hat.

Die aufzustellende Gleichung soll die Wurzeln -9, 6 und 3 besitzen. Sie wird nach Vorschrift der Gleichung I unter Nr. 14 gebildet und lautet

$$x^3 - 63x + 162 = 0 \quad \text{oder} \quad x^3 - 3\cdot 21x - 2\cdot(-81) = 0.$$

Es wird $p = \sqrt[3]{-81 + 30\sqrt{-3}}$ und $q = -\sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}}.$

Die Cardanische Formel tritt auf in imaginärer Gestalt und scheint zu versagen. Die Wurzelausziehung gelingt aber mit Hilfe der Moivreschen Formel, wie nun gezeigt werden soll.

17. Berechnung der Cardanischen Formel mittels Hilfswinkel.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) a ist positiv und a^3 gröfser als b^2,
2) a ist positiv und a^3 kleiner als b^2,
3) a ist negativ.

Man zieht aus der inneren Wurzel stets die gröfsere Zahl heraus.

18. Erster Fall. Da hier $a^3 > b^2$ sein soll, so zieht man in

$$p = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}}$$

das a^3 aus $b^2 - a^3$ heraus: $a^3 \left(\frac{b^2}{a^3} - 1\right)$, also

$$p = \sqrt[3]{b + \sqrt{a^3}\sqrt{\frac{b^2}{a^3} - 1}}$$

und setzt den echten Bruch $\frac{b^2}{a^3} = \cos^2 \alpha$, also $\cos \alpha = \pm \frac{b}{\sqrt{a^3}}$.

Um den Hilfswinkel α immer aus dem ersten Kreisviertel nehmen zu können, wählt man von $\pm$ das Minuszeichen, wenn b negativ ist; so dafs stets gerechnet wird nach

$$1) \qquad \cos \alpha = \frac{b}{a\sqrt{a}}.$$

Indem man hiernach auch $b = (\sqrt{a})^3 \cdot \cos \alpha$ in die Formel einführt, hat man

$$p = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}}$$

oder

$$p = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\cos \alpha + i \sin \alpha}$$

und nun vollzieht sich die Zerlegung der dritten Wurzeln der Cardanischen Formel durch die Moivresche Formel für Wurzeln (Nr. 12)

$$p = \sqrt{a} \cdot [\cos (1/3\, \alpha + k \cdot 2/3\, \pi) + i \sin (1/3\, \alpha + k \cdot 2/3\, \pi)]$$

und

$$q = \sqrt{a} \cdot [\cos (1/3\, \alpha + k \cdot 2/3\, \pi) - i \sin (1/3\, \alpha + k \cdot 2/3\, \pi)]$$

folglich

$$y = p + q = 2\sqrt{a} \cdot \cos (1/3\, \alpha + k \cdot 2/3\, \pi)$$

unter Fortfallen des imaginären Bestandteils.

Daher wird bei $k = 0, 1, 2$

$$y_1 = 2\sqrt{a} \cdot \cos 1/3\, \alpha$$

$$y_2 = 2\sqrt{a} \cdot \cos (1/3\, \alpha + 120^0) = -2\sqrt{a} \cdot \cos (60^0 - 1/3\, \alpha)$$

$$y_3 = 2\sqrt{a} \cdot \cos (1/3\, \alpha + 180^0 + 60^0) = -2\sqrt{a} \cdot \cos (60^0 + 1/3\, \alpha).$$

Man rechnet also nach

$$2) \qquad \begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{a} \cdot \cos 1/3\, \alpha \\ y_2 &= -2\sqrt{a} \cdot \cos (60^0 \mp 1/3\, \alpha) \\ &{}_3 \end{aligned}$$

wenn b positiv ist, und mit umgekehrten Vorzeichen, wenn b negativ ist, weil dabei das negative Zeichen der $\sqrt{a}$ genommen werden sollte.

Beispiel. Wir nehmen das Beispiel der Anmerkung 2 unter Nr. 16:

$$x^3 - 3 \cdot 21 x - 2 \cdot (-81) = 0.$$

Es ist von der Zahl 21 das Minuszeichen der gesetzmäfsigen Form (Nr. 15, II)

$$y^3 - 3ay - 2b = 0$$

nicht umgekehrt, also ist hier a positiv und die Aufgabe gehört, weil $a^3 > b^2$ ist, dem ersten Falle an. Letzteres zeigt man bequemer durch $a\sqrt{a} > b$. Es ist $\sqrt{21} > 4$, also $21\sqrt{21} > 84 > 81$. (Es sollte b ohne Vorzeichen in die Rechnung treten!) [Überhaupt kann das Ausrechnen der dritten Potenz von a meist vermieden werden. Man nimmt statt a eine kleinere bequeme Zahl, etwa wie 10, und sagt: da schon $10^3 = 1000$ gröfser ist, als b^2, (wobei statt b eine gröfsere Zahl in Vergleich gestellt werden kann) so ist um so mehr $a^3 > b^2$.]

Man kürze nicht den Bruch $\cos\alpha = \frac{81}{21\sqrt{21}}$ und fange die logarithmische Rechnung mit dem Nenner an. Es liefert der Hilfswinkel $\frac{1}{3}\alpha = 10^0\, 53\frac{7}{12}'$ die drei Wurzeln, da die Formeln 2) wegen des negativen b mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmen sind,

$$x_1 = -9, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 3{,}00007 \text{ statt } 3,$$

wie beim Aufstellen der Gleichung in Anmerkung 2 unter Nr. 16 vorgeschrieben wurde.

Anmerkung 1. Es ist nachdrücklich darauf hinzuweisen, dafs, wiewohl alle drei Wurzeln des ersten Falles mögliche Werte sind, für eine vorliegende Aufgabe doch nur eine oder zwei brauchbar sein können. Da wird man die unbrauchbare Wurzel, ohne sie erst auszurechnen, sogleich durch Überlegung ausscheiden. Weil der Hilfswinkel α aus dem ersten Kreisviertel genommen wird, ist $\frac{1}{3}\alpha < 30^0$, also $2\cos\frac{1}{3}\alpha > \sqrt{3}$, mithin $y_1 > 1{,}7\sqrt{a}$. Dies kann für die vorgelegte Aufgabe offenbar viel zu grofs sein. — Es ist erst $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, also $2\cos(60^0 - \frac{1}{3}\alpha) > 1$, deshalb der Zahlenwert von $y_2 > \sqrt{a}$. Dadurch kann, wenn y_2 negativ ist, die Hauptunbekannte $x_2 = y_2 + d$ negativ werden. Ist dies unzulässig, so bleibt der kleinste Wert y_3 also die einzige für die Aufgabe passende Wurzel und ist allein auszurechnen.

Anmerkung 2. Die Grenze zwischen dem ersten und zweiten Falle, a^3 gleich b^2, ist die Stelle, wo die Gleichung dritten Grades zwei gleiche Wurzeln besitzt. Da wird $\cos\alpha = 1$, $\alpha = 0$, $y_1 = 2\sqrt{a}$, $y_2 = y_3 = -\sqrt{a}$, wie auch in Nr. 16 Anmerkung 1 gefunden wurde.

19. Zweiter Fall: a ist positiv und $a^3 < b^2$.

Jetzt wird b^2, als die gröfsere Zahl, herausgezogen:

$$p = \sqrt[3]{b + b\sqrt{1 - \frac{a^3}{b^2}}}.$$

Hier mufs man setzen

$$1) \qquad \sin\alpha = \frac{a\sqrt{a}}{b}$$

und das Minuszeichen von $\sqrt{a}$ benutzen, wenn b negativ ist.

Stellt man auch $b = \frac{(\sqrt{a})^3}{\sin\alpha}$ ein, so wird

$$p = \sqrt[3]{b\,(1 + \cos\alpha)} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a})^3}{\sin\alpha} \cdot 2\cos{}^1\!/_2\,\alpha}$$

also

$$p = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg}{}^1\!/_2\,\alpha}$$

und

$$q = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}{}^1\!/_2\,\alpha}.$$

Der genaueren logarithmischen Rechnung wegen führt man noch einen zweiten Hilfswinkel β ein durch

2) $$\operatorname{tg} {}^1/_2\beta = \sqrt[3]{\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha}$$

dann ist $$y_1 = p + q = \sqrt{a}\,(\operatorname{ctg} {}^1/_2\beta + \operatorname{tg} {}^1/_2\beta)$$

3) $$y_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\sin\beta}$$

und mit negativem Vorzeichen, wenn b negativ ist.

Da $p - q = \sqrt{a}\,(\operatorname{ctg} {}^1/_2\beta - \operatorname{tg} {}^1/_2\beta) = 2\sqrt{a} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{2\sqrt{a}}{\operatorname{tg}\beta}$

ist, so wird die Gleichung V unter Nr. 16 mit Benutzung von y_1 und $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^0$

$$y_{\substack{2\\3}} = -\frac{\sqrt{a}}{\sin\beta} \pm i\sqrt{a} \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^0}{\operatorname{tg}\beta}$$

und, wenn b negativ ist, mit umgekehrten Vorzeichen.

Weil die beiden letzten Wurzeln zusammengesetzte Zahlen sind, braucht man sie bei keiner Aufgabe aus der Raumlehre oder der Physik zu berechnen, sondern nur bei einer Gleichung aus der Zahlenlehre.

20. Dritter Fall: a ist negativ. Dies verändert die gesetzmäfsige Form der einfachen Gleichung dritten Grades (II unter 15) in

$$y^3 + 3ay - 2b = 0$$

und p in $$p = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 + a^3}}.$$

Bei der Summe ist es gleichgültig, ob b^2 oder a^3 herausgezogen wird. Da aber der dritte Fall dem zweiten näher verwandt ist, als dem ersten, so werde b^2 genommen:

$$p = \sqrt[3]{b\left[1 + \sqrt{1 + \frac{a^3}{b^2}}\right]}.$$

Es sei 1) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{a}}{b}$$

wo wieder $-\sqrt{a}$ benutzt wird, wenn b negativ ist, um α aus dem ersten Kreisviertel entnehmen zu können. [Wer a^3 herauszieht, kommt mit $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a\sqrt{a}}$ zu denselben Ergebnissen.]

Stellt man auch $b = \frac{(\sqrt{a})^3}{\operatorname{tg}\alpha}$ ein, so wird

$$p = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a})^3}{\operatorname{tg}\alpha}\left[1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right]} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} {}^1/_2\alpha}$$

und $$q = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{-\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha}.$$

Noch mehr als beim zweiten Falle ist hier, wo $p + q$ zum Rest wird, erforderlich, dafs eingeführt werde

2) $$\operatorname{tg} {}^1/_2\beta = \sqrt[3]{\operatorname{tg} {}^1/_2\alpha}$$

dadurch wird $$y_1 = p + q = \sqrt{a}\,(\operatorname{ctg} {}^1/_2\beta - \operatorname{tg} {}^1/_2\beta)$$

3) $$y_1 = \frac{2\sqrt{a}}{\operatorname{tg}\beta}$$

und mit negativem Vorzeichen, wenn b negativ ist.

Dazu noch, falls eine Aufgabe aus der Zahlenlehre vorliegt,

$$y_{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{a}}{\operatorname{tg}\beta} \pm i\sqrt{a} \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^0}{\sin\beta}.$$

21. Übungen. a) zur Auflösung einer Gleichung 3. Grades

1) durch die Cardanische Formel unmittelbar: Martus, Aufgaben 1099 a—1106 b.

2) $$y^3 - 21{,}8484\,y - 21{,}22416 = 0.$$

3) Die Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, bei welchem ihre Kosinus sich wie $1 : m : n$ verhalten. Die entstehende Gleichung soll für $m = 2$ und $n = 3$ aufgelöst werden. (Statt $\cos\alpha = x$ führe man nachher $\frac{1}{x} = y$ ein. Dadurch wird das beschwerliche Vereinfachen der Gleichung umgangen und das Zahlenergebnis genauer.)

Ergebnis. $\alpha = 75^0\,55'\,44''$, $\beta = 60^0\,54'\,20''$, $\gamma = 43^0\,9'\,59''$; ihre Summe ist um $3''$ zu grofs. (Siebenstellige Logarithmen liefern bei α 43,95″, bei β 19,60″ und bei γ 56,45″.) Der Bedingung, dafs die drei Winkel zusammen 180^0 betragen sollen, wird noch durch eine zweite Gruppe entsprochen; es ist aber bei ihr der erste Winkel negativ: $\alpha_1 = -108^0\,11'\,55''$ (55,34″), $\beta_1 = +128^0\,39'\,17''$ (17,29″), $\gamma_1 = +159^0\,32'\,37''$ (38,14″). Eine dritte Gruppe giebt es nicht.

4) Der gröfseren von zwei Dreiecksseiten, deren Verhältnis v gegeben ist, soll ein Winkel gegenüber liegen, der viermal so grofs ist, als der Gegenwinkel der kleineren. Man berechne die Winkel solches Dreiecks.

Beispiele: 1) $v = 1{,}6$ und 2) $v = 1{,}04$.

Ergebnis bei 1) $\beta = x = 31^0\,4'\,46''$ (43,80″), $\alpha = 4x = 124^0\,19'\,5''$ (18′ 55,20″), $\gamma = 24^0\,36'\,9''$ (21,00″); und bei 2) $\beta = x = 35^0\,40'\,3''$ (3,03″), $\alpha = 4x = 142^0\,40'\,13''$ (12,10″), $\gamma = 1^0\,39'\,44''$ (44,87″). Es mufs sein $1 < v < 4$. An der Grenze zwischen dem ersten und zweiten Falle, bei $v = {}^4/_9\sqrt{6} = 1{,}089$, steht ein Dreieck, dessen Gestalt durch das einfache Verhältnis $b : c$ ausgezeichnet ist; es hat $b = 9c$, und die Winkel (genauer aus $\cos 4x$) $\alpha = 141^0\,3'\,28''$ (27,21″), $\beta = 35^0\,15'\,52''$ (51,80″), $\gamma = 3^0\,40'\,40''$ (40,99″).

5) Das Verhältnis v zweier Dreiecksseiten ist gegeben. Ihre Gegenwinkel sollen sich wie 4 : 3 verhalten. Man berechne die Winkel solches Dreiecks. $v = 1{,}2$.

Ergebnis. $\alpha = 4x = 66^0\,20'\,24''$ (19,68″), $\beta = 3x = 49^0\,45'\,18''$ (14,76″), $\gamma = 63^0\,54'\,18''$ (25,56″). Grenzbedingung: $1 < v < {}^4/_3$; das Verhältnis v der Seiten mufs kleiner als das der Winkel bleiben.

6) Beispiele für den ersten Fall: Martus, Aufgaben 1110—1113, 1119, 1121—1123.

7) Beispiele für den zweiten oder dritten Fall: M., Aufgaben 1134—1136.

Es mögen hier (für spätere Behandlung) Aufgaben aus der Körperlehre Platz finden.

8) Welche Höhe mufs ein Kugelabschnitt erhalten, wenn sein Inhalt derjenigen Kugel gleich werden soll, die man dem andern Teile der Kugel einbeschreiben kann? [$x = 4r\cos 80^0 = 0{,}6946\,r$.]

9) Eine Kugel soll durch eine Ebene in zwei Abschnitte zerlegt werden, die sich wie $p : q$ verhalten ($p > q$). Welchen Abstand vom Mittelpunkte muſs die schneidende Ebene erhalten? Beispiel: $p = 81$, $q = 44$.

[Abstand $x = 0{,}2\,r$.]

10) In eine Kugel eine Walze zu beschreiben, so daſs jeder der Abschnitte $n$mal so groſs wird, wie der Ring, welcher die Walze umgiebt. Beispiel: $n = {}^1/_6$. (Vergleiche M., Aufgabe 560 a.)

[Mittelpunktsabstand der Grund- oder der Deckfläche der Walze $x = 0{,}70573\,r$.]

11) M., Aufgaben 1114 a—1118, 1120, 1124—1126; 1127—1133; 1137, 1138, und zu letzteren beiden noch

12) In einem abgestumpften geraden Kegel soll der Durchmesser der Deckfläche gleich der Seitenlinie s des Kegels sein und der Inhalt möglichst groſs werden. Wie groſs sind die Winkel des Achsenschnittes und der Halbmesser des Grundkreises zu nehmen? [$x = 46^0\,56'\,19''$, $r = 1{,}18278\,s$.]

---

b) Anwendung von Newtons Sinus- und Kosinus-Reihe.

13) Man denke beim Kreise vom Halbmesser r die Seiten des umbeschriebenen regelmäſsigen n-Ecks denen des einbeschriebenen gleichlaufend gelegt. In welchem Abstande laufen die entsprechenden Seiten neben einander her? Um wieviel ist der Umfang des umbeschriebenen länger als der des einbeschriebenen, und wie groſs ist die zwischen ihnen liegende Fläche, wenn $r = 1$ m und $n = 1000$ ist? — In der Entwicklung sind die Potenzen von x, welche den dritten Grad übersteigen, zu unterdrücken, und wegen des Nenners werde der Bruch im Zähler und Nenner mit $1 + {}^1/_2\,x^2$ multipliziert.

Ergebnis. Trotz der Gröſse des Kreises laufen die Umfänge der Tausend-Ecke überraschend nahe bei einander her; ihr Abstand, $y = {}^1/_2\,\frac{\pi^2}{n^2}\,r$, ist noch nicht ${}^1/_{200}$ mm. Auch der Unterschied ihrer Umfänge, $u = \frac{\pi^3}{n^2}\,r$, bleibt sehr gering, 0,031 mm. Da aber die zwischenliegende Fläche $r$mal so groſs ist, $F = \frac{\pi^3}{n^2}\,r^2$, kommt sie schon auf 31 qmm. Also, trotzdem die Fläche nur den achten Teil der Feinheit eines Kopfhaares breit ist, steigt sie auf fast ${}^1/_3$ qcm.

14) Im Kreise von $d = 1$ Meter Durchmesser denke man zu einem 1 mm groſsen Bogen die Sehne gezogen. Wie klein ist die Höhe dieses Abschnittes, und um wie wenig ist der Bogen länger als seine Sehne?

Antwort. $y = {}^1/_4\,x^2 \cdot d$; $u = {}^1/_6\,x^3 \cdot d$. Die Höhe des Abschnitts ist nur der viertausendste Teil eines Millimeters. (Vergl. die Aufgabe 3, 11, 8.) Dann denke man ein Millimeter in sechs Millionen gleiche Teile zerlegt; um eines dieser Teilchen ist der Bogen länger als seine Sehne.

15) Beim Kreise von $d = 1$ Meter Durchmesser werden an den Endpunkten eines 1 mm groſsen Bogens die Berührungslinien bis zu ihrem Schnittpunkte gezogen. Wie nahe bleibt der Schnittpunkt dem Kreise, und um wieviel ist die Summe der Berührungslinien länger, als der von ihnen umschlossene Bogen? Bei der Entwicklung ist zu verfahren, wie zur Aufgabe 13) angegeben wurde.

Antwort. $z = {}^1/_4\,x^2 \cdot d$; $u = {}^1/_3\,x^3 \cdot d$. Für den Abstand des Schnittpunktes vom Kreise erhält man ${}^1/_{4000}$ mm. Die Berührungslinien zusammen übertreffen den

Bogen um $^1/_{3000000}$ Millimeter, also um doppelt so viel, als der Bogen seine Sehne. Wiewohl in dem von der Sehne und den Berührungslinien gebildeten gleichschenkligen Dreiecke die Höhe $^1/_{2000}$ mm beträgt, ist die Summe der Schenkel nur um $^1/_{2000000}$ mm gröfser, als die dritte Seite.

Anmerkung. Aus dem Zahlenergebnis in dieser und der vorhergehenden Aufgabe darf man nicht schliefsen, dafs der Abstand des Schnittpunktes der Berührungslinien vom Kreise der Höhe des Abschnitts gleich sei. Bei kleiner werdender Sehne nähern sie sich der Gleichheit; denn ihr Verhältnis ist $\frac{z}{y} = \frac{1}{\cos\alpha}$. Der Abstand z des Schnittpunktes ist also immer noch gröfser, als die Abschnittshöhe y. Bei dem noch 1 mm grofsen Bogen ist der Abstand um $^1/_{1999999}$ der Höhe gröfser. —

Körperlehre.

(Stereometrie.)

I. Abschnitt.

Ebenen und gerade Linien im Raume.

8. Glied. Eine Ebene und gerade Linien.

1. Einleitung. Zunächst ist hier zu wiederholen, was im 1. Teile, **1**, 6—8 gesagt wurde über Raum, Fläche, Linie, Punkt; namentlich die Begründung der Sätze:

1) Durch einen Punkt im Raume sind unzählig viele gerade Linien möglich; durch zwei Punkte nur eine einzige.

Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden.

2) Durch zwei Punkte im Raume sind unzählig viele Ebenen möglich, durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur eine.

Zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie.

Liegt eine gerade Linie mit zweien ihrer Punkte in einer Ebene, so liegt sie ganz darin.

Eine Ebene ist eine Fläche, in welcher man von jedem Punkte nach allen Richtungen, die in ihr möglich sind, gerade Linien ziehen kann.

Durch eine Gerade und einen aufserhalb derselben liegenden Punkt ist die Lage einer Ebene bestimmt.

Zwei sich schneidende gerade Linien liegen in einer Ebene.

Hierauf folgt nun:

3) Zwei Ebenen können bei unbegrenzter Erweiterung sich schneiden oder nicht. Im ersten Falle haben sie eine gerade Linie gemeinsam, im zweiten (wie Fufsboden und Decke des Zimmers) sind sie gleichlaufend.

Für die möglichen Lagen einer Ebene und einer geraden Linie sind drei Fälle zu unterscheiden: die Gerade kann in der Ebene liegen, oder sie kann dieselbe schneiden oder sie treffen sich nicht, soweit man auch die Linie verlängern und die Ebene erweitern mag. Im zweiten Falle heifst der der geraden Linie mit der Ebene gemeinsame Punkt ihr Fufspunkt in der Ebene. Im dritten Falle sind sie gleichlaufend.

Zwei gerade Linien im Raume können entweder in einer Ebene liegen oder nicht. Befinden sie sich in einer Ebene, so können sie bei unbegrenzter Verlängerung sich schneiden oder gleich gerichtet sein. Liegen sie nicht in einer Ebene, so heifsen sie sich kreuzende Linien. (Solche sind z. B. die Gerade, in welcher die Vorderwand und die Decke des

Zimmers sich treffen, und die, in welcher eine Seitenwand auf dem Fufsboden steht.) Eine Gerade, welche eine Ebene schneidet, kreuzt jede Gerade, die in der Ebene nicht durch ihren Fufspunkt geht.

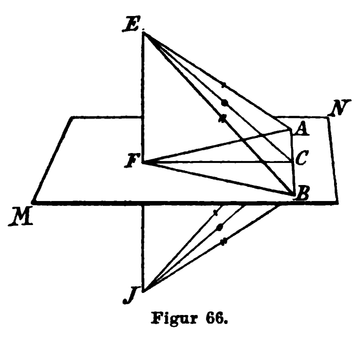
Anmerkung. Im Raume brauchen zwei gerade Linien, die sich nicht schneiden, noch nicht gleichlaufend zu sein. — Will man zeigen, dafs zwei gerade Linien sich schneiden, so mufs zunächst bewiesen werden, dafs sie in einer Ebene liegen.

Erklärung. Soll eine Ebene durch eine gerade Linie gelegt werden, so verlangt man, die Ebene so anzubringen, dafs die Gerade ganz in der Ebene liegt. Von einer die Gerade schneidenden Ebene sagt man, sie sei durch einen Punkt der Geraden gelegt.

a. Die Ebene und die gerade Linie schneiden sich.

α. Die Gerade steht senkrecht auf der Ebene.

2. Erster Lehrsatz. **Eine Gerade, die auf zwei Geraden einer Ebene senkrecht steht, steht auf jeder durch ihren Fufspunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden, daher auf der Ebene senkrecht.**



Figur 66.

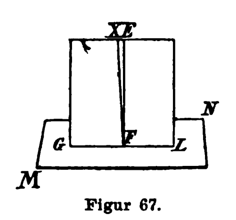
Voraussetzung: $EF \perp FA$
$EF \perp FB$

Behauptung: $EF \perp FC$.

Zum Beweise ziehe man in der Ebene MN eine Gerade AB, welche die beiden gegebenen Geraden und die beliebige dritte, FC, schneidet, verlängere die auf den beiden ersten senkrecht stehende Gerade EF nach der andern Seite der Ebene, trage vom Fufspunkte F aus auf ihr nach beiden Richtungen gleiche Strecken, $EF = FJ$, ab und verbinde E und J mit den Schnittpunkten A, B und C.

Dann stimmt $\triangle AFE \cong AFJ$, also ist $AE = AJ$;
ebenso " $\triangle BFE \cong BFJ$, " " $BE = BJ$.
Daraus folgt, dafs $\triangle ABE \cong ABJ$, " " $\angle ABE = ABJ$ oder $\angle CBE = CBJ$.
Dies bringt $\triangle CBE \cong CBJ$, " " $CE = CJ$
und nun stimmt $\triangle CFE \cong CFJ$, " " $\angle CFE = CFJ$ und diese betragen als Nebenwinkel zusammen zwei Rechte; mithin ist $\angle CFE = 1$ R. Auch für den Fall, dafs FC hinter FA oder vor FB liegt, pafst der Beweis. Folglich steht EF auf jeder Geraden, die durch F in der Ebene MN läuft, senkrecht und deshalb darf man sagen, sie steht auf der Ebene MN senkrecht.

Zusätze. 1) **In** einem Punkte einer Ebene läfst sich auf ihr nur eine Senkrechte errichten.



Figur 67.

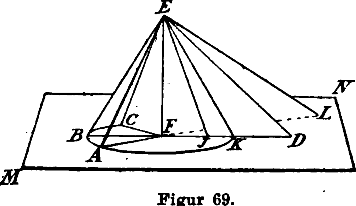
Bw. Könnte in F noch eine zweite Gerade FX auf der Ebene MN senkrecht stehen, so würde die Ebene des Winkels EFX, weil sie mit MN den Punkt F gemeinsam hat, diese in einer geraden Linie GL schneiden, auf welcher dann in einer Ebene GEL zwei Gerade senkrecht ständen, was nicht möglich ist. Also kann in einem Punkte auf der Ebene nur eine Gerade senkrecht stehen.

2) **Von** einem Punkte aufserhalb einer Ebene ist auf sie nur eine Senkrechte zu fällen.

Bw. Könnte man vom Punkte *E* noch eine zweites Lot, *EX*, auf die Ebene hinablassen, so würde die Ebene *FEX* ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln geben. Da dies unmöglich ist, so ist nur eine Senkrechte auf die Ebene zu fällen.

Figur 68.

3) Die von einem Punkte auf eine Ebene gefällte Senkrechte ist die kürzeste von allen Linien, die von dem Punkte aus nach der Ebene gezogen werden können. Unter ihnen sind diejenigen gleich lang, deren Fufspunkte vom Fufspunkte der Senkrechten gleich weit abstehen. Sie werden um so gröfser, je weiter die Fufspunkte vom Fufspunkte der Senkrechten sich entfernen.



Der Beweis ist leicht.



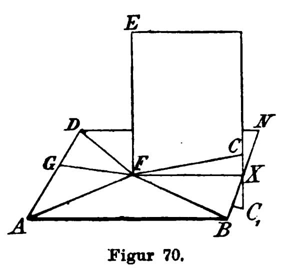
4) Die Umkehrung dieses Satzes.

Figur 69.

Erklärung. Unter Abstand eines Punktes von einer Ebene versteht man die Länge der Senkrechten von ihm auf die Ebene.

3. Umkehrung des ersten Lehrsatzes. **Stehen auf einer Geraden in demselben Punkte mehrere Gerade senkrecht, so liegen diese in einer Ebene.**

Bw. Es stehen auf *EF* im Punkte *F* die Geraden *FA*, *FB*, *FC*, *FD*, *FG* senkrecht. In der durch die beiden ersten bestimmten Ebene *AFBN* müssen auch die übrigen sich befinden. Läge *FC* nicht in der Ebene *AN*, so würde die durch *FC* und *FE* bestimmte Ebene *EFC*, weil sie mit der Ebene *AN* den Punkt *F* gemeinsam hat, diese in einer andern Geraden *FX* schneiden, auf welcher *EF* nach dem ersten Satze senkrecht stehen müfste. Als rechter Winkel wäre *EFX* = *EFC*, der nur ein Teil von ihm ist, wenn *FC* oberhalb der Ebene *AN* gedacht ist, umgekehrt, wenn die dritte Gerade, wie FC_1 unterhalb der Ebene *AN* liegen könnte. Also mufs *FC*, ebenso *FD* und jede solche Gerade in derselben Ebene mit *FA* und *FB* laufen.

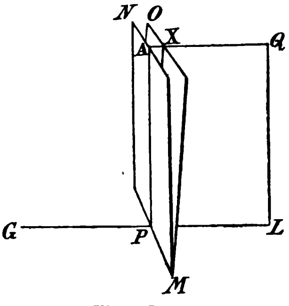


Figur 70.

Zusätze. 1) Dreht man einen rechten Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene.

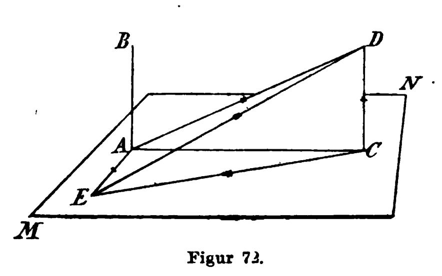
2) Auf einer geraden Linie kann in einem ihrer Punkte nur eine Ebene senkrecht stehen.

Bw. Könnte in *P* auf *GL* aufser *MN* noch eine andere Ebene *MO* senkrecht stehen, so würde man durch *PL* eine Ebene *PQ* legen, welche beide in zwei verschiedenen Linien, *PA* und *PX*, schneidet, und es wären, als rechte Winkel, *LPA* und *LPX* gleich, was nicht möglich ist.



Figur 71

4. Ls. **Gerade, welche auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind gleichlaufend.**



Figur 72.

Bw. Man verbinde die Fufspunkte A und C der auf MN senkrechten Geraden AB und CD, errichte **in A auf AC in** der Ebene MN die Senkrechte AE und schneide auf ihr und CD gleiche Strecken, AE und CD ab; dann werden auch die Verbindungslinien EC und DA gleich, weil $\triangle\ CAE \cong ACD$ Zieht man nun auch noch DE, so stimmt $\triangle\ EAD \cong DCE$, also ist $\angle\ EAD = DCE = R$, mithin stehen in A auf EA die drei Geraden AB, AD und AC senkrecht, liegen also in einer Ebene, in welcher auch die zweite Senkrechte CD sich befindet, da die Ebene zwei ihrer Punkte, D und C, besitzt; und in dieser Ebene $BACD$ ist $AB \parallel CD$, weil beide auf AC senkrecht stehen.

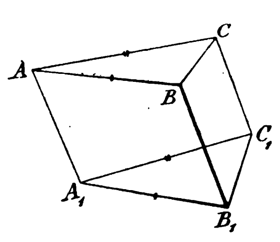
5. Umkehrung. **Steht eine von zwei gleichlaufenden Geraden auf einer Ebene senkrecht, so thut es auch die andere.**

Bw. Es ist die auf MN senkrechte AB gleichlaufend CD, also liegen sie in einer Ebene. Diese schneidet MN; daher trifft auch DC die Ebene MN, und es ist $\angle\ BAC + DCA = 2\ R$, von denen $\angle\ BAC = R$, also auch $\angle\ DCA = R$ ist; dazu erhält man noch $\angle\ DCE = R$ durch dieselben Hilfsdreiecke; mithin steht auch CD nach dem ersten Lehrsatze auf MN senkrecht.

6. Ls. **Sind im Raume zwei Gerade einer dritten gleich gerichtet, so sind sie selbst gleich gerichtet.**

Bw. Durch einen Punkt der dritten Geraden lege man die auf ihr senkrechte Ebene und wende Nr. 5 und 4 an.

7. Ls. **Auch im Raume sind Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln gleich.**



Figur 73.

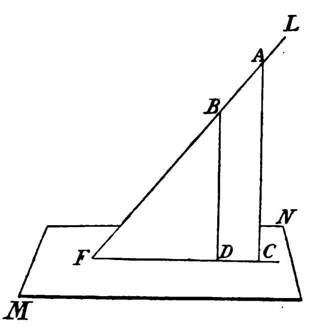
Bw. Man schneide vom Scheitel aus auf den gleichgerichteten Schenkeln gleiche Strecken ab, $AB = A_1B_1$, sowie $AC = A_1C_1$, verbinde die entsprechenden Punkte und ziehe noch BC und B_1C_1. Als gleichgerichtete Gerade liegen AB und A_1B_1 in einer Ebene, also ist ABB_1A_1 ein ebenes Viereck, in welchem zwei Seiten gleich und gleichgerichtet sind. Daher ist es ⟶ u. s. w. (Nr. 6.)

Zs. Ist ein Paar der Schenkel entgegengesetzt, das andere gleich gerichtet, so ergänzen sich die Winkel zu zwei Rechten. Sind beide Paare der Schenkel entgegengesetzt gerichtet, so sind die Winkel gleich.

β. Die gerade Linie steht schief auf der Ebene.

8. Ls. Läfst man von beliebigen Punkten einer auf einer Ebene schief stehenden geraden Linie Lote auf die Ebene hinab, so liegen deren Fufspunkte in einer Geraden, welche durch den Fufspunkt der schief stehenden Linie geht.

Bw. Die von A und B der schief stehenden geraden Linie LF auf MN gefällten Lote AC und BD liegen nach Nr. 4 in einer Ebene. In ihr liegen die Punkte A und B, also die ganze Gerade $LABF$. Die Fufspunkte C, D, F gehören beiden Ebenen an, befinden sich also in ihrer Schnittlinie CF.

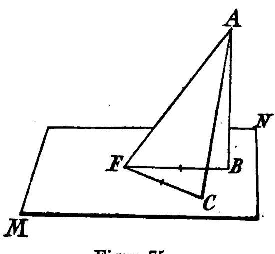


Figur 74.

Anmerkung. Da von allen Punkten der LF dasselbe gilt, so ist FC die Ablotung der schief stehenden Geraden in ihrer Grundebene. Man kommt also immer auf dieselbe Gerade FC und braucht, um die Ablotung zu finden, nur von einem Punkte die Senkrechte auf die Ebene zu fällen und deren Fufspunkt mit F zu verbinden.*)

9. Ls. Unter allen Winkeln, welche eine auf einer Ebene schief stehende gerade Linie mit den in der Ebene durch ihren Fufspunkt gehenden Geraden bildet, ist der mit ihrer Ablotung gebildete der kleinste.

Bw. Die Strecke FB der Ablotung, welche man vom gewählten Punkte A her erhält, trage man auf irgend einer Geraden FC, die in MN durch F geht, ab und verbinde den erhaltenen Punkt C mit A. Dann sind in den Dreiecken AFB und AFC zwei Seiten entsprechend gleich, die dritten Seiten aber ungleich. Mithin hat die kleinere, AB, den kleineren Gegenwinkel, $\angle AFB < AFC$. (1. T., 7, 2.) Da FC eine beliebige Gerade war, so ist $\angle AFB$ kleiner als jeder andere, also der kleinste unter diesen Winkeln.



Figur 75.

Erklärung. Dieser kleinste Winkel heifst der **Neigungswinkel** der schief stehenden geraden Linie gegen die Ebene.

Zusätze. 1) Der Nebenwinkel des Neigungswinkels ist der gröfste unter den Winkeln, welche die schiefe Linie mit den durch ihren Fufspunkt in der Grundebene laufenden Geraden bildet.

Zum Beweise zeichne man auch den Nebenwinkel von AFC.

2) Je zwei von F aus zu beiden Seiten von FB in MN laufende Gerade, welche mit der Ablotung gleiche Winkel einschliefsen, bilden auch mit der schief stehenden Geraden gleiche Winkel.

Bw. Man schneide auf den beiden Geraden FC und FD von F aus gleiche Strecken ab und verbinde die Endpunkte C und D mit B und A. Dann zeigen 3 Paare von deckbaren Dreiecken die Richtigkeit der Behauptung.

3) Mit derjenigen Geraden GL, welche mit der Ablotung FB rechte Winkel einschliefst, bildet auch die schief stehende Gerade rechte Winkel.

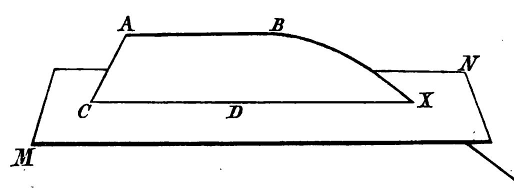
Figur 76.

*) Senkrecht projizieren ist abloten, Projektion Ablotung.

4) Umkehrung. Fällt man von einem Punkte *A* aufserhalb einer Ebene *MN* zwei Senkrechte, die eine, *AB*, auf die Ebene, die andere, *AF*, auf eine in der Ebene liegende Gerade *GL*, so geht die Verbindungslinie ihrer Fufspunkte, *BF*, rechtwinklig zur Geraden *GL*.

b. Die Ebene und die gerade Linie sind gleichlaufend.

10. Ls. **Eine Gerade ist mit einer Ebene gleichlaufend, wenn sie einer Linie in der Ebene gleichgerichtet ist.**



Figur 77.

Bw. Als gleichgerichtete Gerade liegen *AB* und *CD* in einer Ebene. Könnte *AB* die Ebene *MN* schneiden, so würde der Schnittpunkt *X* beiden Ebenen angehören, müfste daher in ihrer Schnittlinie *CD* sich befinden. Also würden *AB* und *CD* sich schneiden, was gegen die Voraussetzung ist.

11. Umkehrung. **Ist eine Gerade mit einer Ebene gleichlaufend, so ist sie denjenigen Geraden in derselben gleichgerichtet, welche mit ihr in einer Ebene liegen, und diese sind mit einander gleichlaufend.**

Bw. Ebenso und durch Nr. 6.

Zusätze. 1) Alle Punkte einer Geraden, die mit einer Ebene gleichlaufend ist, haben gleichen Abstand von der Ebene.

2) Sind eine Ebene und eine Gerade gleichlaufend und weifs man von einer dieser gleichgerichteten Geraden, dafs sie einen Punkt in der Ebene hat, so liegt sie ganz darin.

Bw. Man lege durch die erste Gerade und den Punkt eine Ebene und wende Nr. 11 und 6 an.

3) Ist eine von zwei gleichgerichteten Geraden mit einer Ebene gleichlaufend, so ist auch die andere mit der Ebene gleichlaufend oder liegt ganz in ihr.

12. Ls. **Gegen eine Ebene haben gleichgerichtete Gerade gleiche Neigungswinkel.**

Bw. Nach Herstellung der Neigungswinkel sind in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken die beiden andern Winkel gleich wegen Nr. 4 und 7; also sind auch die dritten Winkel gleich.

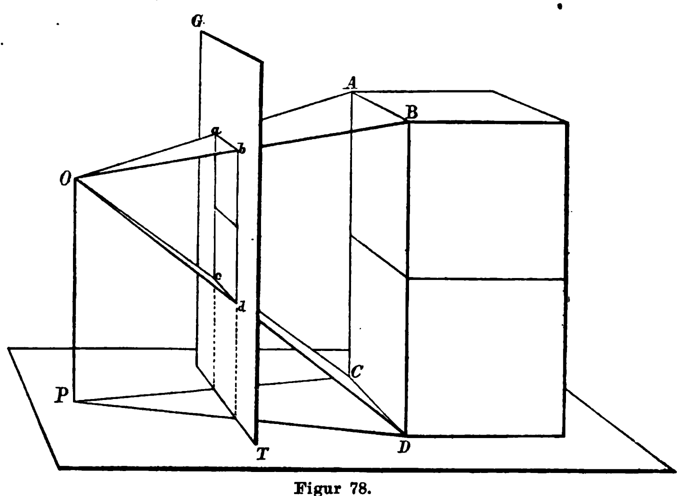
Anmerkung. Dieser Satz läfst sich nicht umkehren. Vergl. Figur 69.

c. Anwendung auf bildliche Darstellung.

13. Vorbemerkung. Am Fenster stehend, wird man einen draufsen erblickten Gegenstand so, wie man mit einem Auge ihn sieht, auf einer Ebene darstellen können, indem man mit Farbe an der Fensterscheibe diejenigen Stellen angiebt, durch welche die Strahlen von den Grenzlinien des Gegenstandes her ins Auge kommen.

Es sei *O* ein Auge des in *P* stehenden Zeichners, *GT* die bis zur Grundebene erweiterte Bildfläche (Glastafel), *AB* eine Grenzlinie des erblickten

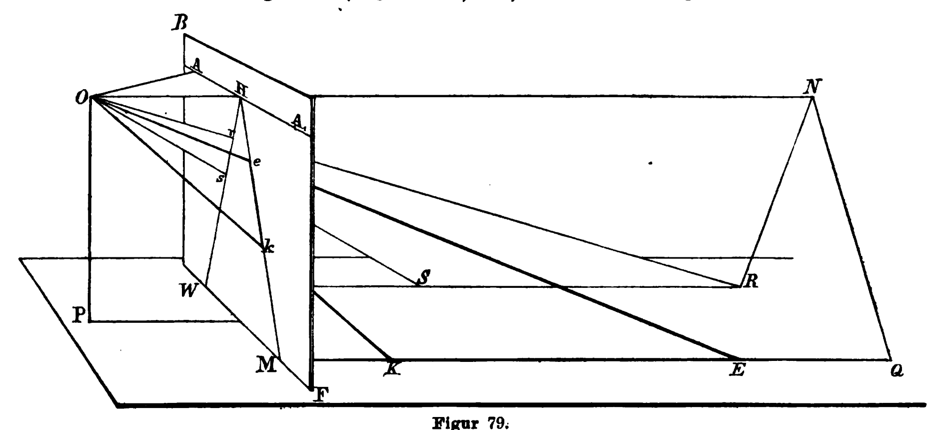
Gegenstandes. Die Lichtstrahlen, welche von Punkten der Linie *AB* her ins Auge *O* gelangen, laufen in der Ebene *ABO*; sie schneidet die Bildfläche in der Linie *ab*. Zieht der Zeichner auf der Bildfläche die Linie *ab*, so senden die Punkte der Linie *ab* ins Auge *O* Lichtstrahlen, welche ganz so im Raume vor der Bildfläche laufen, wie die Grenzlinie *AB* sie dem Auge lieferte; und wenn er eine andere Grenzlinie



Figur 78.

CD auf der Bildfläche als *cd* nachzieht, sowie *ac* und *bd*, so ist *abdc* die getreue Wiedergabe des Doppelquadrates *ABDC*.

14. Erklärungen. (Figur 79.) 1) Die vom Auge auf die Bildfläche



Figur 79.

gefällte Senkrechte *OH* giebt den Hauptpunkt *H*. 2) Die durch das Auge wagerecht gehende Ebene *OAH* schneidet die Bildfläche in der wagerecht laufenden Geraden AHA_1, welche Horizontlinie genannt wird, weil sie den in äufserster Ferne hinter der Bildfläche liegenden Teil des freien Horizontes darstellt. 3) Trägt man den Abstand des Auges von der Bildfläche, *OH*, von *H* aus auf der Horizontlinie nach links oder rechts ab, so erhält man den Abstandspunkt *A* (oder A_1).

15. Die drei Grundlehrsätze für Schaubilder, nach welchen man alle Darstellungen ausführen kann, lauten:

1) **Die der Bildfläche gleichlaufenden Linien erleiden in ihrer Darstellung keine Richtungsänderung.**

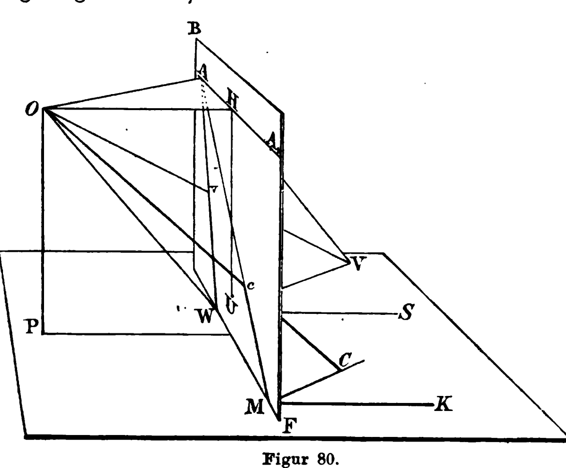
2) **Die Darstellungen der Geraden, welche rechtwinklig gegen die Bildfläche gerichtet sind, laufen zum Hauptpunkt.**

3) **Die Darstellungen wagerechter Linien, welche unter einem halben Rechten gegen die Bildfläche gerichtet sind, laufen zum Abstandspunkt.**

Beweis zu 1). Es ist in Figur 78 die Gerade *AB* mit der Bildebene gleichlaufend, also schneidet die Ebene *OAB* die Bildfläche in einer Geraden *ab*, welche nach dem Lehrsatze Nr. 11 der *AB* gleichgerichtet ist.

Zu 2). Figur 79. *MQ* soll rechtwinklig gegen die Bildfläche gerichtet sein; die vom Auge *O* aus auf die Bildfläche gefällte Senkrechte *OH* ist es auch; daher sind *MQ* und *OH* gleichlaufend (Nr. 4) und liegen als solche Gerade in einer Ebene. In dieser Ebene *ONQM* befinden sich alle Strahlen, welche von Punkten, *E*, *K*, der Geraden ins Auge *O* gelangen. Die Stellen, in welchen die Strahlen durch die Bildfläche *BF* gehen, gehören daher zu den Punkten, die beide Ebenen, *MN* und *BF*, gemeinsam haben, und dies sind die Punkte der Schnittlinie *MH*. Der Punkt *k* derselben liefert dem Auge *O* den Strahl *KO*, der Punkt *e* der Bildfläche den Strahl *EO* und die zwischen *k* und *e* liegenden die Strahlen der Strecke *KE*; mithin ist *ke* im Bilde die Darstellung von *KE*, welche dem Auge denselben Eindruck giebt. Die Darstellung der bis ins Unendliche verlängerten Geraden *KQ* würde bis an den Hauptpunkt *H* herankommen. — Von den Punkten der auch rechtwinklig zur Bildfläche gerichteten Geraden *WR* gilt dasselbe. Die Darstellung ihrer Strecke *SR* ist *sr* auf der Schnittlinie *WH* der Ebene *WN* mit der Bildebene. Daher sind die Darstellungen *ke* und *sr* der Gleichlaufenden *KE* und *SR* im Bilde nicht gleichgerichtet, sondern kommen im Hauptpunkte *H* zusammen.

Zu 3). Figur 80. Von den wagerechten Linien, für welche die dritte Behauptung aufgestellt ist, sind *WV* und *MC* in der Grundebene selbst gezogen. Sie sollen von *W* und *M* aus für den Zeichner *OP* nach halblinks so ablaufen, daſs sie mit der Grundlinie der Bildebene, also auch mit den rechtwinklig abgehenden Linien *WS* und *MK*, einen halben Rechten bilden. Die von *O* aus in gleicher Richtung gezogene Gerade *OA* läuft auch wagerecht, liegt also in der durch *O* wagerecht gehenden Ebene, und trifft deshalb die Bildfläche in einem Punkte *A* der Horizontlinie. Es schlieſst *OA* mit *OH* den Winkel *AOH* ein, welcher den Winkeln



Figur 80.

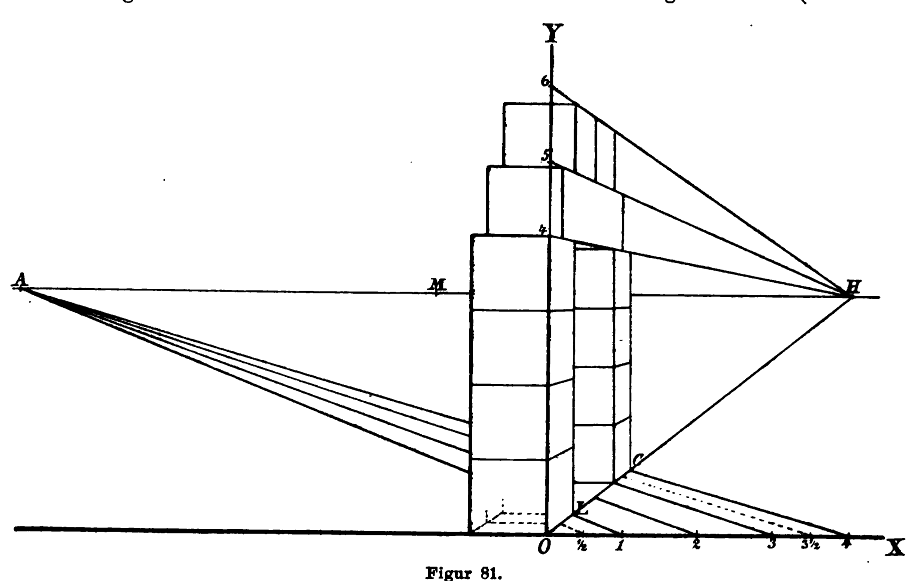
VWS und *CMK* gleich ist, als Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln; also ist auch er ein halber Rechter und macht das Dreieck *OHA* gleichschenklig. Mithin ist der Treffpunkt *A* der Abstandspunkt. Die Ebene *OAVW* der Gleichlaufenden schneidet die Bildebene in der Geraden *WA*, und *Wv* ist die Darstellung von *WV*, so auch *Mc* die Darstellung von *MC*; und diese Darstellungen *Wv* und *Mc* gleichlaufender Geraden kommen im Abstandspunkte *A* zusammen.

Zusatz. Die Darstellungen aller gleichlaufenden Geraden von irgend welcher Richtung treffen sich immer in einem Punkte, welcher ihr Fluchtpunkt heifst. Derselbe kommt bei wagerechten Gleichlaufenden auf die Horizontlinie.

Die Begründung ist ganz dieselbe, wenn die Winkel mit wagerechten Schenkeln, *VWS* und *CMK*, also auch *AOH*, die Gröfse α haben. Den Fluchtpunkt (statt *A*) auf der Horizontlinie findet man beim Zeichnen dadurch, dafs man das Dreieck *AOH* in die Bildfläche niederklappt, also von *H* aus, rechtwinklig gegen AA_1, die Gerade nach unten (oder oben) zieht, auf ihr den Abstand *HO* abschneidet und im Endpunkte *U* nach links (erforderlichen Falls nach rechts) den Winkel α anträgt; sein Schenkel giebt in AA_1 den Fluchtpunkt an. — Haben die Gleichlaufenden *WV* und *MC* keine wagerechte Richtung, etwa schräg aufwärts, so giebt die von *O* aus ihnen gleichlaufende Gerade auf der Bildfläche ihren Fluchtpunkt aufserhalb der Horizontlinie AA_1 an.

Anmerkung. **Zu beachtende Vorschriften!** 1) Die Horizontlinie ist nicht zu hoch über der Grundlinie der Zeichnung anzunehmen. 2) Den Abstand *HA* wählt man am besten gleich der drei- bis vierfachen Breite des Bildes.

16. Beispiele. 1) Die Figur 81 zeigt einen aus würfelförmig behauenen Steinen aufgeführten Thorbau. Der Leser halte das Bild möglichst fern (bis fast an



Figur 81.

die Grenze der Erkennbarkeit). Dann sieht man, dafs die Richtung der Thorwand aus dem Vordergrunde rechtwinklig ab nach hinten hin geht, auf einer Grundebene, die wie eine weite Wüste erscheint, und dafs deren Grenzlinie *AH* die Bezeichnung „Horizontlinie“ mit Recht führt.

Die mit der Bildfläche gleichlaufenden Kanten der behauenen Steine sind auch in der Zeichnung senkrecht, beziehungsweise wagerecht, gemäfs Lehrsatz 1.

Diejenigen Kanten, welche von der Vorderfläche rechtwinklig ablaufen, sind im Bilde alle zum Hauptpunkte *H* gerichtet, wie es nach dem zweiten Lehrsatze

sich darstellen mufs. Die Würfelkante wurde für die Figur als Längenmafs genommen und auf der im Eckpunkte O lotrecht stehenden Geraden OY sechsmal abgetragen, sowie auf der Grundlinie OX, auch von O aus, viermal. Dadurch ist der Höhen- und der Breitenmafsstab im Vordergrunde erhalten. Die Würfelkante OL ist gleich der Mafsstrecke $O1$, also ist das Dreieck $LO1$ in Wirklichkeit ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck und Winkel $O1L$ ein halber Rechter. Deshalb mufs (nach dem 3. Lehrsatze) im Bilde die Richtung $1L$ zum Abstandspunkte A gehen. Dasselbe gilt von den in der Grundebene folgenden Linien bis $4C$. Die vier wirklich gleichen Strecken von O bis C erscheinen, je weiter sie in die Tiefe des Schaubildes kommen, um so kürzer.

Die Thorpfeiler werden oben verbunden durch einen Quaderstein, welcher gleich 3 Würfeln ist, während die Öffnung des Thores 2 Würfel breit genommen wurde; der Deckstein reicht also von $^1/_2$ bis $3^1/_2$. Von diesen Teilpunkten der OC aus mufste lotrecht aufwärts gegangen werden, um über der Linie $H4$ die auf OC senkreckten Kanten des Decksteines zu zeichnen bis zur Linie $H5$. Ebenso ist bei der quadratischen Fläche des Decksteins die linke Kante von ihrem Lotfufspunkte in der Grundebene aus hinaufgezogen bis zu der wagerechten Grenzlinie seiner oberen Fläche. Die beiden obersten, die Fortsetzung des Thorbaues andeutenden Würfel sind in gleicher Weise von der Grundteilung aus aufgesetzt.

Solche Zeichnung ist mit gut gespitztem Bleistift fein zu entwerfen, um den Teil einer Linie, welcher über den noch unbekannten Schnittpunkt mit einer folgenden hinausgezogen wurde, mit Gummi fortreiben zu können.

Anmerkung. Zieht man von M, der Mitte des Abstandes HA, durch C die Gerade, so trifft sie die Grundlinie OX (nach dem Verhältnissatze) im Teilpunkte 2, mitten zwischen O und 4, und ML stöfst auf $^1/_2$. Man erhält also auf OH die Punkte C und L auch durch die Geraden von M nach 2 und nach $^1/_2$. Dies lehrt:

Hat man auf dem Zeichenblatte für den ganzen Abstand nicht ausreichend Platz, so kann man mit dem halben Abstande arbeiten, indem man die halben Strecken wie ganze Längen zählt. Auch $^1/_4$ oder $^1/_5$ des Abstandes kann man in entsprechender Weise benutzen.

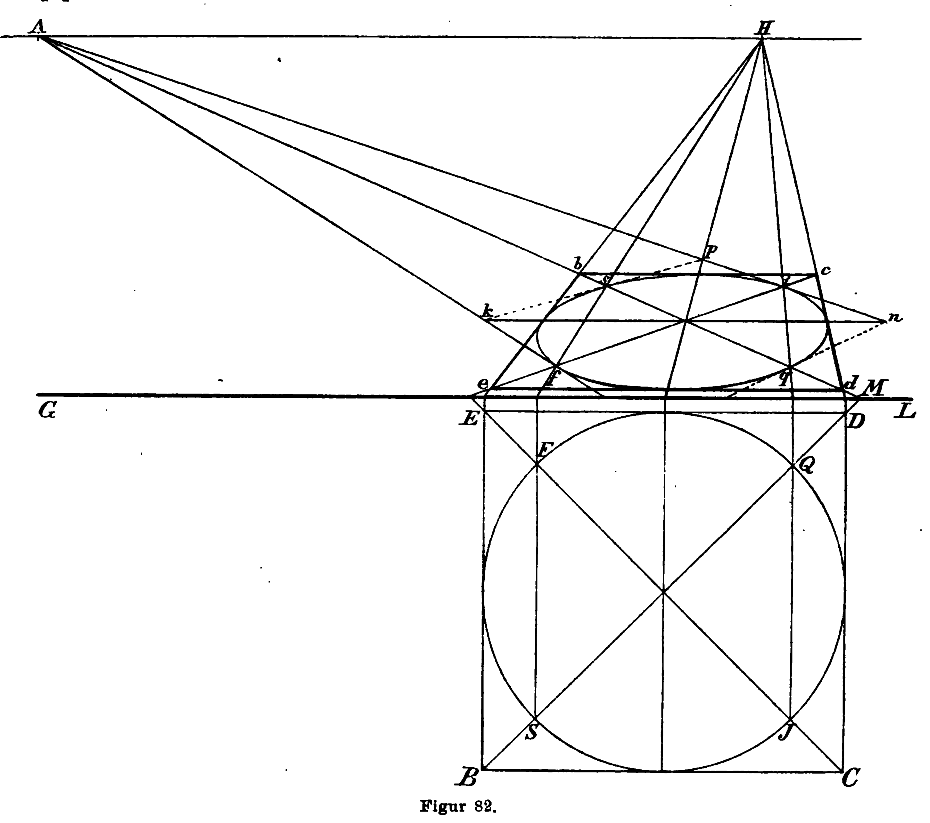
2) **Einen wagerecht liegenden Kreis mittels des ihm umbeschriebenen Quadrats und der Kreisschnittpunkte seiner Eckenlinien** in senkrecht stehender Bildfläche darzustellen.

Ausführung. Man denke den Kreis mit dem ihm umbeschriebenen Quadrate in der Grundebene der Figur 80 nahe hinter der Bildfläche BF so, wie er mit querlaufender Grundlinie des Quadrates vor dem Zeichner liegen soll, wirklich hingezeichnet zwischen MK und WS, und diese Figur, durch Drehen um die Grundlinie FW, hinabgelassen, so dafs sie die nach unten gehende Fortsetzung der Bildfläche wird. Dann hängt sie, wie in Figur 82, an der Grundlinie GL der Bildfläche, in welcher die Darstellung ausgeführt werden soll.

Zunächst wird die Horizontlinie AH gezogen. Ihr Abstand von der Grundlinie GL ist gleich dem Kreisdurchmesser genommen. In ihr wurde der Hauptpunkt H über der Mitte des nach rechts gehenden Kreishalbmessers gewählt und von H aus nach links als Abstand HA eine Strecke, gleich dem doppelten Durchmesser, abgetragen.

Da in der ursprünglichen Lage des Quadrates (vergl. Figur 79) seine Nebenseiten BE und CD, sowie die Sehnen SF und JQ, welche die ihnen nächsten Kreispunkte der Eckenlinien verbinden, rechtwinklig gegen die Bildfläche stiefsen, so

sind ihre Darstellungen in der Bildfläche von den Treffpunkten in *GL* aus nach dem Hauptpunkte *H* zu ziehen. Die Eckenlinie *BD* traf die Grundlinie der Bildfläche



Figur 82.

unter einem halben Rechten, wie *MC* in Figur 80, deren Darstellung *Mc* nach *A* lief. Also hat man auch hier den Treffpunkt *M* mit dem Abstandspunkte *A* zu verbinden und erhält dadurch auf den nach *H* gehenden Linien die Lage der Bildpunkte *d* und *b* von *D* und *B*. Von *b* und *d* zieht man wagerechte Gerade bis zu den Darstellungen der Nebenseiten des Quadrates und findet dort die Bildpunkte *c* und *e* von *C* und *E*; so dafs das wagerecht liegende Quadrat im Bilde erscheint **als Trapez.** Seine Eckenlinie *ec* liefert auf den zum Hauptpunkte gehenden Linien die Bildpunkte *f* und *i*. Die Berührungslinien bei *F* und *J* laufen wie *BD*, also zieht man *Af* und *Ai* als Berührungslinien des zu zeichnenden Kreises. Sie schneiden die Verlängerungen seines wagerechten und senkrechten Durchmessers in *k*, *n* und *p*, und dies sind drei Eckpunkte eines zweiten umbeschriebenen Quadrates, dessen Seiten in der ursprünglichen Figur den Kreis in *F*, *S*, *J* und *Q* berühren. Mithin wird *kp* und *nq* noch ein Paar von Berührungslinien des zu zeichnenden Kreises. Seine elliptisch erscheinende Darstellung kann man nun mit Sicherheit ziehen, da man von ihr acht Punkte und acht Berührungslinien hat. Diese letzteren sind es hauptsächlich, welche die flach zu nehmende oder runder auszuführende Biegung leiten.

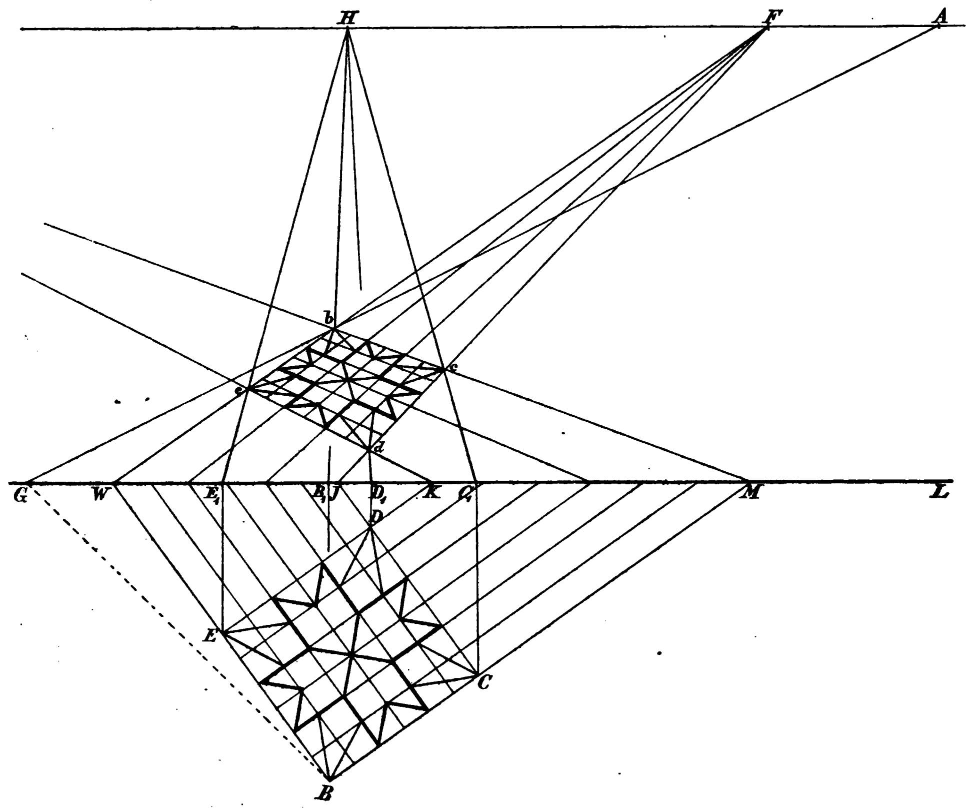
Anmerkung. Zu beachten ist, 1) dafs die Darstellung des Kreises links und rechts keine Spitzen hat. Man darf also, wenn man zur genauen

Ausführung nicht Zeit hat, anstatt um den wagerechten Durchmesser die Ellipse mit Bleistift aus freier Hand zu zeichnen, nicht mit dem Zirkel zwei flache Kreisbogen beschreiben, die dort an ihren Schnittpunkten scharfe Ecken liefern würden. Ferner 2) dafs die vordere Hälfte des Kreises gröfser erscheint, als die hinter *kn* liegende. (Vergl. die Breite der Seitenflächen von den beiden Pfeilern in Figur 81; *OL* erscheint gröfser, als die Würfelgrundkante vor *C.*) Namentlich 3): das Auseinandergehen der Berührungslinien *He* und *Hd* bringt die breiteste Stelle, die grofse Achse der Ellipse, nicht auf *kn*, sondern **vor den Querdurchmesser** des Kreises.

Die Kreishälften fallen im Bilde um so mehr verschieden aus, je kürzer der Augenabstand *HA* genommen wird. Um die notwendig vorhandene Ungleichheit deutlich bemerkbar zu machen, ohne die Figur unschön werden zu lassen, wurde für *HA* nur die $2^1/_2$fache Bildbreite angesetzt, während in der Anmerkung zu Nr. 15 angegeben ist, dafs der Abstand am besten gleich der drei- bis vierfachen Breite des Bildes zu wählen sei.

3) Eine auf dem Fufsboden in farbigen Fliesen ausgeführte Sternfigur in seitlich **schräger** Ansicht auf senkrechter Bildfläche darzustellen.

Ausführung. Der Zeichner habe sich so hingestellt, dafs die quer vor ihm laufende Grundlinie der Bildfläche einen Winkel von 36° bildet mit der vorderen



Figur 83.

Seite des Quadrates, welchem die Sternfigur eingelegt ist. Denkt man wieder die Ebene der wirklichen Figur hinuntergeklappt, dafs sie unter der Grundlinie GL der Bildfläche hängt, so stellt sie sich wie Figur 83 dar. Die Quadratseite ED bildet mit GL den Winkel $EKG = 36^0$. Das Übertragen der der Wirklichkeit entsprechenden Zeichnung $BCDE$ nach oben in die Bildfläche ist sehr leicht auszuführen. Man braucht nämlich nur von einem einzigen Eckpunkte des Quadrates die Lage seines Bildpunktes zu bestimmen. Dazu wird man den von GL fernsten Eckpunkt B wählen, weil zwei nahe bei einander stehende Punkte die Lage des Lineals nicht sicher genug bestimmen. Man trägt also die auf GL gefällte Senkrechte BB_1 nach links bis G ab; dann erhält BG, wegen $\angle BGL = {}^1/_2\, R$, im Bilde die Richtung GA zum Abstandspunkt und schneidet B_1H im Bildpunkte b. Bei den Punkten, in welchen die verlängerten Quadratseiten die Grundlinie GL treffen, fangen die Bildlinien an; (vergl. M und W in Figur 80) Mb giebt c auf C_1H und Wb e auf E_1H; mit diesen hat man durch Ke den vierten Eckpunkt d auf D_1H und Jc mufs durch denselben Punkt d gehen. Die Teilung des Bildvierecks $bcde$ in sechsmal 6 Felder erfolgt sehr bequem mittels der Fluchtpunkte. Die den Quadratseiten BE und CD gleichlaufenden Teilungslinien müssen im Bilde mit eb und dc denselben Fluchtpunkt F auf der Horizontlinie haben. (Nr. 15, Zs.) Man verlängert also eb bis HA; den Schnittpunkt F mufs auch die Verlängerung von dc treffen. Nun zieht man von den 6 Punkten zwischen W und J, in welchen die den Seiten BE und CD gleichlaufenden Teilungslinien anstofsen, nach F hinüber, sowie von denen zwischen M und K nach dem Fluchtpunkte, in welchem cb und de auf der verlängerten AH sich schneiden (der hier im Buche nicht mehr Platz fand). Schliefslich hat man, entsprechend der Vorzeichnung $BCDE$, auf den Teilungslinien diejenigen Strecken stärker nachzuziehen, welche die Sternfigur darstellen.

Anmerkung. Eine recht ansprechende Figur entsteht, wenn man einen ganzen Fufsboden (nicht zu weit ausgedehnt) mit aneinander gereihten Quadraten oder regelmäfsigen Sechsecken getäfelt (oder mit dunklen Dreiecken oder Quadraten zwischen den Seiten der benachbarten regelmäfsigen Sechsecke) in gerader oder schräger Ansicht darstellt.

17. Übungen.

1) Wie viele senkrechte Linien lassen sich im Raume auf einer Geraden in demselben Punkte errichten, und wie viele von einem aufserhalb derselben gegebenen Punkte auf sie fällen?

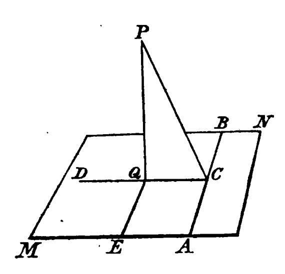
2) Durch einen gegebenen Punkt einer Geraden die auf ihr senkrechte Ebene zu legen.

3) Durch einen aufserhalb einer Geraden gegebenen Punkt die auf ihr senkrechte Ebene zu legen.

4) Auf eine Ebene von einem aufserhalb derselben gegebenen Punkte die Senkrechte zu fällen.

Ausführung. Man ziehe in der Ebene MN eine Gerade AB, denke sich durch sie und den gegebenen Punkt P die Ebene und fälle in dieser von P auf AB die Senkrechte PC. Dann errichte man in C auf AB in MN die Senkrechte CD, lege durch sie und P eine Ebene und fälle in dieser von P auf CD die Senkrechte PQ, so ist sie die verlangte.

Beweis. Man ziehe in MN $QE \parallel CA$. Es steht CA senkrecht auf der Ebene PCQ, also auch QE; daher ist $\angle EQP = R$, u. s. w.



Figur 84.

5) In einem Punkte einer Ebene die Senkrechte auf ihr zu errichten.

Ausführung. Von einem Punkte P aufserhalb der Ebene MN fällt man die Senkrechte PQ, legt durch sie und den gegebenen Punkt C die Ebene und zieht in ihr $CS \parallel QP$, so ist sie die verlangte. (Nr. 5.)

6) Durch einen aufserhalb einer Ebene gegebenen Punkt eine mit ihr gleichlaufende Ebene zu legen.

7) Gehen von einer Geraden, die mit einer Ebene gleichlaufend ist, bis zu dieser gleichgerichtete Gerade, so sind sie gleich lang.

8) Giebt es für zwei sich kreuzende Linien eine Ebene, auf welcher beide senkrecht stehen?

9) Durch eine von zwei sich kreuzenden Geraden die der andern gleichlaufende Ebene zu legen.

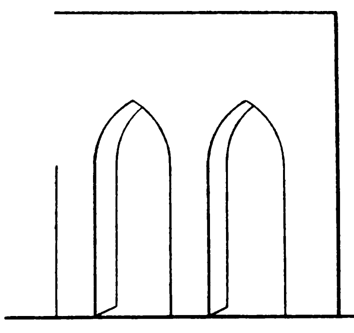
10) Eine mit zwei sich kreuzenden Geraden gleichlaufende Ebene durch einen gegebenen Punkt zu legen.

11) Eine gerade Linie zu ziehen, die gleich weit entfernt bleibt von drei gleichgerichteten Geraden, welche nicht in derselben Ebene sich befinden. (Man lege eine auf diesen senkrechte Ebene.)

12) In einer Ebene zieht man vom Fufspunkte einer gegen sie unter 45^0 geneigten Linie eine Gerade auch unter 45^0 gegen deren Ablotung. Wie grofs ist der von der Geraden und der gegebenen Linie eingeschlossene Winkel? (Man errichte in der Ebene auf der Ablotung im Fufspunkte einer ablotenden Geraden die Senkrechte.)

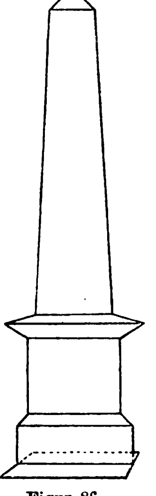
Aufgaben zur Darstellung von Schaubildern.

13) An den in Figur 85 angegebenen, aber erheblich gröfser zu zeichnenden gotischen Bau (von welchem die Seitenansicht der Pfeiler und Bogen noch nicht sogleich mit zu übertragen ist) einen ebensolchen Seitenflügel, entsprechend der Figur 81, anzufügen. Die Horizontlinie werde durch die höchsten Punkte der Thorbogen gelegt, der Hauptpunkt von der Kante an der Ecke aus gleich der $1^1/_2$fachen, der Abstand HA gleich der dreifachen Breite der Hauptzeichnung genommen. Um im Seitenflügel den Spitzbogen die richtige Biegung zu verschaffen, sind bei der Vorderfigur in $^1/_4$ und $^3/_4$ der Thorbreite die Senkrechten bis zum Bogen zu errichten.



Figur 85.

14) Einen Obelisken darzustellen, durch dessen Höhe die Bildebene so geht, dafs sie die linke und rechte Seite des Grundquadrates halbiert. Der Höhenschnitt wird in der Bildfläche punktiert vorgezeichnet (vergl. Figur 120 in **10**, 20), fast doppelt so grofs, als Figur 86 angiebt. Die Horizontlinie werde so tief genommen,



Figur 86.

dafs sie zu sein scheint die Fortsetzung der oberen Grenzlinie des fast quadratischen Teiles.

15) Eine Steinplatte zu zeichnen, deren Grundfläche ein regelmäfsiges Sechseck ist und deren Seitenflächen Quadrate sind. Das Hilfssechseck habe eine Seite in der Grundlinie GL der Figur 82.

16) Eine mit der Grundlinie der Bildfläche gleichliegende Walze von seitwärts angenommenem Standpunkte aus mittels ihrer beiden Grenzkreise darzustellen durch Verbinden der bestimmten 8 Punkte, sowie der äufsersten Grenzpunkte der Kreise.

17) Eine auf quadratischer Steinplatte stehende Säule zu zeichnen. Der Durchmesser ihres oberen Grenzkreises werde gleich $^4/_5$ von dem des Grundkreises genommen. Nur die äufsersten Punkte der Grenzkreise sind zu verbinden zur Darstellung der Säule. Sie kann oben durch ein ringförmiges Stück mit aufgelegter Steinplatte abgeschlossen werden.

18) Einen durchsichtigen Würfel darzustellen, bei welchem jede Ecke bis zur Mitte ihrer Kanten abgestumpft ist. Seine Stellung sei, entsprechend der Figur 83 so, dafs $\angle EKG = 20^0$ ist. Der Eckpunkt D werde in der Linie GL angenommen. Nachdem die Figur mit Bleistift fein gezeichnet ist, sind die nur durch den Körper sichtbaren Grenzlinien mit Tusche (Tinte) fein nachzuziehen und die vorn um so kräftiger, je mehr sie in den Vordergrund treten. Dann werden die Bleistift-Hilfslinien mit Gummi weggerieben, so dafs nur die Kanten des von 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzten Körpers zu sehen sind. (Vergl. Figur 169 und 171.)

19) Ein flaches Arbeitskörbchen zu zeichnen, dessen Boden ein regelmäfsiges Fünfeck von 2 cm Halbmesser ist. Der Rand ist ein gleichliegendes regelmäfsiges Fünfeck von 4 cm Halbmesser und die Höhe des Körbchens (der Abstand der Mittelpunkte) sei 1 cm. Für die Hilfsfigur legt man um einen Punkt mittels des Winkelmessers 5 Winkel von je 72^0, beschreibt um den Punkt Kreise mit 4 und 2 cm Halbmesser und zeichnet die beiden regelmäfsigen Fünfecke fertig. Dann zieht man einen beliebigen Durchmesser des grofsen Kreises. In diesem soll die Bildfläche auf der Ebene der Hilfsfigur senkrecht stehen. Man fällt also auf ihn von allen Eckpunkten die Senkrechten, durch deren Niederlegen der Standort der Eckpunkte in der Bildfläche zu bestimmen ist, und zwar zuerst für den Rand. Nachdem eine wagerechte Linie gezogen ist, die jenen Durchmesser bedeuten soll, wähle man den Mittelpunkt und nehme 5 cm darüber den Hauptpunkt an und für den Abstand 15 cm. Die Lage jedes Eckpunktes im Bilde wird nun nach dem 2. und 3. Satze bestimmt und jeder folgende Bildpunkt sogleich mit dem vorher gefundenen verbunden. Die in den Vordergrund kommenden Fünfecksseiten werden um so mehr verstärkt, je weiter sie in den Vordergrund treten. Dann legt man 1 cm unter der ersten Wagerechten die für den Hilfsdurchmesser des Bodenfünfecks und ermittelt die Lage der Eckpunkte von seinem senkrecht unter dem ersten liegenden Mittelpunkte aus; die Seiten dieses Fünfecks aber ziehe man nur so weit, als sie von den Wänden des Körbchens nicht verdeckt werden. Hat man endlich noch die Kanten der Seitenflächen gezogen, so zeichne man unter dem Körbchen eine quadratische Tischplatte, deren ferne Grenze die erste Wagerechte ist und deren vorderer Rand wieder 1 cm tiefer gelegt wird. Dadurch hebt sich die beliebig entworfene Stellung des zierlichen Körbchens schön hervor.

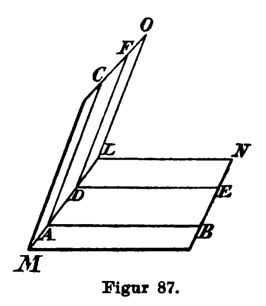
Weiteres über die Herstellung der Schaubilder **10**, 19 und 20.

---

9. Glied. Zwei Ebenen.

a. Die beiden Ebenen schneiden sich.

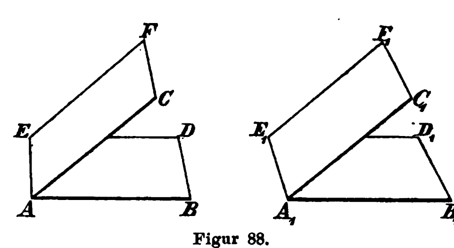
1. Erklärung. Wenn von einer geraden Linie zwei Ebenen auslaufen, so bilden sie einen Flächenwinkel. Die Ebenen sind seine Schenkelebenen, die gerade Linie seine Scheitellinie. Errichtet man auf der Scheitellinie LM in einem Punkte derselben in beiden Schenkelebenen Senkrechte, AB und AC, so bilden sie einen ebenen Winkel CAB, welcher der Neigungswinkel der Schenkelebenen genannt wird.



Figur 87.

In welchen Punkten der Scheitellinie man die Schenkel des Neigungswinkels errichten mag, überall sind die entstehenden Winkel als Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln einander gleich. (8, 7.) Die Ebene des Neigungswinkels steht auf der Scheitellinie senkrecht. (8, 2.)

2. Ls. **Flächenwinkel mit gleichen Neigungswinkeln sind gleich.**



Figur 88.

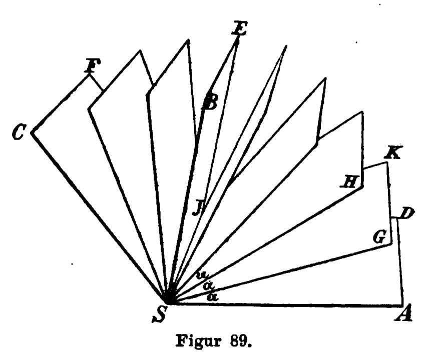
Bw. Bringt man die Neigungswinkel zur Deckung, so fallen auch die Schenkelebenen aufeinander. (8, 2, 1.)

3. Umkehrung. **Gleiche Flächenwinkel haben gleiche Neigungswinkel.**

Bw. durch Deckung der Flächenwinkel.

4. Ls. **Flächenwinkel verhalten sich wie ihre Neigungswinkel.**

Man lege den kleineren Flächenwinkel so in den gröfseren, dafs die Scheitellinie, sowie eine Schenkelebene zusammenfallen, und zeichne bei demselben Punkte S die Neigungswinkel für beide Flächenwinkel; dann liegen deren Schenkel SA, SB, SC in einer Ebene, die auf der Scheitellinie SJ senkrecht steht.



Figur 89.

Bh. $\frac{DSE}{DSF} = \frac{ASB}{ASC}$.

Beim Beweise sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder haben die Neigungswinkel ein gemeinsames Mafs, oder nicht.

Im ersten Falle führe man in der Ebene ASC der beiden Neigungswinkel mit dem gemeinsamen Mafse, dem Winkel ASG, α, die Messung aus. Es habe $\angle ASB\ p\alpha$ und $\angle ASC\ q\alpha$, also

$$\frac{ASB}{ASC} = \frac{p\alpha}{q\alpha} \qquad 1)\ \frac{ASB}{ASC} = \frac{p}{q}.$$

Nun lege man durch die Scheitellinie SJ und jeden Schenkel der Winkel α, SG, SH, . . . eine Ebene; dann entsteht eine Figur, die aussieht wie ein aufgeblättertes Buch. Je zwei benachbarte Ebenen schliefsen einen Flächenwinkel ein, für welchen der betreffende Winkel α der Neigungswinkel ist. (8, 2.) Alle diese Flächenwinkel sind daher gleich grofs, (Nr. 2) und man kann einen von ihnen, KSD, dessen Gröfse mit W bezeichnet werden möge, als Mafs für die gegebenen Flächenwinkel nehmen. Da zu jedem der eingetragenen Winkel α ein Flächenwinkel W gehört, so besitzt der Flächenwinkel DSE pW und DSF qW; mithin

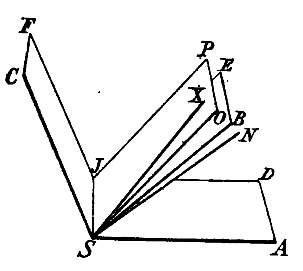
$$\frac{DSE}{DSF} = \frac{pW}{qW} \qquad 2)\ \frac{DSE}{DSF} = \frac{p}{q}.$$

Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

Zweiter Fall. Haben die Neigungswinkel ASB und ASC kein gemeinsames Mafs, so mufs dennoch $\frac{DSE}{DSF} = \frac{ASB}{ASC}$ sein.

Wären die Brüche nicht gleich, so könnte $\frac{DSE}{DSF} > \frac{ASB}{ASC}$ sein. Den zu kleinen Bruch der Neigungswinkel könnte man um so viel vergröfsert denken (durch Vergröfserung des Zählers ASB um den Winkel BSX), dafs er dem andern gleich wird, so dafs

$$3)\ \frac{DSE}{DSF} = \frac{ASX}{ASC}.$$



Figur 90.

Nun könnte man den Winkel ASC mit einem Winkel messen, welcher in ihm aufgeht. Das leistet jeder einfache Bruchteil desselben, $^1/_n$ ASC. Deshalb darf noch die Bedingung gestellt werden, dafs der gewählte Winkel kleiner ist, als die Zugabe BSX. Das Abtragen des gewählten, vielleicht sehr kleinen Winkels in der Ebene $SABC$ beginnt bei SA und schreitet fort, wie in Figur 89 α, α, α . . . Dabei kann kein eingelegter Schenkel in SB kommen, denn dann würden, da das Eintragen in SC schliefst, die beiden Winkel ASB und ASC doch ein gemeinsames Mafs haben, den eben gebrauchten Winkel. Vom letzten Schenkel vor SB (etwa SN) kann der nächste nicht in SX, oder gar dahinter, fallen, weil sonst der Mafswinkel gröfser wäre, als BSX. Also mufs der nächste zwischen SB und SX zu liegen kommen. Legt man nun durch diesen oder einen andern von den dazwischen fallenden, es sei SO, und durch die Scheitellinie SJ die Ebene, so entsteht ein Flächenwinkel DSP, welcher mit DSF ein gemeinsames Mafs besitzt, den Flächenwinkel, dessen Neigungswinkel der gebrauchte Mafswinkel ist. Für sie ist also nach dem ersten Falle

$$4)\ \frac{DSP}{DSF} = \frac{ASO}{ASC}.$$

Die in den Gleichungen 3) und 4) übereinstimmenden Nenner fallen fort, wenn 3) durch 4) dividiert wird; dadurch käme

$$\frac{DSE}{DSP} = \frac{ASX}{ASO}.$$

Das ist aber ein Widerspruch; denn $\frac{DSE}{DSP}$ ist ein echter Bruch, also < 1; aber $\frac{ASX}{ASO}$ ein unechter Bruch, also > 1. Sie können nicht gleich sein. Daher ist die Annahme, $\frac{DSE}{DSF}$ wäre gröfser als $\frac{ASB}{ASC}$, unrichtig.

Es kann aber auch nicht $\frac{DSE}{DSF} < \frac{ASB}{ASC}$ sein. Denn dann würde man den zu grofsen Bruch der Neigungswinkel durch Verkleinern des Zählers *ASB* um so viel vermindert denken, dafs er dem andern gleich wäre; hierauf ebenso verfahren, und käme dann auf dieselbe Ungereimtheit, dafs ein unechter Bruch einem echten gleich sein müfste. Daher sind die Gröfsenverhältnisse auch einander gleich, wenn die Winkel kein gemeinsames Mafs haben.

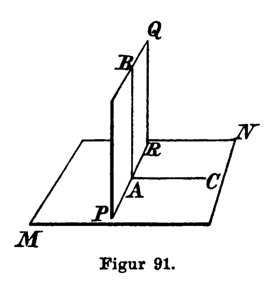
Anmerkung. Das Messen eines Flächenwinkels, welches doch nur mit einer gleichartigen Gröfse, mit einem Flächenwinkel, vollzogen werden könnte, braucht mithin so nicht ausgeführt zu werden. Man mifst bei jedem Flächenwinkel seinen Neigungswinkel mit einem ebenen Winkel in gewöhnlicher Weise, und hat in deren Verhältnis das der Flächenwinkel.

Ein Flächenwinkel, dessen Neigungswinkel ein rechter Winkel ist, heifst ein rechter. Ein Flächenwinkel ist spitz, stumpf, gestreckt, überstumpf, wenn sein Neigungswinkel spitz, stumpf, gestreckt oder überstumpf ist.

Auch die Winkelmessung durch Grade, Minuten und Sekunden läfst sich nun auf das Messen der Flächenwinkel übertragen. Der Flächenwinkel, dessen Neigungswinkel ein ebener Winkelgrad ist, wird als Flächenwinkelgrad genommen. Seine Sechzigstel sind Minuten, und deren Sechzigstel Sekunden. Ein gegebener Flächenwinkel hat so viel von diesen Graden, Minuten und Sekunden, wie sein Neigungswinkel Winkel-Grade, Minuten und Sekunden besitzt, deren Anzahl man auch durch Bogen-Grade, Minuten und Sekunden finden kann.

Erklärung. Erweitert man bei einem Flächenwinkel die eine Schenkelebene über die Scheitellinie hinaus, so entsteht sein Nebenflächenwinkel; die Erweiterungen beider Schenkelebenen über die Scheitellinie bilden seinen Scheitelflächenwinkel.

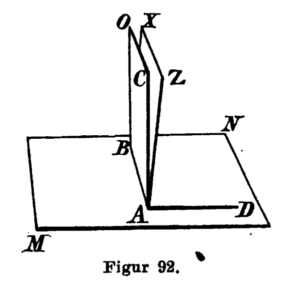
Zusätze. 1) Nebenflächenwinkel sind zusammen gleich zwei Rechten. 2) Scheitelflächenwinkel sind gleich.



Figur 91.

5. Ls. **Jede Ebene, welche durch eine auf einer Grundebene stehende Senkrechte gelegt wird, steht auch auf der Grundebene senkrecht.**

Man zeichne im Fufspunkte *A* der Senkrechten *AB* den Neigungswinkel der gelegten Ebene *PQ* gegen die Grundebene *MN*.



Figur 92.

6. Ls. **Auf einer Ebene kann in einer ihrer Geraden nur eine Ebene senkrecht stehen.** (Figur 92.)

7. Ls. **Errichtet man in einer von zwei aufeinander senkrechten Ebenen auf der Schnittlinie eine Senkrechte, so steht sie auf der andern Ebene senkrecht.**

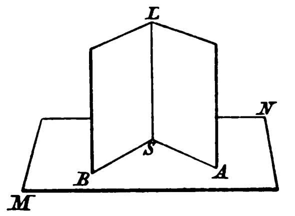
Bw. wie zu Nr. 5. (Figur 91.)

Zs. Durch eine einer Grundebene gleichlaufende Gerade ist nur eine Ebene rechtwinklig zur Grundebene zu legen.

Bw. Wäre durch BQ (Figur 91) noch eine zweite Ebene senkrecht auf MN möglich, so könnte man, wie BA auf PR, auch BA_1 auf die Schnittlinie P_1R_1 der zweiten Ebene fällen, die dann beide . . . .

8. Umkehrung. **Errichtet man auf einer von zwei aufeinander senkrechten Ebenen in einem Punkte der Schnittlinie die Senkrechte, so liegt sie in der andern Ebene.**

Käme sie vor oder hinter die Ebene, so könnte man in dieser auf der Schnittlinie in demselben Punkte die Senkrechte AB errichten (Figur 91) und fände durch Nr. 7 Widerspruch mit 8, 2, 1.



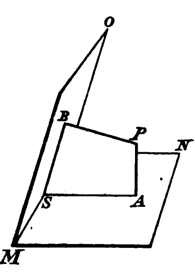
Figur 93.

9. Ls. **Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer Grundebene senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie auf der Grundebene senkrecht.**

Bw. Stände die Schnittlinie SL nicht auf MN senkrecht, so könnte man in S auf der Ebene MN die Senkrechte errichten. Diese müfste nach Nr. 8 in jeder der beiden Ebenen AL und BL liegen, die dann in zwei geraden Linien sich schnitten, was nicht möglich ist.

Zusätze. 1) Durch eine auf einer Grundebene schief stehende gerade Linie ist nur eine Ebene senkrecht zur Grundebene zu legen.

2) **Fällt man von einem Punkte Lote auf zwei sich schneidende Ebenen, so steht deren Schnittlinie auf der durch die Lote bestimmte Ebene senkrecht.** (Figur 94.) Daher ist $\angle ASB$ der Neigungswinkel der Ebenen; er ergänzt den von den Loten gebildeten Winkel APB zu 2 Rechten.



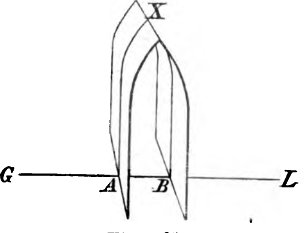
Figur 94.

b. Die beiden Ebenen sind gleichlaufend.

10. Ls. **Zwei auf derselben Geraden senkrecht stehende Ebenen sind gleichlaufend.** (8, 3, 2.)

Bw. Könnten sie sich schneiden, so würde man durch die Gerade GL und einen Punkt X der Schnittlinie eine Ebene legen, welche dieselbe in geraden Linien, AX und BX, schneiden müfste, und es würde ein geradliniges Dreieck XAB mit zwei rechten Winkeln entstehen, was nicht möglich ist.

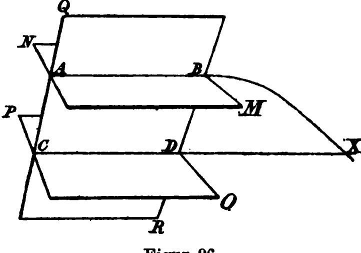
Zs. Von einem aufserhalb einer Geraden gegebenen Punkte kann man auf diese nur eine Ebene senkrecht legen.



Figur 95.

Aufgabe. Durch einen aufserhalb einer Ebene gegebenen Punkt eine mit dieser gleichlaufende Ebene zu legen.

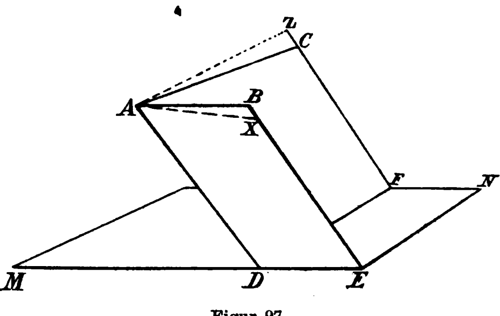
11. Ls. **Gleichlaufende Ebenen werden von einer Ebene in gleichlaufenden Linien geschnitten.**



Figur 96.

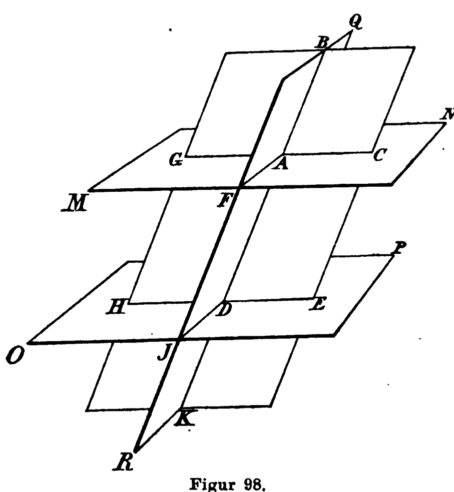
Bw. Wären die Schnittlinien *AB* und *CD* nicht gleichlaufend, so müfsten sie, da sie in einer Ebene (*QR*) liegen, sich schneiden. Ihr Schnittpunkt *X* gehörte, als Punkt der Linie *CD*, der Ebene *OP* an, und als Punkt der Linie *AB* auch der Ebene *MN*. Die beiden gleichlaufenden Ebenen würden sich also treffen.

12. Ls. **Winkel mit paarweise gleichlaufenden Schenkeln haben gleichlaufende Ebenen.**



Figur 97.

Bw. Zum ersten Winkel *BAC* sei der zweite entweder *EDF* oder sein Nebenwinkel *FDM*. Wäre mit der Ebene *MN* dieser beiden die Ebene des Winkels *BAC* nicht gleichlaufend, so könnte man durch seinen Scheitel *A* die der *MN* gleichlaufende Ebene legen. Diese Ebene würde die Ebenen *AE* und *AF* der Schenkelpaare etwa in *AX* und *AZ* schneiden, oder wenigstens die eine in einer andern Linie als *AB* oder *AC*. Nach Nr. 11 wäre dann $AX \parallel DE$, aber auch $AB \parallel DE$, also müfste $AX \parallel AB$ sein. Fiele *AX* mit *AB* zusammen, so käme man mit *AZ* und *AC* auf diesen Widerspruch. Mithin müssen die Ebenen der Winkel gleichlaufend sein.



Figur 98.

13. Ls. **Werden zwei gleichlaufende Ebenen von einer Ebene geschnitten, so sind von den entstehenden 8 Flächenwinkeln je zwei gleichliegende und je zwei Wechselwinkel gleich, und es sind je zwei entgegengesetzte und je zwei abgewandte Winkel zusammen gleich zwei rechten Flächenwinkeln.**

Nachdem für den Flächenwinkel *QFN* bei *A* der Neigungswinkel *BAC* gezeichnet ist, mufs nachgewiesen werden, dafs die Erweiterung seiner Ebene im Schnitt mit der zweiten Ebene *OP* bei *D* Neigungswinkel entstehen läfst.

Anmerkung. In die Umkehrung dieses Satzes mufs die Bedingung aufgenommen werden, dafs die Schnittlinien *AF* und *DJ* gleichlaufend sind.

Bw. durch Satz 12.

14. Ls. **Ist eine gerade Linie mit einer von zwei gleichlaufenden Ebenen gleichlaufend, so ist sie auch mit der andern gleichlaufend oder sie liegt ganz in ihr.**

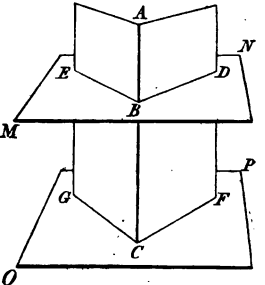
Bw. Man lege durch die gerade Linie und einen Punkt der ihr gleichlaufenden Ebene eine Ebene, so wird die Schnittlinie mit der gegebenen gleichlaufend. (8, 11.) Durch die Schnittlinie und einen Punkt der zweiten Ebene legt man wieder eine Ebene; die entstehende Schnittlinie wird der ersten, also auch der gegebenen Linie gleichlaufend. (Nr. 11 und 8, 6.) Mithin ist diese mit der andern Ebene gleichlaufend. (8, 10.) Weifs man, dafs die Gerade mit der zweiten Ebene einen Punkt gemeinsam hat, so wählt man diesen beim Legen der zweiten Hilfsebene.

15. Ls. **Schneidet eine gerade Linie die eine von zwei gleichlaufenden Ebenen, so schneidet sie auch die andere.**

Das Gegenteil wird durch Nr. 14 abgewiesen.

16. Ls. **Eine Gerade, welche auf einer von zwei gleichlaufenden Ebenen senkrecht steht, ist auch auf der andern senkrecht.**

Man lege durch die Gerade *ABC* (Figur 99) zwei Ebenen und wende den Satz Nr. 11 an.



Figur 99.

17. Verallgemeinerung. **Eine Gerade schneidet gleichlaufende Ebenen unter gleichen Neigungswinkeln.**

Einen Punkt der Geraden lote man auf die Ebenen ab und lege durch die Senkrechte und die Gerade eine Ebene.

Läfst sich dieser Satz umkehren?

18. Ls. **Gleichlaufende Gerade zwischen gleichlaufenden Ebenen sind gleich.**

Figur 96 giebt an, was zu thun ist, um zu beweisen, dafs die Strecken *AC* und *BD* gleich sind.

Zs. Gleichlaufende Ebenen haben überall gleichen Abstand. (Figur 99.)

19. Übungen.

1) Ist eine Ebene einer andern gleichlaufend, so ist jede in ihr liegende Gerade mit der andern Ebene gleichlaufend.

2) Stehen drei oder mehr Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, auf derselben Seite einer Ebene gleich weit von ihr ab, so liegen alle in einer Ebene, welche mit jener gleichlaufend ist.

3) Zu bestimmen den Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Ebenen gleichen Abstand haben, wenn die Ebenen *a*) gleichlaufend sind, oder *b*) sich schneiden.

4) Unter welcher Bedingung sind zwei Ebenen, die auf einer Grundebene senkrecht stehen, gleichlaufend?

5) Stehen auf einer Grundebene eine Ebene und eine gerade Linie (welche nicht in dieser liegt) senkrecht, so sind sie gleichlaufend.

6) Die Umkehrung dieses Satzes mufs lauten: Sind eine Gerade und eine Ebene gleichlaufend, so steht eine auf der Geraden senkrechte Ebene auch auf der Ebene senkrecht.

Figur 100.

7) Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht auf diesen senkrecht.

8) Durch einen aufserhalb zweier Ebenen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche auf beiden senkrecht steht.

9) Zwischen zwei sich kreuzenden Geraden diejenige Verbindungslinie zu ziehen, welche auf beiden senkrecht steht. (Figur 100.)

---

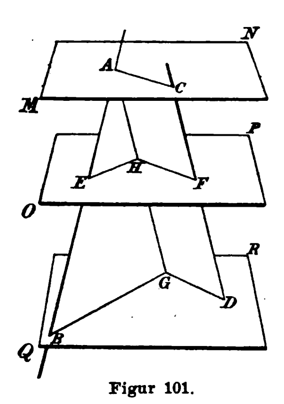
10. Glied. Drei Ebenen.

a. Drei gleichlaufende Ebenen.

1. Ls. **Sind zwei Ebenen einer dritten gleichlaufend, so sind sie selbst gleichlaufend.**

Bw. durch eine auf der dritten Ebene errichtete Gerade. (9, 16 und 10.)

Zusätze. 1) Schneidet eine Ebene die eine von zwei gleichlaufenden Ebenen, so schneidet sie auch die andere.



Figur 101.

2) Durch einen aufserhalb einer Ebene liegenden Punkt ist nur eine ihr gleichlaufende Ebene möglich.

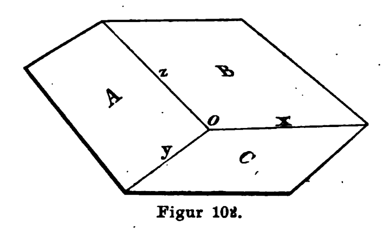
2. Ls. **Drei gleichlaufende Ebenen schneiden von zwei geraden Linien verhältnisgleiche Strecken ab.**

Bh. $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}$, auch $\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{CF}$

und $\frac{AB}{EB} = \frac{CD}{FD}$.

Bw. Man ziehe durch A die der CD gleichlaufende Gerade AG. Die durch AG und AB, und die durch AG und CD bestimmten Ebenen schneiden die gegebenen Ebenen in gleichlaufenden Geraden, woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

b. Drei sich schneidende Ebenen.



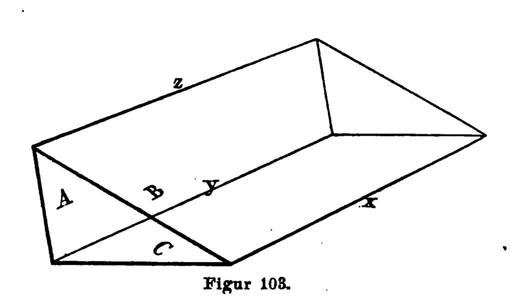
Figur 102.

3. Ls. **Die drei Schnittlinien dreier Ebenen müssen entweder durch einen Punkt gehen oder gleichlaufend sein.**

Bw. 1) Wenn die Schnittlinien x und y sich schneiden, so gehört der Schnittpunkt O als Punkt der Linie x der Ebene B an und als Punkt der Linie y auch der Ebene A. Der

den Ebenen A und B gemeinsame Punkt O mufs also ein Punkt ihrer Schnittlinie z sein. Also gehen alle drei Schnittlinien durch denselben Punkt O.

Wenn 2) die Schnittlinien x und y gleichlaufend sind, so kann z, wiewohl sie mit x in einer Ebene läuft, die Linie x nicht schneiden; denn sonst müfste auch y nach 1) durch diesen Punkt gehen, also die Linie x dort treffen, während sie ihr gleichlaufend sein sollte.



Figur 103.

Anmerkung 1. Zu den möglichen Lagen dreier Ebenen gehört noch der Fall, dafs alle drei in derselben Geraden sich schneiden.

Anmerkung 2. Diesem Lehrsatze über Raumgröfsen entspricht kein Satz in der Lehre von den Gröfsen in einer Ebene.

4. Erklärungen. Drei Ebenen, welche in drei gleichlaufenden Geraden sich schneiden, umschliefsen einen dreiseitigen prismatischen Raum, der nach zwei Seiten offen ist. (Figur 103.) Drei Ebenen, deren drei Schnittlinien durch denselben Punkt gehen, bilden eine dreiseitige körperliche Ecke. (Figur 102.)

Legt man mehr als drei Ebenen so, dafs immer die neue Ebene durch eine Gerade geht, welche in der vorhergehenden Ebene mit ihrer Schnittlinie gleichlaufend gezogen ist, so wird auch die Schnittlinie der letzten und ersten Ebene allen andern gleichlaufend (zu begründen durch die erste und vorletzte Schnittlinie wie bei Nr. 3, 2), und es entsteht ein mehrseitiger prismatischer Raum. Mehr als drei Ebenen, deren Schnittlinien von demselben Punkte auslaufen, bilden eine mehrseitige körperliche Ecke.

Der Schnittpunkt ist der Scheitel der Ecke, die Schnittlinien heifsen die Kanten der Ecke oder des prismatischen Raumes, die Ebenen Seitenebenen oder kurz Seiten.

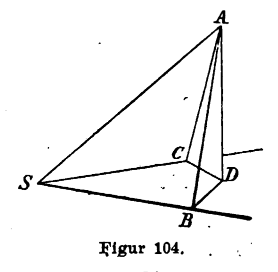
Eine dreiseitige körperliche Ecke hat drei Seitenwinkel oder kurz Seiten und drei Flächenwinkel oder kurz Winkel. In der kurzen Ausdrucksweise tritt die Übereinstimmung der Sätze über dreiseitige Ecken mit den Sätzen über Dreiecke deutlich hervor.

α) Eine dreiseitige Ecke.

5. Ls. **Gleichen Seiten einer dreiseitigen Ecke liegen gleiche Winkel gegenüber.**

Vs. Seitenwinkel $ASB = ASC$.

Bh. Flächenwinkel an der Kante SC ist gleich dem an der Kante SB.



Figur 104.

Bw. Von einem beliebigen Punkte A der Kante der gleichen Seitenwinkel fälle man Senkrechte auf die gegenüberliegende Seitenebene BSC und auf ihre Kanten SB und SC, und verbinde D mit B und C. Dadurch entstehen die Neigungswinkel ABD und ACD der Flächenwinkel an den Kanten SB und SC. (8, 9, 4.)

Dafs die Neigungswinkel, und darum auch die Flächenwinkel gleich sind, ist durch übereinstimmende Dreiecke mit ASB und ASC anfangend, leicht zu beweisen.

Anmerkung. Man verlängere BS und CS über S hinaus als SB_1 und SC_1. Die Nebenwinkel ASB_1 und ASC_1 und der Scheitelwinkel B_1SC_1 bilden eine neue Ecke mit zwei stumpfen Seitenwinkeln. Sind diese gleich, so sind auch die gegenüberliegenden stumpfen Flächenwinkel gleich; denn beim Beweise entsteht an der Ecke dieselbe Figur 104, von deren Winkeln man auf die Gleichheit ihrer Nebenwinkel schliefst.

Zs. Eine Ecke mit drei gleichen Seiten hat auch die drei Winkel gleich.

6. Umkehrung. **Gleichen Winkeln einer dreiseitigen Ecke liegen gleiche Seiten gegenüber.**

Bw. ebenso, nur in umgekehrter Folge.

Zs. Eine dreiseitige Ecke mit 3 gleichen Winkeln ist gleichseitig.

7. Ls. **Die gröfsere von zwei Seiten einer dreiseitigen Ecke hat den gröfseren Gegenwinkel.**

Vs. $\angle ASB > ASC$.

Nun sind die betreffenden rechtwinkligen Dreiecke nur zum Teil übereinstimmend. (1. T., 7, 3 und 7, 5, 2.)

Zs. In einer dreiseitigen Ecke liegt der gröfsten Seite der gröfste Winkel gegenüber.

Figur 105.

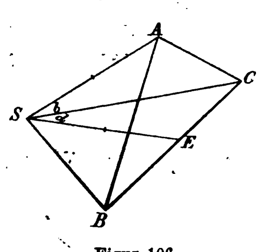


8. Ls. **Der gröfsere von zwei Winkeln einer dreiseitigen Ecke hat die gröfsere Gegenseite.**

Abweisend zu verfahren.

Zs. Dem gröfsten Winkel einer dreiseitigen Ecke liegt die gröfste Seite derselben gegenüber.

9. Ls. **In einer dreiseitigen Ecke ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte Seite.**



Figur 106.

Bw. Ist von den Seitenwinkeln a, b, c a der gröfste, so ist natürlich $a + b > c$ und $a + c > b$; es ist nur zu beweisen, dafs die Summe der kleineren, $b + c$, doch gröfser als a ist.

Vom gröfsten Seitenwinkel a (CSB) schneide man den Seitenwinkel b (CSA) ab, so dafs $\angle CSE$ oder $d = b$ ist; ziehe durch die Schenkel des Winkels a beliebig die Gerade CB, welche den freien Schenkel des Winkels d in E schneidet; mache $SA = SE$ und verbinde A mit B und C.

Da $\triangle CSE \cong CSA$, ist $CE = CA$; daher wird aus $AB > BC - CA$ $AB > BE$ und darum in den nur zum Teil übereinstimmenden Dreiecken BSA und BSE $\angle BSA$ oder $c > BSE$. Fügt man $b = d$ hinzu, so ergiebt sich $b + c > a$.

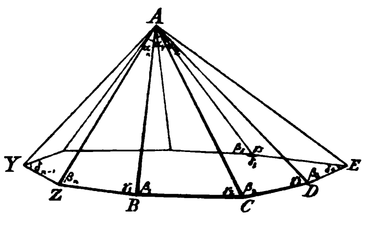
Zs. In einer dreiseitigen Ecke ist der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte. Denn aus $b + c > a$ folgt $c > a - b$ und $b > a - c$.

10. Die Summe der Seitenwinkel jeder dreiseitigen Ecke ist kleiner als 4 Rechte. Allgemeiner: **Die Summe der n Seitenwinkel einer Ecke** (die keine einspringenden Seitenebenen hat) **ist kleiner als 4 R.**

Bw. Wir bezeichnen die Seitenwinkel der $n$seitigen Ecke A mit α_1, α_2, α_3, . . . α_n. Es ist zu beweisen, dafs die Summe aller α, oder in Zeichen

$$S(\alpha) < 4 \text{ R}$$

ist. Wir legen durch alle Seitenebenen der Ecke eine Grundebene. Die Schnittfigur wird, da jede Seitenebene eine Linie liefert, ein n-Eck. Jeder Eckpunkt desselben ist die Spitze einer dreiseitigen Ecke. Wir nennen bei jeder, auf die Spitze blickend, den rechts liegenden Winkel β, den linken γ und den Winkel des Grundvielecks δ, und geben diesen Buchstaben ringsherum die Marken von 1 bis n. Nach dem vorhergehenden Satze ist



Figur 107.

$$\begin{array}{l} \beta_1 + \gamma_1 > \delta_1 \\ \beta_2 + \gamma_2 > \delta_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \beta_n + \gamma_n > \delta_n \\ \hline S(\beta) + S(\gamma) > S(\delta). \end{array}$$

Die Summe der Winkel δ des n-Ecks ist $n \cdot 2 \text{ R} - 4 \text{ R}$, also

$S(\beta) + S(\gamma) > n \cdot 2 \text{ R} - 4 \text{ R}$, und die Summe der Winkel der n Seitendreiecke

$$\begin{array}{c} S(\alpha) + S(\beta) + S(\gamma) = n \cdot 2 \text{ R} \\ \hline S(\alpha) < 4 \text{ R.*)} \end{array}$$

mithin

β) Polarecken.

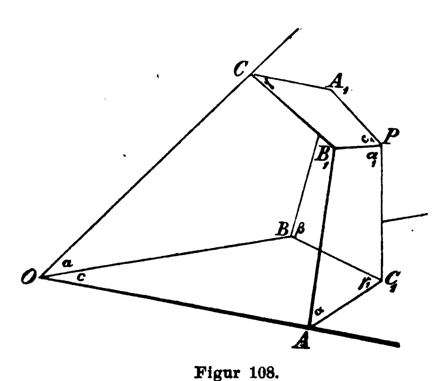
11. Vorbereitung. In Figur 94 zu **9**, 9, 2) wurden vom Punkte P auf die Schenkelebenen eines Flächenwinkels Lote gefällt. Es zeigte sich, dafs auf der Ebene $APBS$ der Lote die Scheitellinie MS senkrecht steht, so dafs die Ebene der Lote die eines Neigungswinkels ASB ist, und dafs in dem Lotviereck $APBS$ $\angle S + P = 2$ R.

Was dort für 1 Schnittlinie zweier Ebenen gemacht wurde, soll nun für 3 Schnittlinien dreier Ebenen ausgeführt werden.

Die dortige Scheitellinie MS ist in Figur 108 OB; man erkennt das Lotviereck in BC_1PA_1 wieder, auf welchem OB senkrecht steht. Hier ist

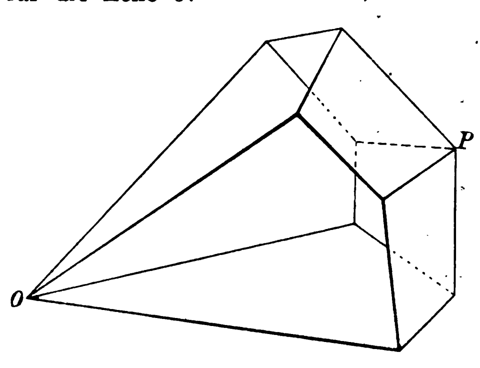
*) Stellt man durch die gestreckten Finger einer Hand eine fünfseitige Ecke dar, stützt die Fingerspitzen auf den Tisch und drückt die Hand langsam nieder, so spreizen sich die Finger mehr, die Winkel der Ecke werden gröfser, und erst, wenn die Hand platt auf den Tisch kommt, werden sie zu Winkeln um einen Punkt in der Ebene, die 4 Rechte betragen. — Durch diesen Spafs ist obiger Satz leicht zu behalten. — Von einer $n$seitigen Ecke mit einspringenden Seitenebenen kann der Satz auch gelten. Beim Schliefsen eines noch senkrecht gehaltenen aufgespannten Regenschirmes werden die Zeugstücke zu einspringenden Seitenflächen. Die Summe der Seitenwinkel würde erst zu 4 R, wenn die geradlinig gedachten Stangen des Regenschirmes beim Aufspannen bis in eine Ebene gebracht werden könnten. Wird dabei aber der Bezug noch nicht straff, so kann man mit dem Schirme $n$seitige Ecken darstellen, bei denen die Summe der Seitenwinkel $>$ 4 R ist.

nun vom Punkte P ein drittes Lot PB_1 auf die Vorderebene AOC der dreiseitigen Ecke gefällt. Es liefert PB_1 mit jedem der beiden ersten Lote ein solches Lotviereck, nämlich PA, auf welchem OA senkrecht ist, und PC, zu dem OC rechtwinklig läuft.



Figur 108.

Die drei Lote PA_1, PB_1 und PC_1 sind die Kanten einer dreiseitigen Ecke P. Für ihren Flächenwinkel an der Kante PC_1, APB, ist $\angle AC_1B$ Neigungswinkel und O Ausgangspunkt zweier Lote OB und OA, die auf seinen Schenkelebenen senkrecht stehen, und $BOAC_1$ ist das Lotviereck. Dazu kommt OC als Lot zur dritten Seitenebene PC, und giebt für den Flächenwinkel an der Kante PA_1, BPC, das Lotviereck $BOCA_1$, und für den Flächenwinkel an der Kante PB_1, APC, das Lotviereck $AOCB_1$. Für die dreiseitige Ecke P spielt also der Punkt O dieselbe Rolle, wie der Punkt P für die Ecke O.



Figur 109.

Jede von O ausgehende neue Kante bringt ihr Lotviereck hinzu. Figur 109.

12. Erklärung. Fällt man von einem beliebigen Punkte innerhalb einer Ecke auf jede Seitenebene das Lot, so werden die Lote die Kanten einer Ecke, welche die Polarecke der gegebenen heifst.

Dies pafst, wie gezeigt, nicht nur für den Punkt P und die Ecke O, sondern auch für den Punkt O und die Ecke P. Also ist die Ecke P Polarecke der Ecke O und auch O die Polarecke von P. Daher

Ls. Jede Ecke ist Polarecke ihrer Polarecke.

13. Bei der dreiseitigen Ecke O (Figur 108) bezeichnen wir den Seitenwinkel AOB, welcher der Kante OC gegenüberliegt, mit c und den Neigungswinkel A_1CB_1 des Flächenwinkels an der Kante OC mit γ; entsprechend bei des Ecke P den Seitenwinkel A_1PB_1, der Kante PC_1 gegenüber, mit c_1 und den Neigungswinkel AC_1B des Flächenwinkels an dieser Kante PC_1 mit γ_1. Ebenso von der Kante OA aus a und α, von PA_1 aus a_1 und $CA_1B = \alpha_1$; endlich für OB (wo die Buchstaben nicht gut in der Figur anzubringen sind) b, β, b_1 und $CB_1A = \beta_1$.

Wie schon 9, 9, 2) gezeigt wurde, hat man wegen der beiden andern rechten Winkel im Lotvierecke

OC_1	$c + \gamma_1 = 2\,\mathrm{R}$	und in PC	$c_1 + \gamma = 2\,\mathrm{R}$
OA_1	$a + \alpha_1 = 2\,\mathrm{R}$	„ „ PA	$a_1 + \alpha = 2\,\mathrm{R}$
OB_1	$b + \beta_1 = 2\,\mathrm{R}$	„ „ PB	$b_1 + \beta = 2\,\mathrm{R}.$

Dies lehrt für beide Ecken:

Jeder Seitenwinkel einer dreiseitigen Ecke wird durch den Neigungswinkel an der auf seiner Ebene senkrechten Kante der Polarecke zu zwei Rechten ergänzt.

14. Ls. **Die Summe der Flächenwinkel einer dreiseitigen Ecke ist gröfser als zwei Rechte und kleiner als sechs Rechte.**

Bh. $2\,R < \alpha + \beta + \gamma < 6\,R$.

Bw. Die zweite Gruppe der Gleichungen in Nr. 13 giebt für die Neigungswinkel und Seitenwinkel die Summe

$$\alpha + \beta + \gamma + a_1 + b_1 + c_1 = 6\,R$$

also ist $\alpha + \beta + \gamma$ allein weniger als 6 R, und weil die Summe der Seitenwinkel $a_1 + b_1 + c_1 < 4\,R$ ist, (Nr. 10) so bleibt beim Abziehen

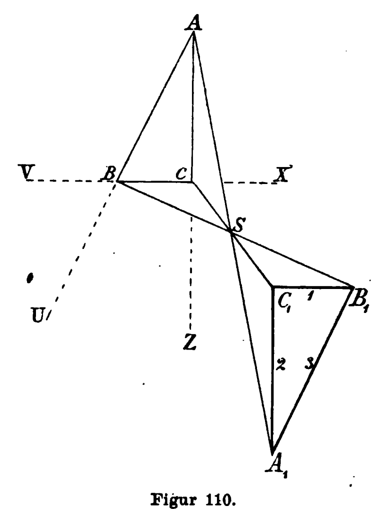
$$\alpha + \beta + \gamma > 2\,R.$$

Die Flächenwinkel betragen für ihr Mafs (den rechten Flächenwinkel oder den Flächenwinkelgrad) ebenso viel, wie die Neigungswinkel für ihr Mafs (**9**, 4, nebst Anm.); also ist die Summe der Flächenwinkel gröfser als 2 und kleiner als 6 rechte Flächenwinkel.

Anmerkung. Während die Winkelsumme bei allen Dreiecken eine feste Zahl, 2 R, ist, haben die dreiseitigen Ecken keine bestimmte Zahl für die Summe ihrer Flächenwinkel; sie ist für jede dreiseitige Ecke besonders zu berechnen und es mufs mehr als 2 R und weniger als 6 R herauskommen. In dieser Eigenschaft der Winkelsumme entspricht die dreiseitige Ecke nicht dem Dreieck, und darum können in ihr auch mehr als 1 rechter oder stumpfer Winkel vorkommen. Die Decke und zwei Wände des Zimmers bilden eine dreiseitige Ecke mit drei rechten Flächenwinkeln; die Figur 102 in **10**, 3 zeigt eine Ecke *O* mit drei stumpfen Flächenwinkeln, die, wenn man die Fläche *B* nach hinten und *A* nach links mehr zur Grundebene niederdrückt, noch gröfser werden und erst bei völligem Niederlegen der Seitenflächen in die Grundebene zu gestreckten Flächenwinkeln werden, also dann zusammen 6 R betragen würden; aber es haben die bisherigen Seitenflächen *A*, *B*, *C* nun aufgehört eine Ecke zu bilden. Kurz vorher waren also die drei Flächenwinkel zusammen weniger als 6 R.

γ) Scheitelecken.

15. Erweitert man alle Seitenebenen einer Ecke über den Scheitel hinaus, so entsteht ihre Scheitelecke. Die Seitenwinkel beider sind paarweise gleich als Scheitelwinkel; auch die Flächenwinkel sind paarweise gleich, als Flächenscheitelwinkel, wie man an der in Figur 110 gezeichneten dreiseitigen Ecke mit den Kanten *SA*, *SB*, *SC* deutlich sieht, wenn man sich die Ebenen auch seitwärts gehörig erweitert denkt. Wiewohl beide Ecken in allen entsprechenden Stücken übereinstimmen, sind sie doch nicht deckbar. Be-



Figur 110.

zeichnet man die Seitenwinkel der Gröſse nach mit 1, 2, 3, so ist ihre Folge in der nach vorn offenen Ecke der Bewegung des Uhrzeigerlaufes entgegengesetzt (links herum), in der nach hinten gerichteten Ecke aber (in die man hineinsieht, wenn man das Blatt aufschlägt und gegen das Licht hält) ist die Gröſsenordnung so, wie die Uhrzeiger gehen (rechts herum). Von den Flächenwinkeln α, β, γ gilt dasselbe. Wegen dieser in den Scheitelecken entgegengesetzten Richtung in der Anordnung der Stücke ist es nicht möglich, die Ecken zur Deckung zu bringen. Legt man einen Flächenwinkel in den ihm gleichen, so treten ungleiche Seitenwinkel in die Seitenebenen und die dritten Ebenen kommen nicht zusammen.

Unsere Hände haben die Finger, die Füſse die Zehen in umgekehrter Ordnung; darum paſst der linke Handschuh nicht auf die rechte Hand. Ebene Figuren mit umgekehrter Richtung der Ordnung der Stücke, z. B. die beiden rechtwinkligen Dreiecke, in welche ein gleichschenkliges Dreieck durch die zur Grundseite gehörige Höhe geteilt wird, sind zur Deckung zu bringen, weil man sie umwenden kann.

Bei den Raumgröſsen hat man zu unterscheiden, ob sie ganz übereinstimmen oder nur rückwärts stimmen.

δ) Deckbare dreiseitige Ecken.

16. Einleitung. Die 6 Stücke einer dreiseitigen Ecke, 3 Seitenwinkel und 3 Flächenwinkel, lassen sich zu je drei Bestimmungsstücken verbinden auf folgende Weisen:

1 Seitenwinkel und 2 Flächenwinkel, und zwar die beiden anliegenden oder ein anliegender und der gegenüberliegende;

2 Seitenwinkel und 1 Flächenwinkel, und zwar der eingeschlossene oder ein gegenüberliegender;

3 Seitenwinkel; endlich 3 Flächenwinkel.

Das sind dreimal zwei, also sechs mögliche Fälle.

Wir ordnen diese so, daſs die ersten aus den Paaren vorangehen und die zweiten in umgekehrter Reihe folgen.

17. Die 6 Deckbarkeitssätze. **Dreiseitige Ecken sind übereinstimmend oder rückwärts stimmend,***) wenn sie entsprechend gleich haben

1) a, β, γ, einen Seitenwinkel und die beiden anliegenden Flächenwinkel,

2) a, b, γ, zwei Seitenwinkel und den eingeschlossenen Flächenwinkel,

3) a, b, c, die drei Seitenwinkel,

4) α, β, γ, die drei Flächenwinkel,

5) a, b, α (β), zwei Seitenwinkel, einen gegenüberliegenden Flächenwinkel und wenn die andern gegenüberliegenden Flächenwinkel nicht zusammen zwei Rechte betragen,

6) α, β, a (b), zwei Flächenwinkel, einen gegenüberliegenden Seitenwinkel und wenn die andern gegenüberliegenden Seitenwinkel nicht zusammen zwei Rechte betragen. [Vergl. Nr. 18, 5) und 6).]

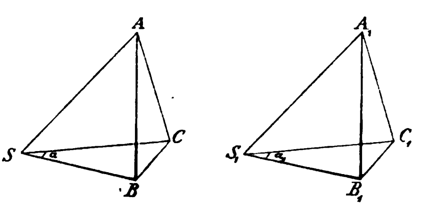
Beweise. Sind die Stücke der zweiten Ecke in entgegengesetzter Richtung geordnet, so nimmt man ihre Scheitelecke und zeigt, daſs diese mit der ersten deckbar ist; dann sind die gegebenen Ecken rückwärls stimmend.

---

*) Symmetrisch ist rückwärts stimmend.

Um die räumliche Lage der Kanten im Blick festhalten zu können, sind in den Figuren die Seitenebenen der Ecken entsprechend abgegrenzt.

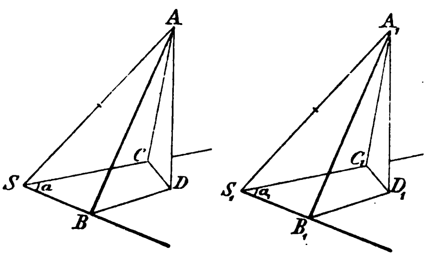
Bei 1) und 2) ist leicht zu zeigen, dafs die Ecken S und S_1 sich decken, wenn man die eine so in die andere schiebt, dafs die gleichen Seitenwinkel a_1 und a zusammenfallen.



Figur 111.

Anmerkung. Sowohl in übereinstimmenden, als auch in rückwärts stimmenden dreiseitigen Ecken liegen gleichen Seitenwinkeln gleiche Flächenwinkel und gleichen Flächenwinkeln gleiche Seitenwinkel gegenüber, weil bei der Deckung diese selbst oder mit deren Scheitelwinkeln zusammenfielen.

Bei 3) schneide man auf den entsprechenden Kanten SA und S_1A_1 gleiche Strecken ab und zeichne von den erhaltenen Endpunkten A und A_1 aus die Neigungswinkel der Flächenwinkel an den beiden andern Kanten. (8, 9, 4.) Aus übereinstimmenden Dreiecken erhält man $S_1B_1 = SB$ und $S_1C_1 = SC$, und nun kann man die beiden Vierecke $B_1S_1C_1D_1$ und $BSCD$ zur Deckung bringen, indem man $\angle a_1$ auf $\angle a$ legt. Daraus hat man $C_1D_1 = CD$ für $\triangle A_1C_1D_1 \cong ACD$, daher $\angle \gamma_1 = \gamma$, und nun stimmen die Ecken nach 2) überein.

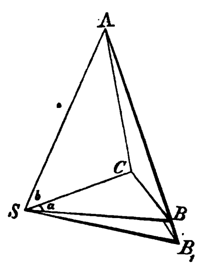


Figur 112.

4) Sind die drei Flächenwinkel α, β, γ in beiden Ecken entsprechend gleich, so denke man sich zu jeder Ecke ihre Polarecke. Die Seitenwinkel (a', b', c') der Polarecken ergänzen die Neigungswinkel der gegebenen Flächenwinkel zu zwei Rechten (Nr. 13), sind daher entsprechend gleich. Deshalb sind nach 3) die beiden Polarecken deckbar (oder, wenn in den gegebenen Ecken die Stücke in entgegengesetzter Richtung geordnet sind, rückwärts stimmend); mithin sind in ihnen die Flächenwinkel (α', β', γ') entsprechend gleich und deshalb auch (nach Nr. 13) die Seitenwinkel a, b, c, a_1, b_1, c_1 der gegebenen Ecken; weshalb sie nach 3) übereinstimmend sind (oder rückwärts stimmend).

5) Voraussetzung: $a_1 = a$, $b_1 = b$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta + \beta_1 \gtrless 2$ R.

Man stecke die zweite Ecke so in die erste, dafs der Scheitel S_1 in S kommt und an SA die gleichen Flächenwinkel α_1 und α zusammenfallen. Wegen Gleichheit der Seitenwinkel b_1 und b kommt dabei die Kante S_1C_1 in SC. Bliebe nun die dritte Seitenebene der einen Ecke unter der Grundfläche der andern Ecke, so entstände hier am Scheitel S eine schmale dreiseitige Ecke, die, wegen $a_1 = a$, gleichschenklig wäre, also die Flächenwinkel an den Kanten SB_1 und SB gleich haben müfste. (Nr. 5.) Ihre dritte Seitenebene BSB_1 ist aber die Fortsetzung der Ebene ASB, mit welcher die Seitenebene $A_1S_1B_1$ des Flächenwinkels α_1



Figur 113.

zusammengelegt wurde. Daher wären an der Kante SB zwei Nebenflächenwinkel, nämlich β und der, welcher in der gleichschenkligen Ecke gleich β an der Kante SB_1 sein müfste; also würde $\beta + \beta_1 = 2$ R sein, was der Voraussetzung widerspricht. Es müssen auch die dritten Seitenebenen zusammenfallen; die Ecken decken sich.

6) Es sollen α, β, a in beiden Ecken entsprechend gleich und $b + b_1 \lessgtr 2$ R sein. Dies sind die entgegengesetzten Stücke von denen in 5). Auf diese kommt man zurück durch die Polarecken der gegebenen. Wegen der Ergänzung zu zwei Rechten haben sie a', b', α' entsprechend gleich und $\beta' + \beta_1' \lessgtr 2$ R, sind also nach dem vorigen Satze deckbar (oder rückwärts stimmend) und haben deshalb auch die übrigen Stücke, α', β', a', entsprechend gleich, sowie $b' + b_1' \lessgtr 2$ R, woraus wieder nach Nr. 13 folgt, dafs in den gegebenen Ecken a, b, α entsprechend gleich sind, und $\beta + \beta_1 \lessgtr 2$ R ist, weshalb auch diese, nach dem vorhergehenden Satze, deckbar oder rückwärts stimmend sind.

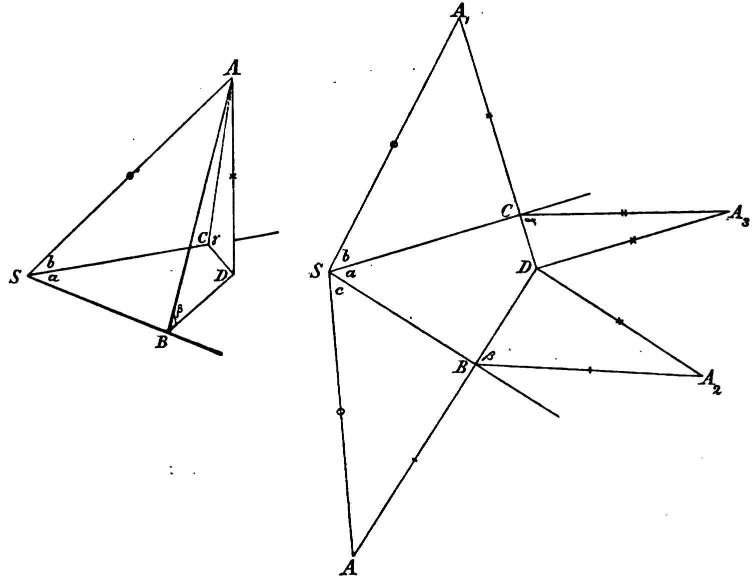
Anmerkung. Wie der 6. und 5., sowie der 4. und 3. Fall durch die Polarecken zusammenhängen, sind auch der 2. und 1. miteinander verbunden.

Frage: Welche Eigenschaft der geradlinigen Dreiecke bewirkt, dafs trotz sechs möglicher Fälle für sie nur vier Deckbarkeitssätze aufzustellen sind? (Man vergleiche die eben bewiesenen Sätze der Reihe nach mit den Dreieckssätzen.)

18. Übungen.

a) Aufgaben.

Man denke die dreiseitige Ecke S (Figur 114a) mit den Ebenen der beiden gezeichneten Neigungswinkel aus Papier dargestellt, dann in den nach A hinauflaufenden Kanten aufgeschnitten und die 4 Dreiecke mit der Grundfläche in eine



Figur 114a. Figur 114b.

Ebene nach aufsen niedergelegt; dann hat man die Figur 114 b. In ihr sind diejenigen Seiten, welche dieselbe Kante waren, durch gleiche Marken auffällig gemacht. Man soll aus dieser Figur a b l e s e n, wie man die übrigen Stücke einer dreiseitigen Ecke durch Z e i c h n e n finden kann, wenn gegeben sind (entsprechend den 6 Fällen in Nr. 17) die 3 Bestimmungsstücke:

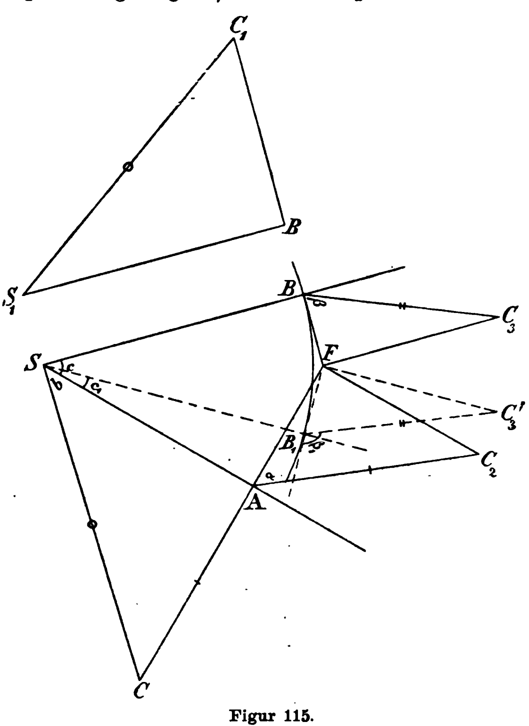
1) a, β, γ. Man beginne mit $\angle A_2DA_3$, welcher gleich dem gegebenen Seitenwinkel a ist, schneide auf seinen Schenkeln beliebige, aber gleiche Strecken, $DA_2 = DA_3$, ab, trage in A_2 an A_2D den Winkel $R-\beta$ nach aufsen an und ebenso in A_3 an A_3D den Winkel $R-\gamma$, u. s. w. Den Neigungswinkel α des dann noch fehlenden Flächenwinkels erhält man dadurch, dafs man die Seitenwinkel a, b, c in anderer Ordnung an einander legt und bei den äufseren Schenkeln beginnt. Dabei entsteht ein Winkel mit, der einer der beiden gegebenen Neigungswinkel sein mufs. Dies ist zu benutzen zur Prüfung der Zeichnung auf Genauigkeit.

2) a, b, γ. Entsprechend zu behandeln.

3) a, b, c. Man schneidet zunächst $SA = SA_1$ ab.

4) α, β, γ. Die Nebenwinkel dieser Neigungswinkel sind gleich den Seitenwinkeln der P o l a r e c k e der gegebenen. Deren Neigungswinkel α_1, β_1, γ_1 bestimmt man nach der vorhergehenden Aufgabe; dann geben deren Nebenwinkel die Gröfse der gewünschten Seitenwinkel der ersten Ecke an.

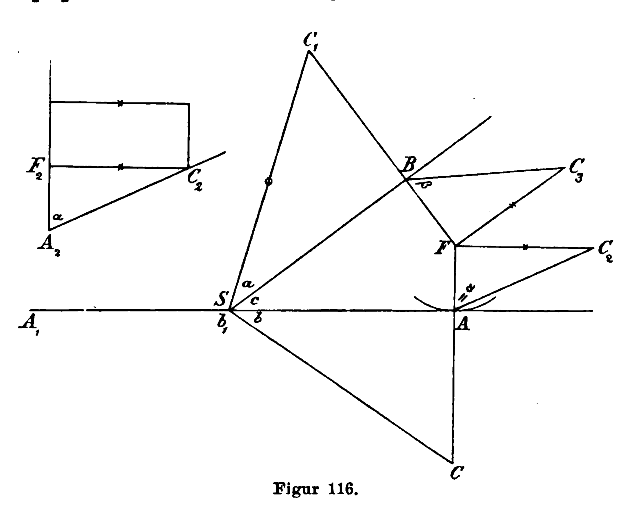
5) a, b, α (β). A u s f ü h r u n g. Auf dem einen Schenkel des gegebenen Neigungswinkels α nehme man die Strecke AC_2 beliebig lang an, fälle von C_2 auf den andern Schenkel die Senkrechte C_2F, mache die Verlängerung $AC = AC_2$, trage in C an CA den Winkel $R - b$ an, dessen Schenkel auf der in A auf AF senkrechten Geraden den Scheitelpunkt S der Ecke liefert. Diese Länge SC schneide man auf einem Schenkel des über der Figur gegebenen Seitenwinkels a als S_1C_1 ab, fälle von C_1 auf den andern Schenkel die Senkrechte, b e s c h r e i b e mit dem Abschnitt S_1B um den Scheitelpunkt S einen K r e i s b o g e n und lege an diesen vom Fufspunkte F aus die Berührungslinien FB und FB_1. Die nach den Berührungspunkten gehenden Halbmesser SB und SB_1 begrenzen mit SA in der Grundebene die gefundenen dritten Seitenwinkel für z w e i Ecken, $ASB = c$ und $ASB_1 = c_1$. Von den an SB und SB_1 liegenden Flächenwinkeln findet man die Neigungswinkel, indem man in die auf der Berührungslinie FB in F stehende Senkrechte FC_3 von B aus mit der Seite BC_1 der Nebenfigur einschneidet und BC_3 zieht, und bei B_1 ebenso verfährt.



Figur 115.

Hier aber ist der gefundene Neigungswinkel β_1 der Nebenwinkel von $FB_1C'_3 = \beta$. Richtet man die rechtsliegenden Dreiecke auf, so vereinigen sich FC_3, FC'_3 und FC_2 zu der in F auf der Ebene des Papiers stehenden Senkrechten und in deren Endpunkt kommt auch C des aufgeklappten Dreiecks CAS, sowie C_1 des Nebendreiecks C_1BS_1, welches man entweder bei SB oder bei SB_1 angefügt zu denken hat. Die beiden Stellungen der Ebene des Seitenwinkels a (BS_1C_1), in SB und in SB_1, begrenzen dann über BSB_1 eine gleichschenklige Ecke, um welche die hergestellte grofse Ecke auf ASB und die schmale auf ASB_1 sich unterscheiden. Beide besitzen die gegebenen Stücke a, b, α; aber die dem Seitenwinkel b gegenüberliegenden Flächenwinkel haben die Neigungswinkel β_1 und β, welche zusammen zwei Rechte betragen. Um eine dieser beiden Ecken abzuweisen, mufste in dem Satze der Deckbarkeit (Nr. 17, 5), zu welchem diese Aufgabe gehört, die Nebenbedingung aufgestellt werden. (Man sieht die Übereinstimmung mit dem vierten Satze der deckbaren Dreiecke. Vergl. die Figur 47 im 1. Teile, 6, 4, Anm.)

6) α, β, a (b). Man beginnt mit dem Seitenwinkel a, BSC_1, nimmt SC_1 beliebig lang und kommt in bekannter Weise, nachdem β an BF angetragen ist, auf die Strecke FC_3. Mittels dieser holt man sich aus dem nebengezeichneten Winkel α die Strecke F_2A_2 und beschreibt mit derselben um F einen Kreisbogen, und zwar auf der dem Punkte B abgewandten Seite, wenn $\angle \alpha$ spitz ist. Von S her zieht man an den Bogen die Berührungslinie und kann an den zum Berührungspunkte A gehenden Halbmesser FA das Dreieck $A_2F_2C_2$ anfügen. Verlängert man den Halbmesser FA um A_2C_2, so giebt CS den dritten Seitenwinkel $CSA = b$; aber auch sein Nebenwinkel CSA_1, $b_1 = 2\,\mathrm{R} - b$, liefert eine dreiseitige Ecke, welche die gegebenen Stücke α, β, a auch besitzt. Sie aufzubauen, mufs man SC_1BC_3F um SF herumklappen und in dieser Lage zeichnen. Dabei kommt SB als SB_1 wenig unter SA und es wird der Grundwinkel der zweiten Ecke, $A_1SB_1 = c_1$, etwas gröfser als 180^0. Richtet man die in Figur 116 gezeichneten 4 Dreiecke auf, so vereinigen sich die 4 Punkte C in einem senkrecht über F in der Höhe FC_2 über dem Papiere schwebenden Punkte C. Richtet man auch die 4 Dreiecke der für die zweite Ecke entworfenen Figur auf, so kommen die 4 Punkte C auch zusammen in einem Punkte C_1, und dieser ist derselbe Punkt C, wenn man beide Netze an der Linie A_1SA zusammen gezeichnet hat (was aber die Figur schwer verständlich macht und deshalb hier im Buche nicht ausgeführt ist). Die zweite Ecke hat zwischen dem aufgerichteten Seitenwinkel $A_1SC = b_1$ und der Grundebene des Papiers an der Kante A_1S den Flächenwinkel α, dessen Neigungswinkel an der Verlängerung der Kante A_1S bei A gezeichnet ist.



Figur 116.

Eine dieser beiden Ecken mufste beim Aufstellen des sechsten Satzes der Übereinstimmung ausgeschlossen werden durch die beigefügte Bedingung über die Gröfse der beiden andern gegenüberliegenden Seitenwinkel.

b) Lehrsätze. 8) — 11) entsprechen Dreieckssätzen. (1. T., **14**, 9, am Ende.)

7) Die Summe der Flächenwinkel einer $n$seitigen Ecke, die keine einspringenden Seitenebenen hat, ist größer als $(2n - 4)$ Rechte und kleiner als $2n$ Rechte.

$$(2n - 4)\,R < S(\alpha) < 2n\,R.$$

(Zu beweisen mittels der Polarecke.) [Vergleich mit der Summe der Winkel eines n-Ecks.]

8) Errichtet man in einer dreiseitigen Ecke auf den Ebenen der Seitenwinkel in deren Halbierungslinien senkrechte Ebenen, so schneiden sie sich in einer einzigen Geraden, welche mit den Kanten der Ecke gleiche Winkel bildet. (Für die Figur nehme man den Scheitel der Ecke im Hintergrunde an und grenze vorn die Ebenen der Ecke durch Seiten eines Dreiecks ab.)

9) Die drei Ebenen, welche die Flächenwinkel einer dreiseitigen Ecke halbieren, schneiden sich in einer einzigen Geraden, welche zu den Seitenebenen gleiche Neigungswinkel hat.

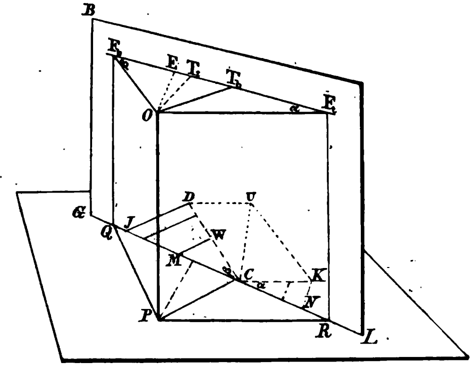
10) Wird bei einer dreiseitigen Ecke von jeder Kante aus eine Ebene rechtwinklig zur gegenüberliegenden Seitenfläche gelegt, so schneiden sich die drei Ebenen in einer einzigen Geraden. (Es werde die Ecke im Vordergrunde durch eine Ebene abgeschlossen, die man rechtwinklig auf eine gewisse Gerade stellt.)

11) Legt man in einer dreiseitigen Ecke durch die Halbierungslinie jedes Seitenwinkels und die gegenüberliegende Kante eine Ebene, so schneiden sich diese drei Ebenen in derselben Geraden. (Man begrenze die Ecke im Vordergrunde durch ein Dreieck und benutze dessen Seitenabschnitte. 1. T., **18**, 11, 2.)

Weiteres über die Herstellung der Schaubilder.

Fluchtpunkt, nebst Teilungspunkt, und Darstellung des Schattenfalles.

19. Diejenigen, welche mit dem Entwerfen von Schaubildern sich noch weiter beschäftigen wollen, sind mit einem Verfahren bekannt zu machen, welches die Fluchtpunkte sehr vorteilhaft zu benutzen lehrt bei der Darstellung eines Gegenstandes in **Eckstellung**. (Siehe Figur 118.)



Figur 117.

Es sei in Figur 117 $CDUK$ der Grundriss eines Gebäudes, mit dessen Grundlinie CD der breiten Vorderseite die Grundlinie GL der Bildfläche BL den beliebigen spitzen Winkel DCG (β) bildet. Zieht man vom Auge O des in P stehenden Zeichners die Gerade in Richtung der CD, so trifft sie die Bildfläche in einem Punkte F_b der Horizontlinie, welcher der Fluchtpunkt der Darstellungen aller geraden Linien des Gebäudes ist, die der CD gleichgerichtet sind; (**8**, 15, Zs.) und es wird der Winkel OF_bE, weil seine Schenkel denen des Winkels DCG beide entgegengesetzt gerichtet sind, gleich dem Winkel β. Trägt man CD als CJ auf der Grundlinie der Bildfläche ab und verbindet D mit J, so

entsteht ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel β an der Spitze. Jede Strecke der CD, wie CW, liefert, auf CG als CM abgetragen, durch WM auch ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel β an der Spitze. Deshalb sind ihre Grundseiten, DJ, WM, gleichlaufend und ihre Darstellungen in der Bildfläche haben alle denjenigen Fluchtpunkt, welchen man erhält, wenn man OF_b auf der Horizontlinie abträgt als F_bT_b; denn dann ist auch OF_bT_b ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel β an der Spitze, also in den gleichlaufenden Ebenen $OT_b \parallel JD \parallel MW$. Dieser Fluchtpunkt T_b der Teilungslinien der Breite CD heifst deshalb der Teilungspunkt für die Breite.

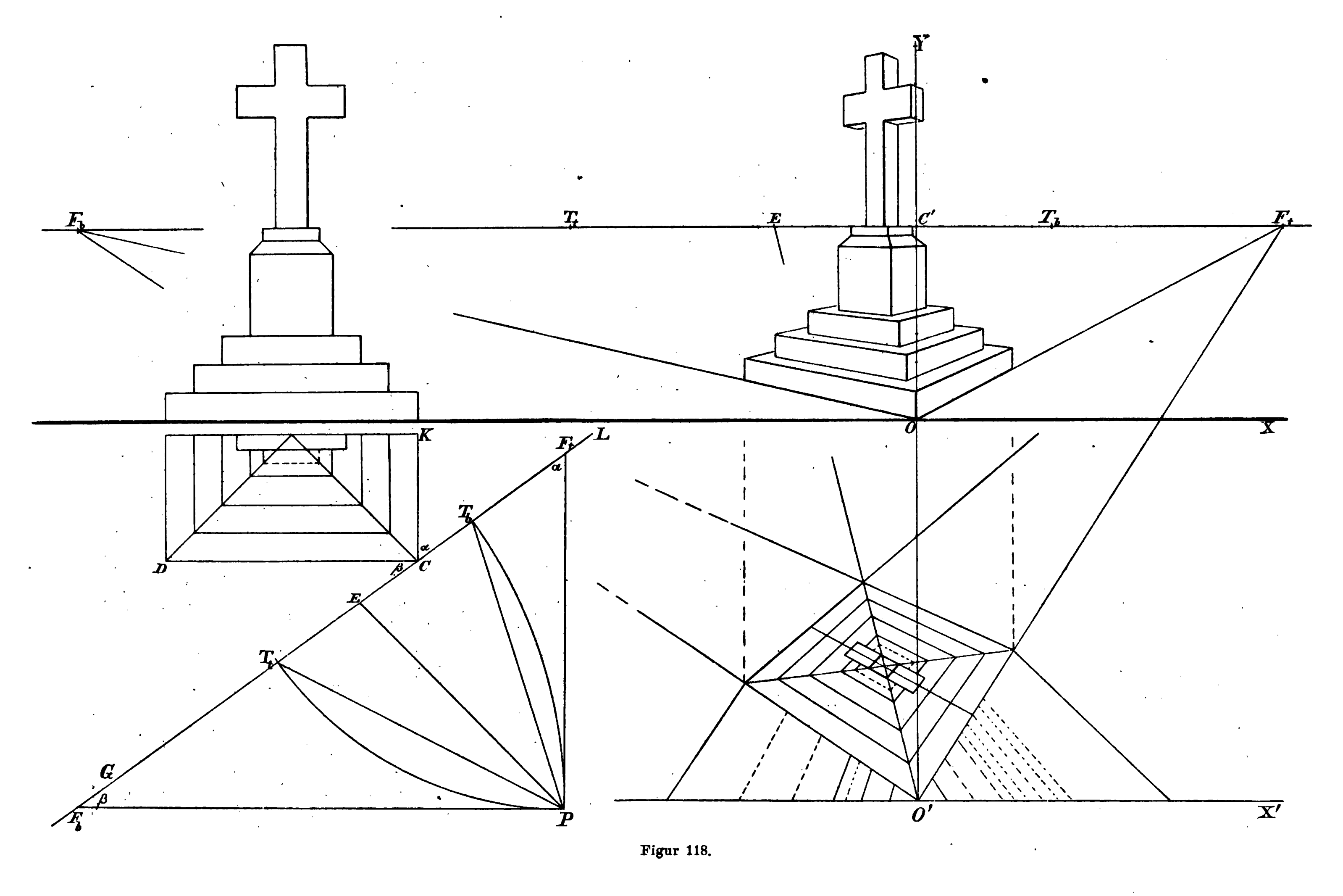
Trägt man die Tiefe CK des Gebäudes als CN auf der Grundlinie der Bildfläche ab, so entsteht durch KN ein gleichschenkliges Dreieck CKN mit dem Winkel α an der Spitze, und es giebt $OF_t \parallel CK$ den Fluchtpunkt F_t der Darstellungen aller wie CK laufenden Tiefenlinien und $F_tT_t = OF_t$ den Fluchtpunkt T_t für die Darstellungen der Teilungslinien der Tiefe; also ist T_t der Teilungspunkt für die Tiefe.

Die Gröfse der Strecke F_bF_t kann man ebenso auf der Grundlinie GL vom Punkte P her als QR erhalten und darin die Lage der Teilungspunkte durch Abtragen der PQ und PR sich verschaffen.

Zieht man endlich noch von O aus die Gerade OE in Richtung der Eckenlinie CU, so wird E der Fluchtpunkt der Darstelluug aller Eckenlinien, die in verschiedenen Stockwerken des Gebäudes wie CU laufen. Da in C der in der Bildfläche emporgehende Höhenmafsstab beginnt, so erhält der Fluchtpunkt E für die Höhenabgrenzungen hier die Bedeutung des Hauptpunktes.

Beispiel. Die Figur 118 zeigt links ein auf drei Stufen stehendes Denkmal im Aufrifs und darunter die vordere Hälfte des Grundrisses CDK. Durch den Eckpunkt C ist die Grundlinie GL der Bildfläche unter dem beliebigen Winkel DCG ($\beta = 36^0$) gelegt. Da auf dem Zeichenblatte nicht ausreichend Platz ist, den Standpunkt des Zeichners in angemessenen Abstand von der Bildfläche zu bringen, so wurde er in P halb so nahe an GL, als beabsichtigt war, hingesetzt. $PF_b \parallel CD$ und $PF_t \parallel CK$ bilden dann mit GL ein Dreieck, wie in Figur 117 das Dreieck PQR; aber es sind seine Seiten nur halb so grofs, als sie nachher bei der Herstellung des Schaubildes verwendet werden sollen. Wird F_bP als F_bT_b übertragen, so hat man das gleichschenklige Dreieck PF_bT_b mit dem Winkel β an der Spitze und dadurch die Stelle T_b des Teilungspunktes für die Breite. Ebenso gelangt man durch das gleichschenklige Dreieck PF_tT_t zur Stelle des Teilungspunktes T_t für die Tiefe. Zieht man endlich PE in Richtung der bei C anfangenden Eckenlinie des Grundrisses, so hat man auch den Fluchtpunkt E für die Darstellungen der entsprechenden Eckenlinien aller Stufen des Unterbaues.

Nach dieser Vorbereitung wurde die Horizontlinie, damit im Schaubilde die oberen Flächen der Stufen gut sichtbar werden, durch die Mitte der Denkmalshöhe gelegt und die durch die Hilfsfigur von P aus ermittelten fünf Punkte nun in doppelt so grofsen Abständen auf der Horizontlinie angegeben. Senkrecht unter der Stelle C', die dem Punkte C auf GL entspricht, wurde auf der Zeichnungsgrundlinie OX der Nullpunkt O für den Höhenmafsstab OY angesetzt. (Figur 81 in 8, 16.) Wollte man von hier aus OX zum Breitenmafsstab verwenden, so würden die flach dahinstreichenden Linien OF_b und OF_t von den Teilungslinien unter sehr spitzen Winkeln geschnitten und die genaue Stelle der Schnittpunkte bei nicht scharfer Bleistiftspitze unsicher werden. Deswegen geht man mit OX so weit senkrecht herunter (bis $O'X'$), dafs die nach den Fluchtpunkten laufenden Linien des Hilfsgrundrisses sich nahezu rechtwinklig schneiden. Hier, bei O', entsteht nun der sogenannte Kellergrund, von



Figur 118.

dessen Eck- und Schnittpunkten man sich die Stellen, wo die Linien in der Hauptzeichnung stehen müssen, lotrecht heraufholt, zunächst für die linke und rechte Ecke auf OF_b und OF_t. Dann trägt man auf OY die Höhe der untersten Stufe ab und zieht vom Endpunkte die nach F_b und F_t laufenden Kanten bis zu der von unterher markierten Stelle, sowie eine (in der Figur wieder fortgeriebene) kurze Linie in Richtung zum Fluchtpunkte E der Eckenlinien, um auf ihr den Ausgangspunkt der zweiten Stufe aus dem Kellergrunde heraufzuholen. Die Richtung nach E vom zweiten Punkte des Höhenmafsstabes aus giebt dann die durch das Zurücktreten im Bilde verkürzte Höhe der zweiten Stufe, und so fort.

Erst dadurch, dafs der Leser eine derartige Zeichnung in mehr als doppelter Gröfse selber ausführt, kann derselbe befriedigende Klarheit über die Herstellungsweise erlangen und die Freude geniefsen, welche Selbstzurechtfinden bringt. Nimmt man dabei den Winkel β, namentlich aber den Abstand der Horizontlinie von der Grundlinie OX etwas anders, so treten auffallende Änderungen im entstehenden Schaubilde ein.

Als Beispiele für Darstellungen, bei welchen die Bildflächengrundlinie mit der Vorderseite des Gegenstandes einen spitzen Winkel bildet, werden zur Auswahl vorgeschlagen:

1) Der Unterteil eines Gebäudes, in Vorder- und Nebenseite entsprechend der Figur 85 (in **8**, 17), aber mit halbkreisförmigen Bogen.

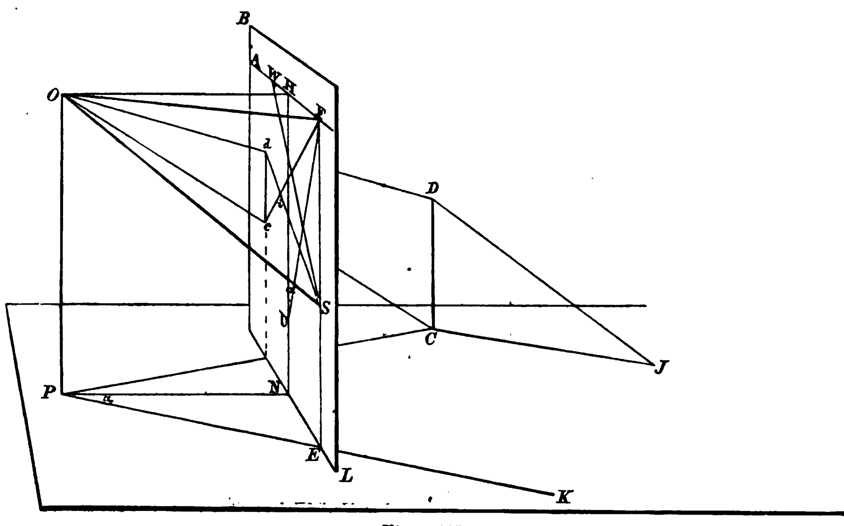
2) Ebensolche Vorderseite; die zweite Reihe der mit halbkreisförmigen Bogen überspannten Pfeiler geht nicht rechtwinklig von der ersten ab, sondern steht in gleicher Richtung hinter ihr, so dafs sie zwischen den Pfeilern hindurch gesehen wird.

3) Der Unterteil eines achtseitigen Pfeilers. Die Grundfläche desselben ist ein Quadrat; die in dessen Eckpunkten stehenden Kanten sind nur so grofs, wie die Hälfte der Quadratseite. Da beginnen schräg aufwärts gehende dreieckige Schnittflächen, deren Seitenlinien Winkel von $1^1/_2$ Rechten mit der Kante bilden und bis zu einem Punkte reichen, der über dem Endpunkte von ein Viertel der Grundquadratseite steht. Erst von hier an gehen die vier schmaleren Seitenflächen des achtseitigen Pfeilerfufsstücks senkrecht empor. Bei weiterer Fortsetzung des Pfeilers müfsten die Seitenkanten bis zu $^4/_5$ oder $^3/_4$ ihres unteren Abstandes sich näher kommen, damit der Pfeiler schlank aussieht.

4) Ein bedeckter Vorbau mit vier Pfeilern, zu welchem eine Treppe von vier Stufen hinaufführt.

5) Ein Obelisk, wie Figur 86 (in **8**, 17), auf dessen quadratischen Unterbau an jeder Seite vier Stufen zwischen abgeschrägten Seitenstücken (Treppenwangen) hinaufführen. (Vergl. auch Figur 10 in **1**, 9.)

20. Schlagschatten. (Figur 119.) Auf der wagerechten Grundebene ist vor der Bildfläche BL in P der Standort des Zeichners. Die Sonne stehe hinter ihm etwas nach links, so dafs seine Augenhöhe OP den Schatten PK werfen würde, während CJ der Schlagschatten des senkrechten Stabes CD ist. Da die Sonnenstrahlen gleichlaufend sind, haben auch die Schlagschatten auf der Grundebene gleiche Richtung. Zieht man vom Auge O die Gerade OF in der Schattenrichtung, so trifft diese Linie, weil sie wagerecht läuft, die Bildfläche auf der Horizontlinie AH, und es wird F der Fluchtpunkt für die Darstellungen der Schlagschatten aller senkrechten Kanten. Als gleichlaufende Linien befinden sich CJ und OF in einer Ebene. OC verbindet zwei Punkte derselben. Daher sind F und der Bildpunkt c zwei Punkte dieser Ebene, welche folglich die Bildfläche in der Geraden Fc schneidet, die alle von



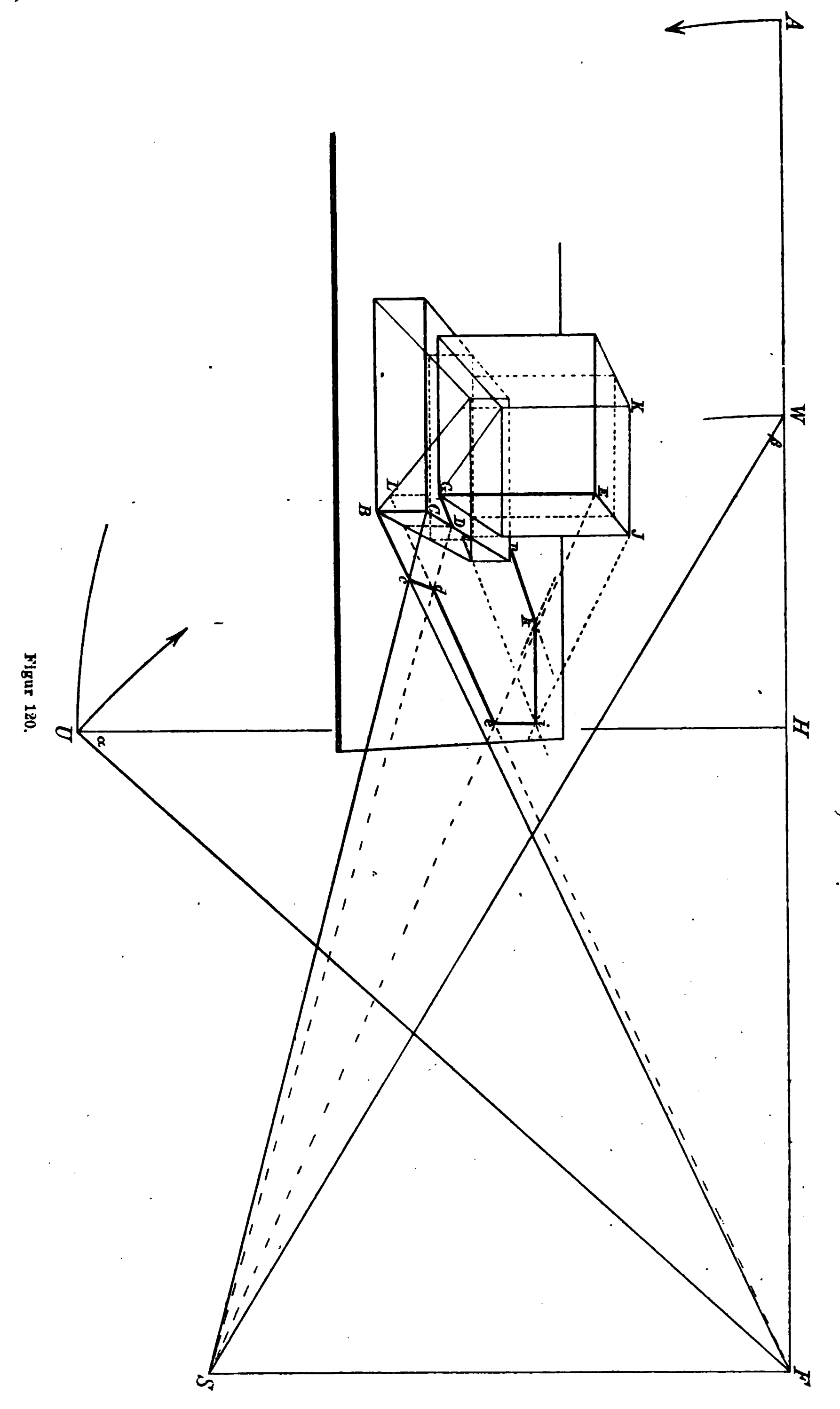
Figur 119.

Punkten der *CJ* ins Auge kommenden Linien durchdringen müssen. Mithin liegt, vom Auge *O* aus gesehen, der Schatten *CJ* hinter *ci*; und es ist auf der Bildfläche nur noch der Endpunkt der zu zeichnenden Schattenlinie zu bestimmen. Zieht man von *O* aus die Gerade *OS*, welche mit dem den Schlagschatten begrenzenden Strahle *DJ* gleichgerichtet ist, so trifft sie die Bildfläche im Sonnenstrahlpunkte *S* (welcher der Schatten des Auges auf der Bildfläche sein würde). In der Ebene der gleichlaufenden Linien *DJ* und *OS* verbindet *OD* zwei Punkte, also sind *S* und der Bildpunkt *d* zwei Punkte dieser Ebene, welche folglich die Bildfläche in der Geraden *Sd* schneidet. Deshalb liegt, vom Auge *O* aus, *DJ* hinter *di*, und, wie vorher gezeigt, *CJ* hinter *ci*; also mufs der Schnittpunkt *i* von *dS* und *cF* die Darstellung vom Schattenendpunkte *J* sein. Daher für das Zeichnen des Schattens der Senkrechten *cd* die Regel:

> Man verbindet den oberen Punkt *d* mit dem unteren Punkt *S* und den unteren *c* mit dem oberen *F*. Der Schnitt dieser Linien ist der Endpunkt des Schattens *ci*.

Es kommt also nur darauf an, die Punkte *F* und *S* auf der Bildfläche zu bestimmen.

Der Scheitelwinkel von *NPE* giebt den „seitlichen Stand der Sonne“ an. Dem Winkel *NPE*, α, ist der Winkel *HOF* gleich gemacht, und das Dreieck *FHO*, in die Zeichenebene *BL* niedergeklappt, liefert *FHU*. Man schneidet also auf der Geraden *HU*, welche beim Hauptpunkte *H* senkrecht von der Horizontlinie hinabgeht, den Abstand des Auges von der Bildfläche (den Abstand *HA*) ab und trägt im Endpunkte *U* nach rechts (wohin die Schatten fallen) den Winkel des „seitlichen Standes der Sonne“ an. Der Schnitt *F* auf der Horizontlinie *AH* ist der Fluchtpunkt der Schatten senkrechter Kanten. — Da die Augenhöhe *OP* auf der Grundebene senkrecht steht, so ist auch die durch *OP* und den Sonnenmittelpunkt gehende Ebene *OPEF* auf der Grundebene senkrecht; die Bildfläche ist es gleichfalls, mithin auch ihre Schnittlinie *EF*, die folglich vom Fluchtpunkte *F* rechtwinklig von der Horizontlinie herabgeht. Da *OF* wagerecht läuft, so giebt der Scheitelwinkel von *FOS* den Höhenstand der Sonne an. Das rechtwinklige Dreieck *OFS* wird durch Drehen um *FS* in die Bildfläche als *WFS* gebracht. Die abzutragende Strecke *FO* war aber vorhin beim Niederklappen als *FU* schon gezeichnet. Demnach fährt man, wenn unten


Figur 120.

bei U der Winkel α angetragen ist, sogleich fort, indem man FU als FW auf der Horizontlinie abschneidet und in W nach rechts unten den Höhenwinkel der Sonne anträgt. Dadurch kommt man in der von F senkrecht herabgehenden Linie FE auf den Sonnenstrahlpunkt S.

Beispiel. In Figur 120 ist der Winkel α des seitlichen Standes der Sonne $= 42^1/_2{}^0$, der Höhenwinkel der Sonne $\beta = 31^1/_2{}^0$. (Beim Herstellen der Figur 119 wurde $\alpha = 40^0$ und $\beta = 30^0$ zu Grunde gelegt.) Die Steinplatte und der darauf stehende Würfel wurden aus dem mitten durch die Nebenseiten gehenden Achsenschnitte, welcher punktiert gezeichnet ist, vom Haupt- und Abstandspunkte her dargestellt. Den auf die Grundebene fallenden Schlagschatten zu finden, wird zuerst der obere Punkt C der senkrechten Plattenkante BC mit dem Sonnenstrahlpunkte S verbunden und dann bis an diese Linie CS Bc, als Schatten einer senkrechten Linie, in Richtung zum Schattenfluchtpunkte F gezogen. Von der senkrechten Würfelkante GE fällt der Schatten des unteren Teiles auf die wagerechte Deckfläche der Steinplatte in der Richtung nach F. Auf der Grundebene beginnt die Fortsetzung des Schattens beim Schatten des Grenzpunktes D, dessen Lage in d gefunden wird durch die Höhe des Punktes D über der Grundebene. Dann wird c mit d verbunden. Dies ist der Schatten von CD und mufs zum Hauptpunkte H gerichtet sein; denn die vom Sonnenmittelpunkte aus durch CD gehende Ebene, welche den Schattenkörper der Steinplatte begrenzt, schneidet die Grundebene in einer der CD gleichlaufenden Geraden. Bei der Ermittelung des Schattens vom oberen Endpunkte E könnte ein Irrtum sich einstellen. Es ist seine Höhe über der Grundebene, also EL, und nicht die Würfelhöhe EG, zu nehmen; von L aus ist bis an ES die Schattenlinie de nach F hin zu ziehen. Dasselbe gilt von der Bestimmung des Schattens der Punkte J und K. Die Schattenlinie ei der Kante EJ mufs, als im Raume ihr gleichlaufend, im Bilde zum Hauptpunkte gerichtet sein; der Schatten ik von JK erleidet in der Darstellung keine Richtungsänderung.

Die so gefundene Umgrenzung des Schlagschattens, $Bcdeikn$, wurde auf der Grundebene in Figur 120 nicht dunkel ausgefüllt, auch die rechts stehende Seitenfläche der Steinplatte und des Würfels nicht abschattiert, weil dadurch die Hilfslinien dem Leser verdeckt worden wären. Auch der Streifen auf der Steinplatte von GD bis zum Buchstaben n ist dunkel zu machen, und zwar, wie der Schlagschatten auf der Grundebene, mehr dunkel, als die rechts stehenden Seitenflächen. Die Vorderflächen der beiden Steine sind mit zartem Grau auszufüllen; die Deckfläche des Würfels aber und der übrige Teil der Deckfläche von der Steinplatte bleiben weifs.

Anmerkung 1. Um den Schlagschatten einer zur Grundebene nicht senkrecht gerichteten Geraden zu erhalten, fällt man von ihren Endpunkten die Senkrechten und bestimmt deren Schatten. Die Verbindungslinie ihrer Endpunkte ist der gesuchte Schatten der schrägen Kante.

Anmerkung 2. Beim Abschattieren der Seitenebenen eines gezeichneten Körpers giebt man der Fläche nicht einen gleichmäfsigen Farbeton. Es sieht besser aus, wenn man in Figur 120 die Seitenfläche GJ des Würfels nach dem Vordergrunde zu, also bei der Kante EG, etwas dunkler macht, als den entfernteren Teil dieser Ebene. Recht erheblich ungleich aber ist die Schattierung einer runden Fläche, z. B. einer Säule. Eine vom Schattenfluchtpunkte F an die krumme Fläche zu ziehende Berührungslinie giebt dort die dunkelste Stelle an, die vom Sonnenstrahlpunkte S die hellste Stelle.

Von den schon angefertigten Zeichnungen kann nun eine geeignete mit Schattierung und Schlagschatten versehen werden.

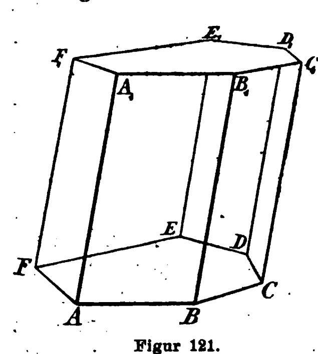
---

2. Abschnitt.

Körper.

11. Glied. Das Prisma.

1. Erklärung. Durch einen prismatischen Raum (**10**, 4) lege man zwei gleichlaufende Ebenen so, daſs alle Kanten geschnitten werden. Das nun vollständig umgrenzte Raumstück wird ein Prisma genannt. Die beiden hindurchgelegten Ebenen heiſsen seine Grundflächen (oder die eine die Grundfläche, die andere Deckfläche), die geschnittenen Ebenen seine Seitenflächen, alle Grenzflächen zusammen seine Oberfläche; jede andere Ebene gleichlaufender Kanten, die keine Seitenfläche ist, heiſst Kantenebene. Die Kanten des prismatischen Raumes sind die Seitenkanten des Prismas, die Seiten der Grundflächen die Grundkanten, eine zwei Eckpunkte verbindende Gerade, welche nicht in einer Grenzfläche liegt, ist eine Eckenlinie des Körpers und der Abstand der Grundflächen die Höhe des Prismas.



Figur 121.

2. Ls. **Alle Seitenkanten eines Prismas haben gegen jede Grundfläche gleiche Neigungswinkel und sind gleich lang.** (8, 12 und 9, 18.)

Zs. Die Seitenkanten eines Prismas stehen entweder alle senkrecht oder alle schief auf den Grundflächen.

Erklärung. Je nachdem die Seitenkanten senkrecht oder schief auf den Grundflächen stehen, unterscheidet man gerade oder schiefe Prismen.

3. Ls. **Alle Seitenflächen eines Prismas sind Rauten.**

Zs. Alle Seitenflächen eines geraden Prismas sind Rechtecke.

4. Ls. **Hat ein Körper ein Vieleck zur Grundfläche und lauter Rauten zu Seitenflächen, so ist er ein Prisma.** (8, 6; **9**, 12 und 14.)

Anmerkung. In Nr. 1 wurde angegeben, wie ein Prisma entsteht. Jetzt kann man sagen, was für ein Körper ein Prisma ist.

5. Ls. **Grund- und Deckfläche eines Prismas sind deckbar.** (Nr. 3 und **8**, 7.)

Zs. Jede der Grundfläche eines Prismas gleichlaufende Schnittebene liefert ein mit ihr ganz übereinstimmendes Vieleck.

6. Erklärung. Ein Prisma, welches auch zur Grundfläche eine Raute hat, also von sechs Rauten begrenzt wird, heiſst ein **Rautenprisma.***) Ein auf einem Rechtecke stehendes gerades Rautenprisma, welches also von lauter Rechtecken begrenzt wird, heiſst Quader. Sind seine Grenzflächen Quadrate, so ist der Quader ein Würfel (Kubus).

*) Parallelepipedon ist Rautenprisma.

7. Ls. **Im Rautenprisma sind je zwei Gegenflächen gleichlaufend und deckbar.**

Nach dem Satze **9**, 12 kann jede Seitenfläche als Grundfläche des Rautenprismas genommen werden. Nr. 5.

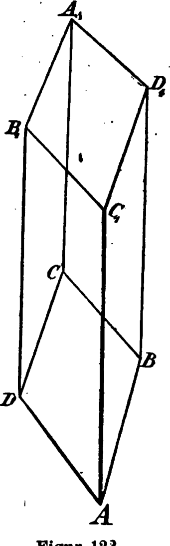
8. Ls. **Die vier Eckenlinien eines Rautenprismas schneiden sich in demselben Punkte, weil je zwei sich halbieren.**

Zs. Die sechs Kantenebenen eines Rautenprismas schneiden sich in einem Punkte.

9. Ls. **Im Rautenprisma betragen je zwei entgegengesetzte Flächenwinkel zusammen zwei Rechte und Gegenflächenwinkel sind gleich.** (**9**, 13.)

10. Ls. **Die Gegenecken eines Rautenprismas stimmen rückwärts.**

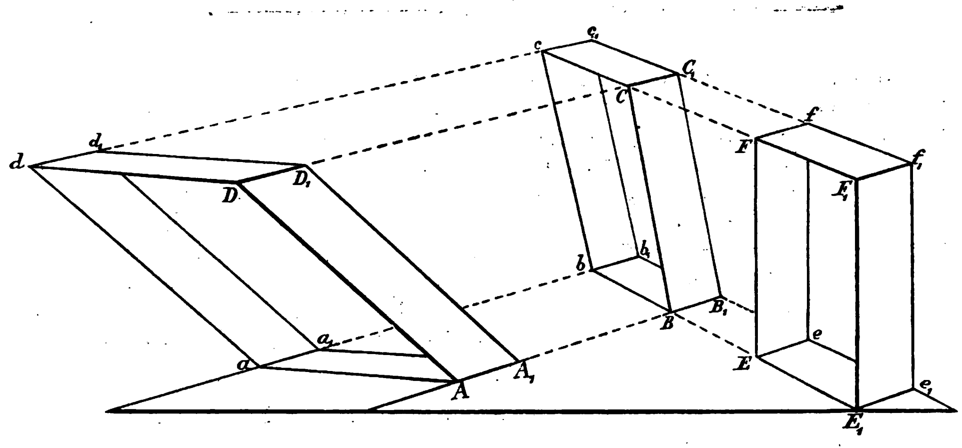
Sieht man aus dem Innern des in Fig. 122 dargestellten Rautenprismas von oben in die Ecke A hinein und zählt ihre Seitenwinkel vom kleinsten bis zum gröfsten, so läuft die Ordnung wie die Uhrzeiger; aber in der Gegenecke A_1 ist die Ordnung gegen den Uhrzeigerlauf. Sieht man in die Ecke B hinein, so geht die Gröfsenordnung gegen den Uhrzeigerlauf, bei B_1 mit den Uhrzeigern. So ist es auch bei den übrigen.



Figur 122.

11. Ls. **Jedes schiefe Rautenprisma läfst sich in einen Quader von gleicher Grundfläche und Höhe verwandeln.**

Ausführung. Vom gegebenen schiefen Rautenprisma Ad_1 erweitert man Grund- und Deckfläche, Vorder- und Hinterfläche nach rechts hinten,



Figur 123.

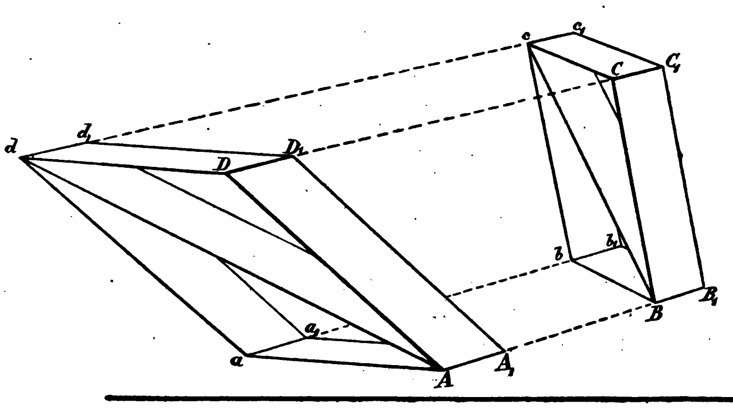
schneidet auf der entstandenen Verlängerung von AA_1 irgendwo $BB_1 = AA_1$ ab, legt durch B und B_1 **rechtwinklig auf** BB_1 Ebenen, die auch bis in den Vordergrund erweitert werden, trägt hier $EE_1 = bB$ ab und legt auch

durch E und E_1 rechtwinklig auf EE_1 Ebenen bis zur erweiterten Deckfläche, so entsteht ein Quader Ef_1, welcher dem schiefen Rautenprisma raumgleich ist.

Bw. Dafs Ef_1 ein Quader ist, wird leicht nachgewiesen, auch dafs seine Grundfläche $Ee_1 = Bb_1 = Aa_1$ ist, sowie dafs die zu diesen gehörigen Höhen der Körper gleich sind. Dann zeigt man, dafs Trapez $ABCD \cong A_1B_1C_1D_1$, entsprechend im Hintergrunde, sowie in der Grund- und Deckfläche; dafs $Ad \cong A_1d_1$ und $Bc \cong B_1c_1$, weifs man aus Nr. 7. Dazu kommt die Gleichheit gleichliegender Flächenwinkel; so dafs nun Körper $dB \cong d_1B_1$. Nimmt man von beiden das gemeinsame Mittelstück d_1B fort, so bleibt Gleiches, $Ad_1 = Bc_1$. Ganz ebenso ist es beim zweiten und dritten Rautenprisma. Daher sind das gegebene schiefe Rautenprisma und der Quader raumgleich.

12. Ls. **Jedes Rautenprisma wird durch eine Kantenebene halbiert.**

Bw. Bei der soeben nachgewiesenen Deckung der Körper fielen deren durch die Kantenebene AB_1c_1d entstehenden Teile zusammen. Auch von diesen werden die gemeinsamen Mittelstücke fortgenommen; dann bleibt vorn das dreiseitige Prisma $dD_1A = cC_1B$ und hinten $d_1aA_1 = c_1bB_1$. Beim Bilden des zweiten



Figur 121.

Rautenprismas wurde durch B rechtwinklig auf BB_1 die Ebene gestellt, also ist es ein auf der schiefen Raute $BbcC$ stehendes gerades Rautenprisma. Im geraden sind die durch die Kantenebene entstehenden Teile deckbar. Diesen Hälften sind die Teile des ersten Rautenprismas gleich, also sind auch diese beiden einander gleich, aber deckbar sind die Hälften des schiefen Rautenprismas nicht. Die Deckung kommt nicht zustande, weil die Gegenecken rückwärts stimmen. (Nr. 10.) Beim geraden Rautenprisma sind von den drei Seitenwinkeln jeder Ecke zwei als Rechte einander gleich; dadurch wird ihre Ordnung mit oder gegen den Uhrzeigerlauf (α, Rechter, R. oder α, Ŕ, Rechter) dieselbe; dadurch passen sie zusammen.

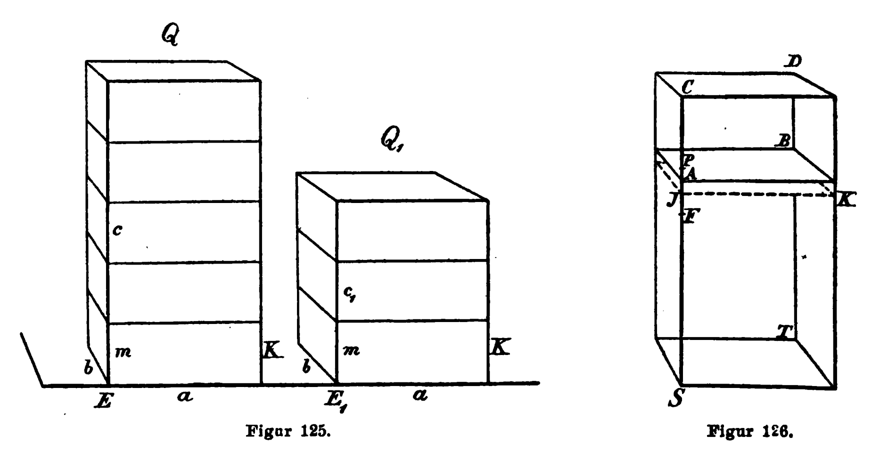
b. Inhalt.

13. Ls. **Quader, welche drei zusammenstofsende Kanten entsprechend gleich haben, sind deckbar.** (8, 2, 1 und 10, 1, 2.)

14. Ls. **Quader, welche zwei zusammenstofsende Kanten entsprechend gleich haben, verhalten sich, wie die dritten Kanten.**

Bh. $\frac{Q}{Q_1} = \frac{c}{c_1}$.

Beim Beweise sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder haben die dritten Kanten ein gemeinsames Mafs oder nicht. Im ersten Falle ist der



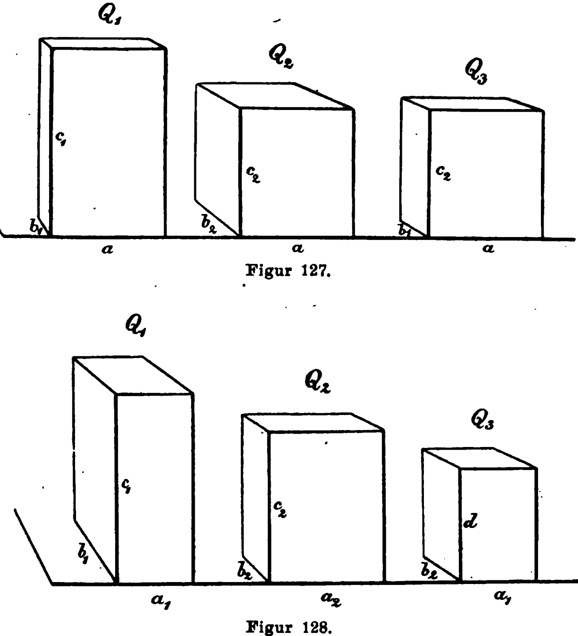
Figur 125. Figur 126.

Gang des Beweises aus Figur 125 leicht zu ersehen. Auch im zweiten Falle, bei welchem man den kleinen Quader in den grofsen setzt, so dafs ihre Grundflächen zusammenfallen, (Figur 126) entspricht der Beweis ganz dem im 1. Teile, **21**, 1 (auch dem im 2. Teile, 9, 4). [Für die Figur 126 sind *SA* und *SC* gleich der Seite und Eckenlinie eines Quadrates genommen.]

15. Ls. **Quader, welche in einer Kante übereinstimmen, verhalten sich, wie die Produkte der beiden andern mit ihnen zusammenstofsenden Kanten.**

Bh. $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2}$.

Bw. Zu den in der Kante a übereinstimmenden Quadern (Figur 127) nehme man einen dritten Quader, welcher die Kanten a, b_1 und c_2 hat, wende den vorhergehenden Satz auf Q_1 und Q_3, sowie auf Q_3 und Q_2 an, (die Ordnung ist zu beachten) und vereinige die Gleichungen so, dafs die Hilfsgröfse Q_3 herausfällt.



Figur 127.

Figur 128.

16. Ls. **Quader verhalten sich wie die Produkte aus drei zusammenstofsenden Kanten.**

Bw. Figur 128. Man bilde einen dritten Quadermit den Kanten a_1 und b_2 und beliebiger dritter Kante d, und verfahre ebenso.

17. Erklärung. Wie man zum Messen der Flächen ein Quadrat nimmt, dessen Seiten gleich dem Längenmaſse sind, so bedient man sich zum Ausmessen der Körper eines Würfels (Kubus), dessen Kanten gleich dem Längenmaſse sind. Beim Gebrauche des Meters wird das Körpermaſs ein Kubikmeter, dessen Zeichen cbm ist. (Man messe auf und vor der Wandtafel einen so groſsen Würfel ab.)

18. Ls. **Die Inhaltszahl eines Quaders ist gleich dem Produkt der Maſszahlen der drei zusammenstoſsenden Kanten.**

Bw. Bezeichnet man den Würfel über dem Längenmaſse m mit W, die in einer Ecke des Quaders Q zusammenstoſsenden Kanten mit k_1, k_2, k_3, so ist nach dem vorhergehenden Satze das Verhältnis

$$\frac{Q}{W} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{m \cdot m \cdot m} = \frac{k_1}{m} \cdot \frac{k_2}{m} \cdot \frac{k_3}{m}.$$

Wie oft W in Q enthalten ist, beantwortet die Inhaltszahl J; k_1, durch m gemessen, liefert die Maſszahl a, $\frac{k_2}{m}$ ist die Zahl b und $\frac{k_3}{m}$ wird c, und man hat

$$J = a \cdot b \cdot c.$$

Zs. 1) Das Multiplizieren der Maſszahlen a und b liefert die Inhaltszahl G der rechteckigen Grundfläche des Quaders, und c ist die Maſszahl der zugehörigen Höhe. Bezeichnet man daher diese lieber mit h, so kann man die Gleichung schreiben

$$J = G \cdot h$$

und kurz aussprechen:

> Der Inhalt eines Quaders ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe;

man hat aber während des Rechnens G und h als unbenannte Zahlen zu denken.

2) Der Würfel, welcher beim Messen seiner Kante die Maſszahl a giebt, hat die Inhaltszahl a^3. Es kann daher die dritte Potenz einen Würfel (Kubus) bedeuten, wie die zweite ein Quadrat.*)

19. Ls. **Der Inhalt jedes Rautenprismas ist gleich dem Produkt aus seiner Grundfläche und Höhe.** (Nr. 11.)

20. Ls. **Auch der Inhalt eines dreiseitigen Prismas ist $J = G \cdot h$.**

Bw. Man verdoppele das Grunddreieck zu einer Raute, lege durch jede der hinzugekommenen Seiten und die anstoſsende Seitenkante des Prismas eine Ebene bis zur erweiterten Deckfläche; dann ist das entstandene Rautenprisma das Doppelte des dreiseitigen Prismas. (Nr. 12.) Mit dessen Inhalt J und Grundfläche G ist also der Inhalt des Rautenprismas $2J = 2G \cdot h$, folglich $J = G \cdot h$.

21. Der Inhalt jedes Prismas ist

1. $$J = G \cdot h.$$

---

*) Deshalb sagte man „a-Kubus" statt „a hoch 3" und „Kubikwurzel" statt „dritte Wurzel".

Bw. Von einer Seitenkante des $n$seitigen Prismas aus lege man alle Kantenebenen. Dadurch wird seine Grundfläche in Dreiecke zerlegt, deren Inhalte nach Messung ihrer Grundlinien und Höhen gefunden werden G_1, $G_2, \ldots G_{n-2}$. Weil die dreiseitigen Prismen alle die Höhe h des gegebenen Prismas haben, wird dessen Inhalt

$$J = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + \ldots + G_{n-2} \cdot h = (G_1 + G_2 + \ldots G_{n-2}) \cdot h = G \cdot h.$$

22. Übungen.

1) Über der Summe der Strecken a und b einen Würfel zu zeichnen und ihn durch Ebenen so zu zerlegen, dafs er darstellt die Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Als Zeichenebene ist zu nehmen entweder die Vorderfläche oder eine Kantenebene des Würfels.

2) Die Kante eines Würfels zu bestimmen, welcher gleich ist der Vereinigung des reinen Goldes in fünf Milliarden Frank (5000 Millionen Frank = 4000 Millionen Mark), welche Frankreich 1871 an Deutschland als Kriegskostenentschädigung zahlen mufste. Ein Zwanzigfrankstück hat 5,806 Gramm Gold vom Eigengewichte 19,3.

Ergebnis. $x = 422{,}1$ cm, also 4 m 22 cm 1 mm! Der Würfel aus reinem Golde ist höher als ein hohes Zimmer.

3) Die Oberfläche und den Inhalt eines Würfels zu berechnen aus seiner gegebenen Eckenlinie e. — Wie ist das Ergebnis $J = (\frac{1}{3}e)^2 \cdot e\sqrt{3}$ recht allgemein zu deuten?

4) Schneidende Ebene: Martus, Aufgaben 454, 637.

5) Inhaltsbestimmungen: M., Aufg. 447, 448; 451, 452; 458, 462, 463.

6) Schnittfigur im Würfel: M., Aufg. 636.

7) Gleichkantiges Rautenprisma mit 3 gleichen spitzen Winkeln in einer Ecke: M., Aufg. 449.

8) Der Kalkspat bildet Rautenprismen, bei welchen in einer Ecke drei gleiche stumpfe Winkel von $\alpha = 105^0\,5'$ zusammenkommen, und jede Kante ist $= a$. Wie grofs sind die Flächenwinkel und der Inhalt des Körpers? Man zeichne diesen Krystall, welcher ein Rhomboëder genannt wird, so, dafs die Ecke mit den drei stumpfen Winkeln an der Grundfläche hinten liegt.

Ergebnis: $\cos x = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$; $J = a^3 \sin^2 \alpha \sin x$.

$x = 110^0 35' 41''$, $180^0 - x = 69^0 24' 19''$; $J = 0{,}8727\, a^3$.

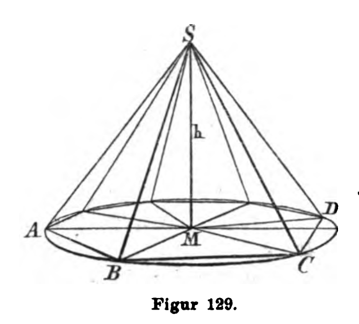
---

12. Glied. Die Pyramide.

a. Gestalt.

1. Erklärung. Legt man durch alle Kanten einer körperlichen Ecke eine Ebene, so heifst der abgegrenzte Raum eine Pyramide. Die Schnittfigur, welche die hindurchgelegte Ebene lieferte, nimmt man als Grundfläche des Körpers und die in den Seitenflächen der Ecke abgegrenzten Dreiecke als seine Seitenflächen; alle Grenzfiguren zusammen bilden seine Oberfläche. Der Scheitel der Ecke wird die Spitze der Pyramide,

die dort sich treffenden Kanten sind die Seitenkanten und die Seiten der Grundfigur die Grundkanten. Die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte ist die Höhe der Pyramide. Nach der Zahl der Seitenflächen unterscheidet man dreiseitige, vierseitige, . . . *n*seitige Pyramiden.



Figur 129.

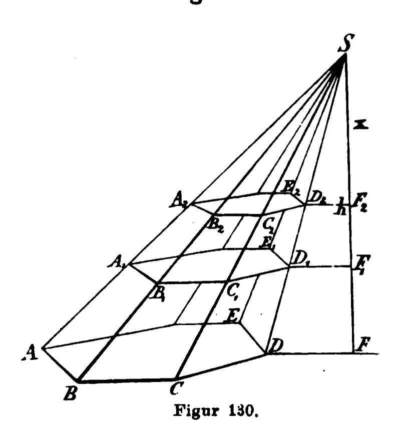
2. Ls. **Ist die Grundfläche einer Pyramide ein Vieleck im Kreise und steht ihre Höhe in dessen Mittelpunkte, so sind ihre Seitenkanten alle gleich.** (8, 2, 3.)

1) Erklärung. Eine Pyramide mit lauter gleichen Seitenkanten heifst eine gerade, jede andere eine schiefe.

2) Umkehrung. Um die Grundfläche einer geraden Pyramide läfst sich ein Kreis beschreiben. Der Fufspunkt ihrer Höhe wird sein Mittelpunkt.

3) Die Seitenkanten einer geraden Pyramide haben gegen die Grundfläche gleiche Neigungswinkel.

3. Ls. **Jeder der Grundfläche gleichlaufende Querschnitt einer Pyramide ist der Grundfigur ähnlich.**



Figur 130.

Bw. Die entsprechenden Seiten der Vielecke sind gleichlaufend nach **9**, 11. Deshalb sind ihre gleichliegenden Winkel gleich (**8**, 7), und man hat nach dem Verhältnissatze

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1S}{BS} = \frac{B_1C_1}{BC}.$$

Ebenso leitet die folgende Kante mittels ihres oberen Abschnittes C_1S über von $\frac{B_1C_1}{BC}$ auf $\frac{C_1D_1}{CD}$; dann bringt $\frac{D_1S}{DS}$ die Verhältnisgleichheit des nächsten Seitenpaares, und so rings herum, so viele Seiten da sein mögen. Wegen Gleichheit der entsprechenden Winkel und der Verhältnisgleichheit ihrer Seiten sind die Vielecke ähnlich.

4. Ls. **Von solchem Querschnitte und der Grundfläche verhalten sich gleichliegende Seiten und die Umfänge wie die Abstände dieser Ebenen von der Spitze; ihre Inhalte aber wie die Quadrate der Abstände von der Spitze.**

Der Beweis wird leicht geführt durch 1. T., **18**, 2, Zs. und **21**, 10, 2.

Bezeichnet man den Inhalt des Querschnitts mit Q, den der Grundfläche mit G, ihre Abstände von der Spitze mit x und h, so ist

$$Q = \frac{x^2}{h^2} G.$$

Der mitten durch die Höhe gehende Querschnitt A_2D_2 ist nur $^1/_4\, G$; derjenige, dessen Abstand von der Spitze $^7/_{10}\, h$ ist, kommt auf $^{49}/_{100}\, G$, also noch nicht auf die Hälfte. In welcher Entfernung x von der Spitze erreicht

der Inhalt des Querschnitts die Hälfte der Grundfläche? — In Figur 130 sind die Schnitte so gezeichnet, dafs A_2D_2 halb so grofsen Umfang, und A_1D_1 halb so grofsen Inhalt wie die Grundfigur AD hat.

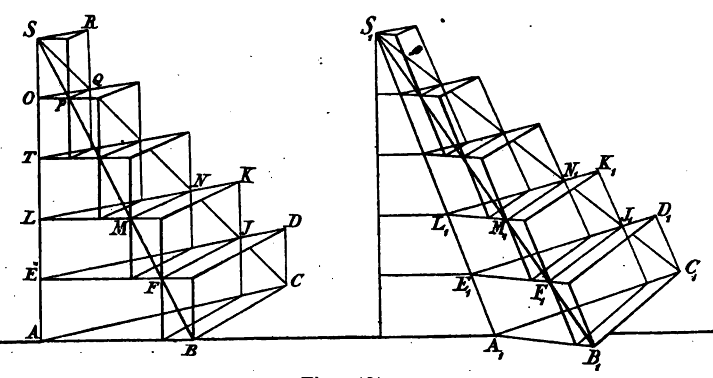
Zs. Werden zwei Pyramiden, welche gleich grofse Grundflächen und Höhen haben, in gleichem Abstande von der Spitze von einer der Grundfläche gleichlaufenden Ebene geschnitten, so sind die Schnittfiguren inhaltsgleich.

Denn in der ersten Pyramide ist $Q_1 = \frac{x^2}{h^2} G$ und in der zweiten $Q_2 = \frac{x^2}{h^2} G$.

b. Inhalt.

5. Ls. **Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.**

Bw. Die Figur 131 stellt zwei gleich hohe Pyramiden $SABC$ und $S_1A_1B_1C_1$ von verschiedener Gestalt dar, deren Grunddreiecke aber gleichen Inhalt haben, weil das halbe Produkt von Grundseite und Höhe in beiden gleich grofs gemacht ist. Die 40 mm grofsen Pyramidenhöhen wurden in n (5) gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt wurde eine der Grundfläche gleichlaufende Ebene gelegt.



Figur 131.

Von den in beiden Pyramiden entstehenden Querschnitten werden die in gleicher Höhe streichenden gleich grofs, $EFJ = E_1F_1J_1$, $LMN = L_1M_1N_1$ und so fort, nach dem soeben bewiesenen Zusatze unter Nr. 4.

Durch BC wurde die der Kante AS gleichlaufende Ebene BCD bis zur nächsten Querebene DEF gelegt; dann entstand durch Erweitern der Seitenebenen SAB und SAC das dreiseitige Prisma ABD, welches dem in der zweiten Pyramide ebenso hergestellten Prisma $A_1B_1D_1$ inhaltsgleich ist, weil beide gleiche Grundflächen und gleiche Höhen besitzen. Auch durch die Seite F_1J_1 des untersten Querschnitts der zweiten Pyramide wurde die der Kante A_1S_1 gleichlaufende Ebene $F_1J_1K_1$ bis zur zweiten Querebene $K_1L_1M_1$ geführt, und es entstand zwischen den Seitenflächen $S_1A_1B_1$ und $S_1A_1C_1$ das Prisma $E_1F_1K_1$, welches dem zweiten Prisma EFK der andern Pyramide gleich ist, weil ihre Grunddreiecke und Höhen gleich sind. So geht es in beiden Pyramiden fort bis zur Spitze; die n Prismen der einen Pyramide sind immer entsprechend gleich den n Prismen der andern; also sind auch ihre Summen gleich, die beide mit S_n bezeichnet werden sollen.

Die gelegten Seitenebenen wurden auch bis zu der darunter liegenden Querebene hinabgezogen. Das unter dem obersten Querschnitte OPQ entstehende Prisma

OPQT ist dem darüberstehenden *OPQR* gleich, da beide dieselbe Grundfläche *OPQ* haben und gleiche Höhen, die eine nach oben, die andere nach unten gerichtet. So trägt in beiden Pyramiden jeder Querschnitt ein stehendes und ein hängendes Prisma von gleicher Gröfse. Die zweite Reihe der Prismen, die ganz innerhalb der Pyramiden liegen, während die der ersten mit ihren Treppenstufen aus den Pyramiden hervorragen, hat ein Prisma weniger. Es ist also, wenn die Inhalte der beiden Pyramiden mit P und P_1 bezeichnet werden,

$$S_n > P > S_{n-1} \quad \text{und} \quad S_n > P_1 > S_{n-1}.$$

Beide liegen zwischen den gleichen Summen. Die Grenzen S_n und S_{n-1} unterscheiden sich um das unterste, auf der Grundfläche stehende Prisma *ABCD* oder drüben das ebenso grofse $A_1B_1C_1D_1$.

Denkt man an die Seitenflächen *SAC* und $S_1A_1C_1$ daran passende, in gleicher Weise hergestellte dreiseitige Pyramiden angesetzt, so gehen bei den entstandenen vierseitigen Pyramiden an zwei Seitenflächen Treppenstufen hinauf, bei fünfseitigen Pyramiden an drei, und so fort; stets ist

$$S_n > P > S_{n-1} \quad \text{und} \quad S_n > P_1 > S_{n-1}.$$

Teilt man beide Höhen h nicht in 5, sondern in 500 gleiche Teile, so treten die Treppenstufen viel weniger heraus; die Stufen der inneren Prismen gehen dichter an die Seitenflächen *SBC* und $S_1B_1C_1$ heran; die neuen Grenzen sind von beiden Seiten näher an P und P_1 herangekommen, aber noch ist

$$S_n > P > S_{n-1} \quad \text{und} \quad S_n > P_1 > S_{n-1}.$$

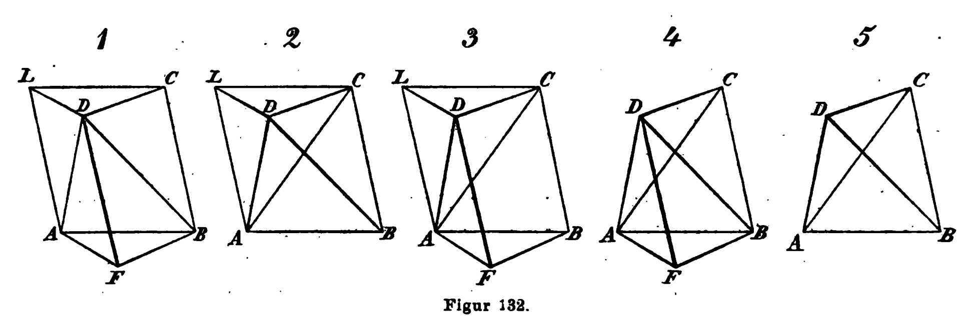
Der Unterschied der Grenzen, das auf der Grundfläche stehende Prisma, ist jetzt aber viel kleiner. Seine Höhe ist der fünfhundertste Teil von $h = 40$ mm, nur 0,08 mm, das ist die Dicke eines Bogens Druckpapier. (1. T., **1**, 6, unten.) Solches Papierdreieck *ABC* (oder Vieleck) würde, zusammengedrückt, eine kleinere Papierkugel geben, wenn man seine Dicke auf die des feinsten Seidenpapiers gebracht hätte. Man denke also die Höhen h lieber in 5000, oder 50000 gleiche Teile geteilt; dann wird der Unterschied der Grenzen sehr klein; aber beide Pyramiden liegen zwischen denselben nun schon sehr nahen Grenzen S_n und S_{n-1}, die man immer noch näher aneinander bringen kann, (so dafs ihr Unterschied viel kleiner als ein Sandkorn wird) wenn man die Höhen h in Million, Billion, Trillion . . . . gleiche Teilchen zerlegt denkt. Da man also an P und P_1 dieselben Grenzen ohne Aufhören näher bringen kann, können P und P_1 an Gröfse sich nicht unterscheiden; sie sind gleich.

6. Ls. **Ein dreiseitiges Prisma kann durch zwei Schnitte in drei gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.**

Bw. In Figur 132 wird von dem unter 1 gezeichneten dreiseitigen Prisma durch den Schnitt *DAB* die auf dem Grunddreieck stehende Pyramide *AFBD* fortgenommen. Der übrig bleibende Körper ist unter 2 noch einmal gezeichnet. Es ist eine vierseitige Pyramide, die zur Grundfläche die Raute *ABCL* hat. Nun wird der zweite Schnitt *DAC* geführt. Er zerlegt die Raute in zwei deckbare Dreiecke. Zu ihnen als Grundflächen gehört das von D auf die Ebene *ABCL* gefällte Lot als gemeinsame Höhe. Die Stücke sind also dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen und darum nach dem vorhergehenden Lehrsatze inhaltsgleich. Das linke Stück *LCDA* ist die an der Deckfläche des unter 3 wiederhergestellten Prismas hängende Pyramide. Wird nun diese fortgenommen, so bleibt



unter 4 die vierseitige Pyramide mit der Spitze *A*. Der erste Schnitt *DAB* zerlegt sie in zwei dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen und



Figur 132.

der gemeinsamen Höhe von *A* auf die Ebene der Raute *BCDF*. Das vordere Stück ist die auf der Grundfläche des Prismas stehende Pyramide, welche zuerst abgeschnitten wurde. Wird sie vom Körper 4 wieder fortgenommen, so bleibt das Mittelstück *ABCD* des Prismas, welches unter 5 noch besonders gezeichnet ist. *ABCD* war unter 4 gleich der stehenden Pyramide und unter 2 gleich der hängenden; also sind die drei Teile des Prismas einander gleich.

7. Ls. **Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist ein Drittel des Produkts aus ihrer Grundfläche und Höhe.**

Bw. Es sei (Figur 132) *AFBD* die gegebene Pyramide. Man lege durch die Grundkante *AB* die der gegenüberliegenden Seitenkante *FD* gleichlaufende Ebene bis zu der durch die Spitze *D* der Grundfläche gleichlaufenden Ebene; dann schliefsen sie mit den erweiterten Seitenflächen *AFD* und *BFD* ein auf demselben Grunddreieck stehendes Prisma ein. (8, 11.) Von seinem Inhalte $G \cdot h$ ist die dreiseitige Pyramide einer der drei gleichen Teile; ihr Inhalt also $\frac{1}{3}\,Gh$.

8. Ls. **Der Inhalt jeder Pyramide ist**

2. $$J = \frac{1}{3}\,Gh.$$

Bw. wie zu **11**, 21. Jede Pyramide hat nur ein Drittel des Inhalts eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe. [Der Nenner richtet sich nach der Zahl der Ausdehnungen: bei den spitzen ebenen Figuren (Dreieck, Kreisausschnitt) ist er **2**, bei den in eine Spitze auslaufenden Körpern ist er **3**.]

9. Erklärung. Nimmt man von einer Pyramide durch einen der Grundfläche gleichlaufenden Schnitt die Spitze weg, so bleibt ein Körper, welcher eine abgestumpfte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf genannt wird. (Figur 130.) Der Schnitt ist die Deckfläche, ihr Abstand von der Grundfläche die Höhe des Stumpfs.

10. Die abgeschnittene Spitze ist der ganzen Pyramide ähnlich, weil alle entsprechenden Grenzflächen ähnlich und die gleichliegenden Flächenwinkel gleich sind.

Hat der im Abstande x von der Spitze gelegte Durchschnitt den Inhalt D und ist das Verhältnis $\frac{x}{h} = v$ (wo h die Höhe der ganzen Pyramide be-

zeichnet), so wird vom Pyramideninhalt P die fortgenommene Spitze der Bruchteil v^3P, (Nr. 4) woraus man ersieht, dafs die Inhalte ähnlicher Körper sich verhalten wie die dritten Potenzen der Höhen oder gleichliegender Kanten. Für den Stumpf bleibt der Inhalt $(1-v^3)\,P$.

In welchem Abstande von der Spitze der Pyramide befindet sich der der Grundfläche gleichlaufende Schnitt, welcher die Pyramide halbiert? Antwort: $x = 0{,}7937\,h$. Der halbierende Schnitt liegt auffallend tief, unter $^3/_4$, fast bei $^4/_5$ der Höhe.

11. Aufgabe. **Den Inhalt eines Pyramidenstumpfs zu bestimmen durch seine Höhe h, Grundfläche G und Deckfläche D.***)

Ausführung. Setzt man auf den Stumpf die abgeschnittene Spitze von der Höhe x wieder auf, so sieht man, dafs der Inhalt des Stumpfes wird

$$J = {}^1/_3\,G\,(h + x) - {}^1/_3\,Dx = {}^1/_3\,[Gh + (G - D)\,x].$$

Um x zu beseitigen, hat man durch den Satz Nr. 4

$$\frac{D}{G} = \frac{x^2}{(h + x)^2}$$

indem man sogleich die Wurzel auszieht, $\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{G}} = \frac{x}{h + x}$

also $x = \frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G} - \sqrt{D}}$, dessen Nenner sofort von den Wurzeln zu befreien ist durch Erweitern des Bruches mit $\sqrt{G} + \sqrt{D}$

$$x = \frac{h\sqrt{D}\,(\sqrt{G} + \sqrt{D})}{G - D}.$$

Beim Einsetzen dieses Wertes in den Ausdruck J hebt sich der Nenner fort und h läfst sich ausschliefsen, so dafs man hat

3. Pyramidenstumpf $J = {}^1/_3\,h\,(G + \sqrt{GD} + D)$.

Anmerknng. **Das Ergebnis ist als Formel zu merken, nicht in Worten, auf die man kommt durch Deuten des Ausdrucks. Zunächst befremdet $\sqrt{GD}$. Aus dem davor und dahinter stehenden G und D ist zu ersehen, dafs diese Wurzel eine Fläche bedeuten mufs. Sie werde mit Q bezeichnet. In $Q = \sqrt{GD}$ erkennt man $G : Q = Q : D$, dafs also die Fläche Q ihrer Gröfse nach zwischen G und D liegt und durch einen Querschnitt darstellbar ist. Ihn zu finden, seien von G, Q und D gleichliegende Seiten a, b und c. Weil die drei Figuren ähnlich sind (Nr. 3), hat man**

$$\frac{G}{Q} = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{Q}{D} = \frac{b^2}{c^2}$$

daher wegen obiger Verhältnisgleichung $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}$, also $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Demnach wird man in Figur 130, nachdem b als Mittelglied zu $BC = a$ und $B_2C_2 = c$ gezeichnet ist, die Strecke b auf BC von B aus abtragen, durch ihren Endpunkt die der Kante BS gleichlaufende Grade ziehen, welche CS etwa 1 mm unter C_1 trifft, und durch den

*) Die kleinere Grundfläche ist nicht mit g bezeichnet, weil das Hersagen der Formel verlängert wird durch das notwendige Einschalten der Worte „grofs" G und „klein" g; ferner weil es sehr vorteilhaft ist, zum Unterschiede von Längen die Flächen und Körper mit grofsen Buchstaben zu bezeichnen, um mit schnellem Blick untergelaufene Umformungsfehler entdecken zu können, indem man die Glieder der Gleichung auf Benennung prüft, ob alle Flächen oder alle Körper bedeuten.

Treffpunkt die der Grundfläche gleichlaufende Ebene legen, welche den gesuchten Querschnitt Q wenig unter dem Schnitt $A_1 D_1$ giebt. Mit ihm lautet der Ausdruck J nach Auflösen der Klammer

$$J = G \cdot {}^1/_3 h + Q \cdot {}^1/_3 h + D \cdot {}^1/_3 h$$

und dies lehrt: Man kann die beiden der Grundfläche gleichlaufenden Ebenen, welche die Höhe h des Pyramidenstumpfes in 3 gleiche Teile zerlegen, benutzen zur Herstellung dreier prismatischen Schichten, von denen die untere auf der Grundfläche G steht, die obere an der Deckfläche D hängt und die mittlere die Grund- und Deckfläche so grofs wie Q hat. Dieser dreistufige Schichtkörper ist ebenso grofs, wie der nach oben gleichmäfsig schmaler werdende Pyramidenstumpf.

Beispiel. Der Obelisk von Luxor in Paris (place de la concorde) stand früher mit ebensolchem vor dem Palaste Luxor in Oberägypten. Dort wurde er im Jahre 1831 umgelegt, dann nach Paris gebracht und 1836 auf einem Stufenunterbau mit Sockel aufgerichtet. Er besteht aus einem einzigen Stück Granit von der Gestalt eines vierseitigen, sehr gestreckten Pyramidenstumpfs, dessen Deckfläche die Grundfläche einer pyramidenförmigen Spitze ist. Die Seite des Grundquadrates beträgt 2,42 m, die der Deckfläche 1,54 m, die Höhe des Pyramidenstumpfs 21,60 m und die der Schlufspyramide 1,20 m. Vor dem Fortschaffen mufste, um die Tragfähigkeit des Schiffes danach einzurichten und dessen Tiefgang beim Einladen vorher zu wissen, berechnet werden, wieviel Kilogramm dieser Obelisk wiegt, da das Eigengewicht des ägyptischen Granits 2,654 ist. Man berechne das Gewicht durch verkürztes Multiplizieren. (Er wiegt 231000 kg.)

12. Übungen.

1) Die gröfste ägyptische Pyramide, die des Königs Chufu, ist 146,5 m hoch und jede Seite der quadratischen Grundfläche ist 233 m lang. Wie grofs ist die quadratische Fläche, welche mit einer drei Meter hohen und 0,3 m dicken Mauer aus den Steinen dieser Pyramide umschlossen werden könnte? (Der Flächeninhalt von Frankreich beträgt 530000 qkm.)

Antwort: $x^2 = 542350$ qkm. Das quadratisch gedachte Frankreich könnte ganz umzogen werden mit einer 3 m hohen Mauer aus den Steinen dieser einen Pyramide.

2) Inhalt: Martus, Aufgaben 453, 455; 430, 431, 435; 426, 413, 427; 416.

3) Seitenflächen: M., Aufgaben 428, 406.

4) Neigungswinkel: M., Aufgaben 407—410, 433.

5) Abgestumpfte Pyramiden: M., Aufgaben 441 a, 442—446.

6) Zerlegung des Körpers: M., Aufgaben 457, 401.

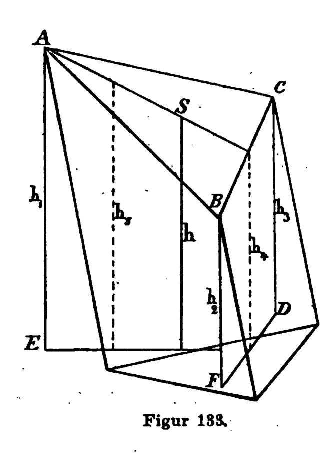
7) Verbindet man bei einer dreiseitigen Pyramide jede Ecke mit dem Schwerpunkte des gegenüberliegenden Dreiecks, so schneiden sich diese vier Linien in demselben Punkte. Dieser Schwerpunkt der Pyramide teilt jede der vier Linien so, dafs von ihr $^1/_4$ beim Dreieck und $^3/_4$ an der Spitze liegen. (Man zeige dies zunächst an zwei Dreiecken, indem man deren Schwerpunkte verbindet.)

8) Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma (Figur 133) ist gleich der Summe von drei mit ihm auf derselben Grundfläche stehenden Pyramiden, deren Spitzen die Eckpunkte des schiefen Schnittes sind. (Nr. 6.) Demnach ist sein Inhalt

$$J = G \cdot {}^1/_3 (h_1 + h_2 + h_3).$$

Es ist aber die vom Schwerpunkte des Schnittes auf die Grundebene gefällte Senk-

rechte h der Mittelwert der drei Höhen. Daher $J = G \cdot h$, also gleich einem Prisma, dessen Deckfläche durch den Schwerpunkt des schiefen Schnittes geht.



Figur 133.

Man wende diesen Satz auf das schief abgeschnittene gerade Prisma $ABCDEF$ an (in Figur 133) und auch auf seine unter die Grundebene gehende Fortsetzung, die dort irgendwo in beliebig anderer schiefer Richtung abgeschlossen wird. Die Summe der Ergebnisse lehrt:

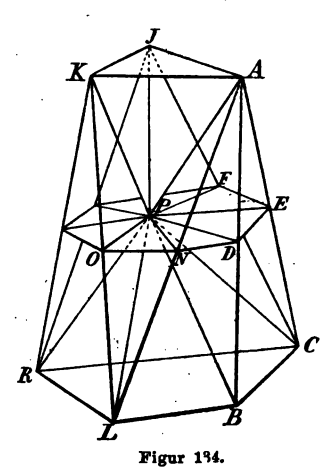
Der Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkt aus dem rechtwinklig durch die Seitenkanten gehenden Schnitte und deren Mittelwerte oder dem gegenseitigen Abstande der Schwerpunkte der Endflächen. (Beispiel: M., Aufgabe 456.)

9) Aufgabe. Eine auf einer Raute stehende Pyramide zu halbieren durch eine Ebene, welche eine Grundkante enthält. [Auf beide Teile wird der unter 8) erhaltene Satz angewandt.]

Ergebnis. Beide Gegenkanten der Ausgangsseite werden von der Ebene nach dem goldenen Schnitte geteilt, so dafs der gröfsere Abschnitt an der Spitze der Pyramide ist.

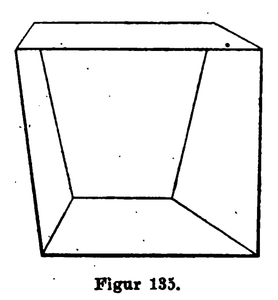
10) Ein Körper hat als Grundfläche ein regelmäfsiges Achteck von der Seite a, als Deckfläche ein Quadrat von der Seite a und als Seitenflächen abwechselnd Quadrate und gleichseitige Dreiecke mit der Seite a. Man bestimme den Inhalt des zusammengesetzten Körpers durch Gruppieren seiner Teile, nachdem man seine Grundfläche mit den erforderlichen zwei Paar Eckenlinien besonders hingezeichnet hat. (Dieser Körper ist ein gutes Beispiel zur Darstellung eines Schaubildes. Man nehme über der in die Zeichenebene gelegten Mittellinie des Achtecks die Horizontlinie nur wenig höher an, als der Halbmesser des umbeschriebenen Kreises lang ist, und den Hauptpunkt über der Mittellinie, doch fast bei ihrem Ende.) [Dazu 21, 7, 7.]

Ergebnis. $J = \left(1 + {}^2/_3 \sqrt{2}\right) a^3 = 1{,}9428\, a^3$.



Figur 134.

11) Erklärung. Ein Prismatoid (Figur 134) ist ein Körper, der als gleichlaufende Grundfläche und Deckfläche zwei beliebige Vielecke hat und zu Seitenflächen Dreiecke, die mit der einen Grundfläche eine Seite, mit der andern einen Eckpunkt gemein haben.


Figur 135.

Haben die beiden Vielecke n und n' Seiten, so besitzt der Körper $n + n'$ Seitendreiecke, und deshalb hat jeder den Grundflächen gleichlaufende Querschnitt $n + n'$ Seiten. Läfst man aber zwei Vielecksseiten, die zu Nachbardreiecken gehören, gleichlaufend werden, (man betrachte KA und LB) so kommen die beiden Dreiecke in eine Ebene und bilden ein Trapez, (OND wird zu einer geraden Linie) und dann hat der Quer-

schnitt $(n + n' - 1)$ Seiten. Überhaupt bekommt der Querschnitt so viele Seiten weniger als $n + n'$, wie Paare solcher Vielecksseiten gleichlaufend sind. In dem besonderen Falle, dafs bei den Vielecken je zwei Seiten gleichlaufend genommen werden, heifst der Körper ein Obelisk. (Figur 135.) Dessen Seitenflächen sind also Trapeze, die auch zu Rauten werden können.

Man darf auch eine oder beide Grundflächen des Prismatoids in eine gerade Linie, oder die eine in einen Punkt übergehen lassen.

Der mitten zwischen den Grundflächen ihnen gleichlaufend gelegte Schnitt heifst die Mittelfläche des Prismatoids.

Aufgabe. Zu beweisen, dafs der Inhalt eines Prismatoids, wenn die Inhaltszahlen der Grund-, Mittel- und Deckfläche mit G, M und D bezeichnet werden, zu berechnen ist aus
$$J = {}^1/_6\, h\, (G + 4\,M + D).$$

Diese Formel wird die Simpsonsche Regel genannt.

Wie bei der Herleitung zu verfahren ist, zeigt Figur 134. Dabei ist zu beachten, dafs die Pyramide $ABCP = 4\,ADEP$ wird.

12) Nachzuweisen, dafs in der Simpsonschen Regel enthalten sind die Inhaltsausdrücke folgender Körper: *a*) Prisma, *b*) Pyramide, *c*) schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma, [man zeichne es so, dafs eine Seitenfläche als Grundfläche dient. Vergl. 8) am Ende.] *d*) abgestumpfte Pyramide. Auch betrachte man *e*) zwei Gegenkanten einer dreiseitigen Pyramide als die in gerade Linien ausgearteten Grundflächen eines Prismatoids. (Siehe auch **15**, 19, Anm. und 22, 30.)

13) Auf einem Quadrate mit den Eckenlinien $2a$ (von denen die eine in der Zeichenebene liegt) steht eine Pyramide, deren Seitenkanten auch $2a$ sind. Stumpft man die vier Grund-Ecken bis zu den Mitten ihrer Kanten ab, so bleibt ein Körper von der Gestalt einer Turmspitze.*) Welche Stellung zur Grundebene haben die geführten Schnitte? Wie grofs sind 1) die Kanten des Körpers, 2) seine Höhe, 3) sein Inhalt, ausgedrückt durch Grundfläche und Höhe, dann nur durch a, 4) die Oberfläche, 5) der Neigungswinkel eines Vierecks gegen das Grundquadrat, 6) oben an der Spitze die Kantenwinkel und die Flächenwinkel, woraus auch die zwischen einem Vierecke und Dreiecke hervorgehen.

Ergebnis. — 3) $J = {}^1/_2\, a^2 h = {}^1/_2\, a^3 \sqrt{3} = 0{,}866\, a^3$; 4) $F = (1 + \sqrt{3} + \sqrt{7})\, a^2 \doteq 5{,}18\,154\, a^2$. 5) Das Dach steigt unter einem Winkel von $67^0\, 47'\, 33''$ an; 6) die Winkel zwischen den Kanten an der Spitze $\gamma = 41^0\, 24'\, 35''$, der Flächenwinkel zwischen den Vierecken, aus $\cos\alpha = -{}^1/_7$, $\alpha = 98^0\, 12'\, 48''$ und der zwischen einem Vierecke und Dreiecke $\beta = 130^0\, 53'\, 36''$.

---

13. Glied. Die Walze. (Der Cylinder.)

a. Gestalt.

1. Erklärung. Legt man durch einen Punkt einer Kreislinie eine Gerade, die nicht in die Ebene des Kreises fällt, und führt sie in derselben Richtung am Kreise entlang rings herum, so beschreibt sie eine Walzenfläche. Die leitende Linie konnte auch eine Ellipse oder irgend

*) Die im 12. und 13. Jahrhundert im romanischen Stile erbauten Kirchen (z. B. in Andernach) haben häufig eine so gestaltete Turmspitze.

eine andere krummlinige geschlossene Figur sein. Durchschneidet man die Walzenfläche durch eine der Ebene der Grundfigur gleichlaufende Ebene, so heifst der nun abgeschlossene Körper eine Walze. Die sie abschliefsenden Ebenen sind ihre Grundflächen, oder die erste die Grundfläche, die zweite die Deckfläche; die krumme Grenzfläche heifst der Mantel der Walze. Der gegenseitige Abstand der Grundflächen ist die Höhe der Walze. Stand die an die Grundfigur gelegte Gerade auf deren Ebene senkrecht, so wird die Walze eine gerade, lag sie schief zur Grundfläche, so entsteht eine schiefe Walze.

2. Ls. In einer Walzenfläche läfst sich durch jeden Punkt eine gerade Linie ziehen.

Bw. Als die herumgeführte Gerade die krumme Fläche beschrieb, mufs sie auch an den gewählten Punkt der Fläche gekommen sein. An der Stelle war sie die gedachte gerade Linie.

Erklärung. Die geraden Linien in der Walzenfläche heifsen Seitenlinien oder Seiten.

Zs. 1) Alle Seitenlinien einer Walze sind gleichlaufend.

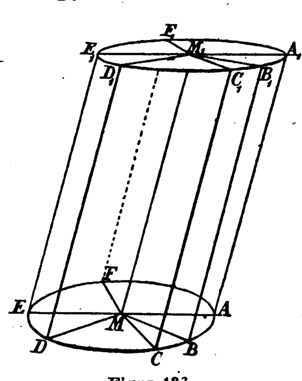
2) Deshalb haben alle gleiche Neigungswinkel gegen die Grundflächen. Steht eine von ihnen auf einer Grundfläche senkrecht, so stehen alle senkrecht auf beiden Grundflächen. (**9**, 16—18.)

3) Alle Seitenlinien einer Walze sind gleich lang.

4) Durch keinen Punkt des Mantels läfst sich noch eine zweite gerade Linie in der Walzenfläche ziehen.

Bw. Durch jeden Punkt der Walzenfläche, welcher in der zweiten Geraden läge, ihren Schnittpunkt mit der ersten ausgenommen, ginge eine andere Seitenlinie des Mantels. Diese gleichlaufenden Geraden lägen also in der Ebene des Winkels, den die zwei Geraden bilden. Die Walzenfläche wäre also an dieser Stelle eben und müfste die Grundfläche in gerader Linie schneiden, die krumme Leitlinie also hier gerade sein.

3. Ls. **Grund- und Deckfläche einer Walze sind deckbar.**



Figur 136.

Bw. Ist die Grundfläche ein Kreis oder eine Ellipse, so ziehe man durch den Mittelpunkt die Gerade in Richtung der Seitenlinien und lege durch sie und irgendwelche Seitenlinien Ebenen. Die entstehenden Schnittfiguren weisen nach, dafs, wenn die Grundfläche ein Kreis ist, die Deckfläche ein Kreis mit gleichem Halbmesser um den Treffpunkt M_1 ist. Ist die Grundfläche eine Ellipse, so fällt beim Aufeinanderlegen jeder Punkt des Umfangs in den ihm entsprechenden, wegen Gleichheit der Zwischenwinkel (wie $A_1M_1B_1 = AMB$). Wird die Grundfläche von einer krummen Linie umschlossen, die keinen Mittelpunkt hat, so zieht man von irgend einem Punkte der Grundebene aus die Gerade in Richtung der Seitenlinien und verfährt ebenso.

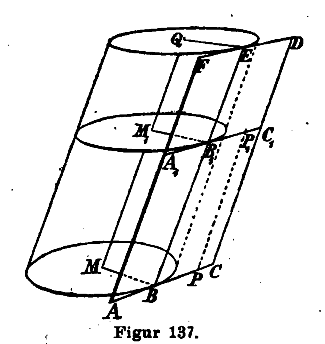
Erklärung. Die Gerade zwischen den Mittelpunkten der beiden Grundflächen heifst die Achse der Walze.

Zs. Von jedem der Grundfläche gleichlaufenden Schnitt einer Walze gilt dasselbe, weil man auch dort die Walze abschliefsen konnte.

Anmerkung. Eine Walzenfläche entsteht auch, wenn die gerade und die geschlossene krumme Linie die Rollen wechseln, also die Gerade die Leitlinie ist. Wie mufs man die Grundfigur bewegen?

4. Ls. **Legt man durch eine Berührungslinie der Grundfigur und durch die zum Berührungspunkte gehörige Seitenlinie der Walze eine Ebene, so hat sie mit dem Mantel nur diese Seitenlinie gemein und liegt sonst ganz aufserhalb desselben.**

Bw. Es sei AC irgend eine Berührungslinie der Grundfigur (mag diese ein Kreis oder eine Ellipse sein) und BE die durch den Berührungspunkt B gehende Seitenlinie. In der durch AC und BE bestimmten Ebene AD mufs jeder Punkt, wie P_1, welcher nicht in der Seitenlinie BE sich befindet, aufserhalb der Walze liegen. Dies nachzuweisen, lege man durch den gewählten Punkt P_1 die der Grundfläche gleichlaufende Ebene. Sie schneidet die Ebene AD in der Geraden A_1C_1 und die Walze in einer Schnittfigur, welche mit der Grundfigur deckbar ist. (Nr. 3, Zs.) Legt man noch die Ebene durch die Achse MQ und die Seitenlinie BE, so entsteht $\angle M_1B_1C_1 = MBC$. (8, 7.) Daher fällt bei der Deckung P_1 in einen Punkt P der Berührungslinie BC, welcher nicht ihr Berührungspunkt B ist. Darum befindet sich P_1 wie P aufserhalb der Schnittfigur, liegt also auch an seiner gegebenen Stelle aufserhalb der Walze.



Figur 137.

Zs. Die Ebene AD schneidet jeden der Grundfläche gleichlaufenden Schnitt in einer Berührungslinie.

Erklärung. Eine Ebene, welche mit einer Walzenfläche nur eine ihrer Seitenlinien gemein hat und sonst ganz aufserhalb der Walze liegt, heifst eine Berührungsebene; die gemeinsame Seitenlinie ist ihre Berührungslinie.

5. Umkehrung. **Eine Berührungsebene der Walze schneidet die Grundfläche in einer Berührungslinie der Grundfigur.**

Bw. Wäre die Schnittlinie keine Berührungslinie, so müfste sie den Umfang der Grundfigur noch in einem zweiten Punkte treffen und die durch diesen gehende Seitenlinie der Walze und die erste Seitenlinie würden eine Ebene bestimmen, mit welcher die gegebene Ebene zusammenfiele, so dafs diese zwei Seitenlinien mit dem Mantel gemeinsam hätte, also keine Berührungsebene wäre.

6. Erklärung. Der durch eine Sehne der Grundfläche in Richtung der Achse geführte Schnitt heifst ein Sehnenschnitt der Walze.

Ls. **Jeder Sehnenschnitt einer Walze ist eine Raute.**

Bw. Die zu den Endpunkten der Sehne gehörigen Seitenlinien befinden sich in der Schnittebene. (8, 11, 2.) Diese schneidet also den Mantel in zwei geraden Linien, welche gleichgerichtet sind, und die Grundflächen auch in solchen Geraden.

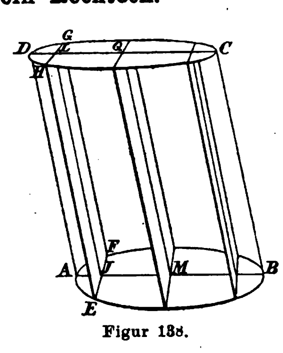
7. Erklärung. Der von einem Durchmesser der Grundfläche ausgehende Sehnenschnitt wird, weil er die Achse enthält, ein Achsenschnitt genannt.

Ls. **In einer geraden Walze stehen alle Achsenschnitte auf der Grundfläche senkrecht, in einer schiefen nur der, welcher durch die Senkrechte geht, die von einem Punkte der Achse auf die Grundfläche gefällt wird.**

Bw. Zunächst sind die Sätze **9**, 5 und **8**, 8 anzuwenden; dann ist für die schiefe Walze die Möglichkeit eines zweiten senkrechten Achsenschnitts durch **9**, 9 abzuweisen.

8. Erklärung. Eine Walze, deren Grundflächen Kreise sind, werde als eine Kreiswalze bezeichnet.

Ls. **In einer schiefen Kreiswalze ist jeder Sehnenschnitt, dessen Grundseite die des senkrechten Achsenschnitts rechtwinklig schneidet, ein Rechteck.**



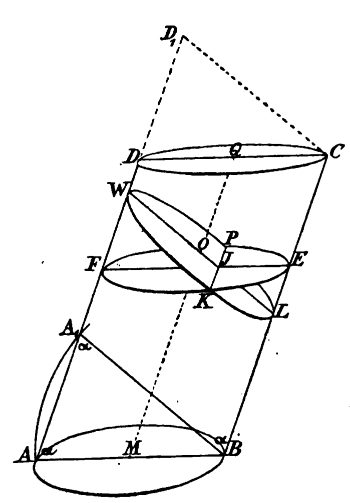
Figur 138.

Bw. Es sei $ABCD$ der senkrechte Achsenschnitt einer schiefen Kreiswalze. Durch seine Grundseite AB ist die Sehne EF rechtwinklig gezogen; mithin ist EF rechtwinklig auch auf der Ebene $ABCD$ (**9**, 7); $\angle FJL$ ist also ein Rechter. Es ist aber JL die Mittellinie der Raute $EFGH$, gleichlaufend den Seiten FG und EH, die also auch mit EF rechte Winkel bilden. Daher ist solcher Sehnenschnitt der schiefen Walze ein Rechteck.

Zs. 1) In einer schiefen Walze ist nur ein Achsenschnitt ein Rechteck.

2) In einer schiefen Walze ist der senkrechte Achsenschnitt der kleinste, der rechtwinklige der gröfste. (**8**, 9.)

3) Die rechteckigen Sehnenschnitte stehen rechtwinklig auf dem senkrechten Achsenschnitte. (**9**, 7 und 5.)



Figur 139.

9. Erklärung. Ein Wechselschnitt durch eine schiefe Walze entsteht dadurch, dafs man die Raute, welche als senkrechter Achsenschnitt erhalten wurde, ihre Lage wechseln läfst, indem man in ihrer Ebene mit der Grundseite um einen Endpunkt einen Kreisbogen beschreibt (Figur 139) und nach dessen Schnittpunkt auf der Gegenseite den Halbmesser zieht; dann durch diesen oder durch eine ihm gleichgerichtete Schnittlinie eine Ebene rechtwinklig gegen den senkrechten Achsenschnitt legt.

Ls. **Jeder Wechselschnitt einer schiefen Kreiswalze ist ein der Grundfläche gleicher Kreis, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt.**

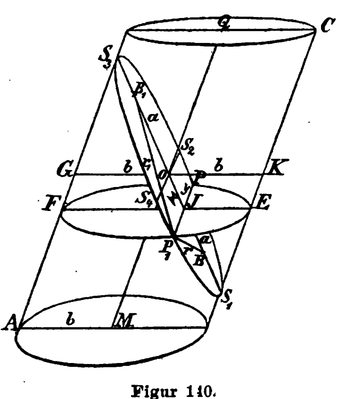
Bw. Durch einen beliebigen Punkt P des Wechselschnitts $WPLK$ lege man die der

Grundfläche gleichlaufende Ebene, welche also, wie diese, rechtwinklig zum senkrechten Achsenschnitt $ABCD$ läuft. Der Wechselschnitt thut dies auch; also steht ihre Schnittlinie PK auf der Ebene $ABCD$ senkrecht; daher auch auf FE und WL. Das Dreieck ABA_1 liefert die Begründung, dafs die Dreiecke FJW und EJL gleichschenklig sind; und darum wird die aus dem Halbkreise EPF erhaltene Gleichung (1. T., **16**, 6, 1)

$$PJ^2 = JE \cdot JF = JL \cdot JW.$$

Denkt man nun in der Ebene des Wechselschnitts über WL als Durchmesser einen Kreis beschrieben, welchen KP im Punkte P_1 treffen möge, so ist in dessen Halbkreise P_1J^2 auch $= JL \cdot JW$; daher $PJ = P_1J$; der Punkt P fällt also mit dem Kreispunkte P_1 zusammen. Dies gilt von jedem Punkte des Wechselschnitts, weil P ein beliebiger Punkt desselben war. Der Wechselschnitt ist also der über WL als Durchmesser beschriebene Kreis. Dafs sein Mittelpunkt in der Achse der Walze liegt, ist aus $ABLW$ leicht nachzuweisen; und dafs sein Durchmesser $WL = FE = AB$ ist, war schon gefunden.

10. Ls. **Stellt man rechtwinklig auf den senkrechten Achsenschnitt einer Kreiswalze eine Ebene, welche weder der Achse, noch dem Grundkreise oder einem Wechselschnitte gleichlaufend ist, so schneidet sie die Walze in einer Ellipse.**



Figur 110.

Bw. Legt man durch einen beliebigen Punkt P des Schnittes $S_1PS_3P_1$ die der Grundfläche gleichlaufende Ebene, so hat man, wie in Nr. 9, aus dem Halbkreise EPF

$$PJ^2 = JE \cdot JF.$$

Die Schnittlinie S_1S_3 wird von der Achse MQ in O halbiert. Jede Hälfte werde mit a bezeichnet. Die durch O dem Grundkreise gleichlaufende Ebene liefert einen Schnittkreis mit den Durchmessern GK und S_2S_4, die $= 2b$ sind, wenn der Halbmesser AM des Grundkreises die Länge b hat. Der Abstand des Fufspunktes J von O werde mit x bezeichnet. Der Verhältnissatz giebt aus dem Dreieck OKS_1

$$\frac{JE}{b} = \frac{a - x}{a}$$

und aus JFS_3

$$\frac{JF}{b} = \frac{a + x}{a}$$

welche Gleichungen in Hinsicht auf die erste mit einander multipliziert werden; dann hat man für die Senkrechte $PJ = y$

$$1) \qquad \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Die Punkte B und B_1, welche man in der Schnittlinie S_1S_3 erhält, wenn man von einem der Endpunkte des darauf senkrechten Durchmessers S_2S_4 aus mit a in S_1S_3 einschneidet, werden nun mit P (oder in der Figur mit dem ihm entsprechenden Punkte P_1 des Schnittes) verbunden. Dann wird,

da aus dem Dreieck S_2OB $OB = OB_1$ als

$$2)\qquad e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

bekannt ist, die Entfernung P_1B

$$r = \sqrt{y^2 + (e - x)^2} \quad \text{und } P_1B_1 \quad r_1 = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

oder, wenn man y^2 aus 1) einsetzt

$$r = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + e^2 - 2ex + x^2}$$

und nun mittels 2) zusammenzieht,

$$r = \sqrt{a^2 - 2ex + \left(\frac{e}{a}x\right)^2} = a - \frac{e}{a}x$$

und die Entfernung P_1B_1 $\quad r_1 = \sqrt{a^2 + 2ex + \left(\frac{e}{a}x\right)^2} = a + \frac{e}{a}x$

so dafs

$$r + r_1 = 2a$$

wird. Der Schnitt ist also diejenige krumme Linie, welche die Eigenschaft hat, dafs jeder ihrer Punkte von zwei Punkten B und B_1 Entfernungen hat, welche zusammen immer dieselbe Gröfse $2a$ geben; und das ist die Ellipse. (1. T., **1**, 5, 2.) Die Punkte B und B_1 heifsen ihre Brennpunkte, $S_1S_3 = 2a$ ist ihre grofse und $S_2S_4 = 2b$ ihre kleine Achse; die 4 Punkte S sind ihre Scheitelpunkte.

Die Stellung der Ellipsenpunkte in Bezug auf ihre Achsen wird mittels der Standgröfsen x und y ausgedrückt durch die in 1) erhaltene

3) **Gleichung der Ellipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Anmerkung. Dreht man die Schnittlinie S_3S_1 um O gegen den Uhrzeigerlauf herum, so wird a kleiner. In der Lage des Wechselschnittes kommt a auf die Gröfse von b, nimmt noch weiter ab, bis die Schnittlinie auf den Nebenseiten des Achsenschnitts senkrecht ist, wächst dann wieder und wird als OG, gleichlaufend MA, abermals zu b und nachher immer gröfser. Mit abnehmendem a wird auch der unter 2) angegebene Abstand der Brennpunkte von O, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, kleiner; B_1 und B rücken beim Herumdrehen der Schnittlinie S_3S_1 beide auf O zu. In den beiden besonderen Fällen, $a = b$, sind B_1 und B in O angekommen und es wird die Gleichung 3) zu

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = b^2$$

wie es bei den Standgröfsen von Kreispunkten sein mufs. So mufste unter den elliptischen Schnitten an zwei Stellen ein Kreis auftreten.

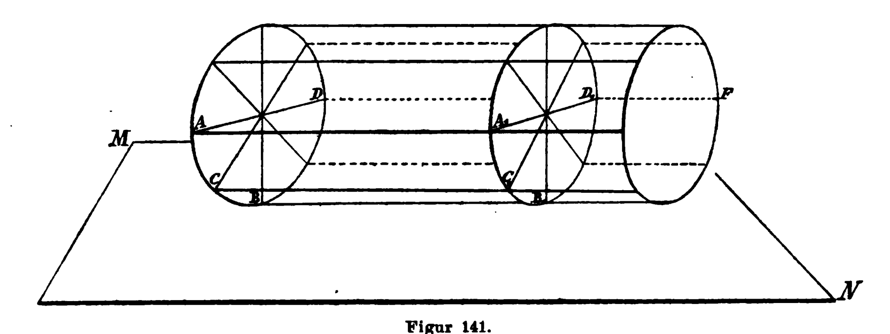
b. Mantel und Inhalt.

11. Der Mantel einer Walze läfst sich in eine Ebene ausbreiten. Dabei wird der Mantel einer geraden Walze ein Rechteck.

Die Figur 141 stellt eine schiefe Walze dar, welche auf der zur Seitenlinie BB_1 gehörigen Berührungsebene MN liegt.*) Verlängert man den Mantel über die eine

*) Gezeichnet ist eine Kreiswalze, bei welcher der Neigungswinkel der Achse gegen die Grundfläche einen halben Rechten beträgt. Sie liegt so, dafs der senkrechte Achsenschnitt AD_1 mit der wagerechten Grundebene MN gleichlaufend ist.

Grundfläche (nach rechts) noch etwas hinaus, (man kann ihn auch um die ganze Gröfse der Seitenlinien verlängert denken) und schiebt dann dieses Stück in die Walze hin-



Figur 141.

ein, so gleitet auf jeder Seitenlinie ihre Fortsetzung hin, und, da alle Seitenlinien gleichlaufend sind, und gegen beide Grundflächen gleiche Neigungswinkel haben (Nr. 2, 2), so findet rings herum Deckung statt, wenn die frühere Deckfläche A_1D_1 mit der Bodenfläche AD zusammenfällt. Das Aufsenstück A_1F stimmt also mit dem Bodenstück (bei AD) ganz überein. Bringt man nun das hineingeschobene Stück wieder an seine erste Stelle, und läfst dann die Walze nach vorn rollen, so mufs, wenn der Punkt C in die wagerechte Grundebene MN tritt, auch das ganz ebenso gestaltete Aufsenstück A_1F mit seinem entsprechenden Punkte C_1 ebenso weit auf MN gekommen sein; so dafs nun die ganze Seitenlinie CC_1 in der Ebene MN sich befindet. Beim Weiterrollen findet an der rechten und linken Grenze des Mantels wegen der völligen Übereinstimmung der beiden rollenden Stücke immer dasselbe statt; jede Seitenlinie des Mantels legt sich als Berührungslinie in die Grundebene MN. In dieser kommt der Punkt A (als Scheitel des spitzen Winkels im senkrechten Achsenschnitt AD_1) am weitesten nach links, später sein Gegenpunkt D_1 am weitesten nach rechts, und es besitzt, wenn die Ausgangsseite BB_1 wieder in die Grundebene getreten ist, der nun völlig ausgebreitete Mantel links und rechts ganz übereinstimmende krumme Grenzlinien, die etwa S-förmig (ohne die Enden des Buchstabens) gebogen sind (wenn man von der in der Figur dargestellten Anfangslage ausgeht). — Wenn aber die Walze eine gerade war, so dafs bei jeder Seitenlinie die zu ihren Endpunkten gehörigen Berührungslinien der Grundflächen rechtwinklig auf der Seitenlinie sind, so legt sich jedes Bogenteilchen mit seiner Berührungslinie beim Rollen der Walze in die rechtwinklig von B und B_1 in der Grundebene ablaufenden Geraden, mögen die beiden Grundflächen der Walze Kreise oder Ellipsen sein. Bei jeder geraden Walze wird der in eine Ebene ausgebreitete Mantel ein Rechteck.

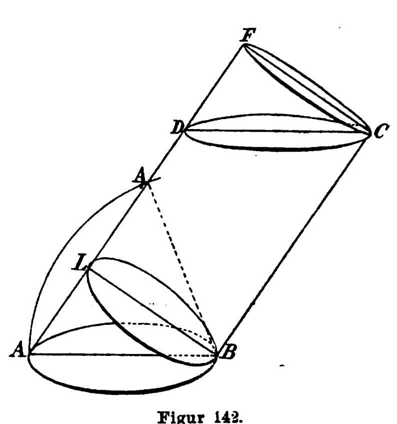
12. Der Mantel einer geraden Kreiswalze ist

4. $$M = 2\pi rh.$$

Bw. Der ausgebreitete Mantel ist ein Rechteck, dessen eine Seite die Höhe h der Walze ist und dessen anstofsende Seiten die Länge des Kreisumfangs $2\pi r$ haben.

Anmerkung. Der Mantel einer schiefen Kreiswalze ist gleich dem einer geraden elliptischen Walze, welche man erhält, wenn man durch die Endpunkte einer Nebenseite des senkrechten Achsenschnitts, rechtwinklig auf ihr, Schnitte durch den Mantel und seine Verlängerung legt. Solcher

Schnitt und die Ebene des senkrechten Achsenschnitts sind rechtwinklig auf einander. (9, 5.) Der Schnitt *BL* hat noch nicht die Lage des Wechselschnitts; dessen Richtung ist erst BA_1. Er geht mitten zwischen dem zu *B* gehörigen Grundkreis und Wechselschnitt hindurch; er ist also eine Ellipse. (Nr. 10.) Das Stück *BLA*, welches diese Ellipse unten abschneidet, und das, welches durch die Deckfläche *CF* oben hinzukommt, sind deckbar. (Nr. 11.) So viel, wie dem schiefen Mantel *ABCD* unten genommen wird, kommt oben hinzu. Der Mantel der schiefen Kreiswalze und der der geraden elliptischen Walze sind also gleich grofs. Der Mantel der geraden Walze wird, in eine Ebene ausgebreitet, zu einem Rechteck, dessen eine Seite *BC* gleich der Achse *a* der schiefen Kreiswalze ist, und dessen Nebenseiten die Länge *u* des Umfangs der Ellipse haben. Der Mantel der schiefen Kreiswalze ist also $= u \cdot a$. Allein die Zahl *u* ist durch die Schulmathematik nicht zu bestimmen.

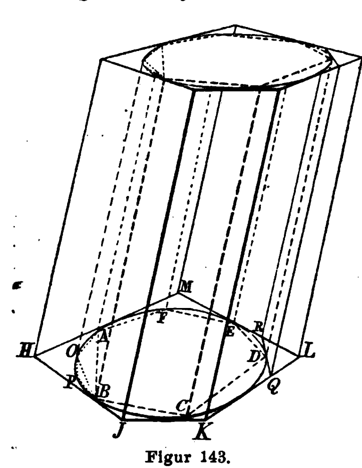


Figur 142.

Da also der Mantel einer schiefen Kreiswalze unbekannt bleibt, ist stets „gerade“ hinzuzufügen, wenn die Gröfse des Mantels einer Kreiswalze angegeben werden soll.

13. Der Inhalt jeder Walze ist gleich dem Produkt aus ihrer Grundfläche und Höhe.

Bw. Man beschreibe in die Grundfigur der Walze ein beliebiges *n*-Eck *ABCDEF* und lege durch jede seiner vielen Seiten einen Sehnenschnitt der Walze. (Nr. 6.) Es entsteht ein der Walze einbeschriebenes *n*seitiges Prisma, dessen Inhalt $G_1 \cdot h$ ist. Nun beschreibe man auch um die Grundfigur ein beliebiges Vieleck *HJKLM* und lege durch jede seiner Seiten und durch die zu ihrem Berührungspunkte gehörige Seitenlinie der Walze eine Berührungsebene. Mit jeder dieser Ebenen ist die Berührungslinie der folgenden gleichlaufend (8, 10), also ist auch die Schnittlinie beider Ebenen dieser Berührungslinie gleichgerichtet (8, 11); mithin sind alle Schnittlinien der Berührungsebenen gleichgerichtet. Daher ist jetzt ein um die Walze beschriebenes Prisma entstanden; dessen Inhalt ist $G_2 \cdot h$. In ihm steckt die Walze und in dieser das einbeschriebene Prisma; daher ist, wenn der Inhalt der Walze mit *W* bezeichnet wird,



Figur 143.

$$G_1 \cdot h < W < G_2 \cdot h.$$

Nun werde ein Punkt *O* des von der Sehne *AB* abgegrenzten Bogens mit *A* und *B* verbunden. Legt man durch *OA* und *OB* auch Sehnenschnitte, so erhält man ein auf *AOB* stehendes dreiseitiges Prisma. Verfährt man mit jeder andern Sehne ebenso, so legt sich an jede Seitenfläche des einbeschriebenen *n*seitigen Prismas ein schmales

dreiseitiges Prisma; alle bilden mit ihm zusammen ein einbeschriebenes $2n$seitiges Prisma, welches das Innere der Walze schon besser ausfüllt, als das $n$seitige Prisma. Durch das Ansetzen der Dreiecke, wie AOB, ist die Prismengrundfläche vergröfsert; beim $2n$seitigen Prisma hat also G_1 einen gröfseren Wert bekommen. Nimmt man nun auf dem Bogen OB wieder solchen Punkt, P, an, welcher die Spitze eines dem Abschnitte eingelegten Dreiecks OPB wird, und macht dies bei allen $2n$-Seiten, so wird das entstandene $4n$-Eck die Grundfläche eines $4n$seitigen einbeschriebenen Prismas, welches noch mehr vom Raume der Walze in sich schliefst, und die Inhaltszahl G_1 hat einen noch gröfseren Wert angenommen. So kann man mit Ausfüllen der Grundfläche und des Raumes der Walze immer weiter fortfahren; und stets wird die Gröfse des eingeschlossenen Raumes berechnet durch Multiplizieren der betreffenden Zahl G_1 und derselben Zahl h.

Vom umbeschriebenen Vieleck schneide man nun eine Ecke L durch eine Berührungslinie QR ab, und lege durch QR die Berührungsebene. Sie nimmt vom umbeschriebenen Prisma das auf dem Dreiecke LQR stehende Prisma fort. Verfährt man bei jeder Ecke ebenso, so ist die Grundfläche und der Raum des umbeschriebenen Prismas vermindert, und man kommt durch Fortsetzen dieses Verfahrens von aufsen her dem Raume der Walze immer näher, und die Inhaltszahl G_2 verkleinert sich mehr und mehr zu dem Werte G der Grundfigur der Walze, während G_1 an G heranwächst; so dafs wird

$$W = G \cdot h.$$

Zusätze. 1) **Der Inhalt einer Kreiswalze ist**

5. $$J = \pi r^2 h.$$

2) Nach dem in der Anmerkung zu Nr. 12 geführten Beweise sind die gerade elliptische Walze $BLFC$ und die schiefe Kreiswalze $ABCD$ inhaltsgleich. Dies und der Satz Nr. 13, dessen Beweis auch für eine elliptische Walze gilt, macht es möglich, schon hier den Inhalt einer Ellipse zu bestimmen.*) Bezeichnet man diesen mit E und bei der schiefen Kreiswalze den Halbmesser des Grundkreises mit a, (Figur 144) so ist

$$E \cdot h_1 = \pi a^2 \cdot h, \quad \text{also} \quad E = \pi a^2 \cdot \frac{h}{h_1}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCK und ABL folgt

$$\frac{h}{h_1} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a},$$

also ist der

6. Inhalt der Ellipse $E = \pi ab.$

Figur 144.

Dabei ist die grofse Achse der Ellipse $JN = 2a$; denn PQ ist der rechtwinklige Achsenschnitt der schiefen Walze, also $\angle P$ ein Rechter; auch sind in der geraden Walze $\angle J$ und N Rechte, daher PN ein Rechteck. Dafs JN und LB sich rechtwinklig schneiden,

*) Nach Prof. Dr. E. F. August, Direktor des Kölnischen Realgymnasiums in Berlin, Lehrbuch der Mathematik für den höheren Schulunterricht. (Berlin, G. Reimer, 1854) III, 25; § 9, 7.

folgt daraus, dafs PQ und die Ellipsenebene BL beide auf $ABCD$ senkrecht stehen. (Nr. 8, 3.)

Anmerkung. In dem Inhaltsausdruck der Ellipse ist der des Kreises enthalten.

3) Der Inhalt einer elliptischen Walze ist $= \pi abh$.

14. Übungen.

1) Wie verhalten sich die Inhalte gerader Kreiswalzen, deren Mäntel gleich sind?

2) Bei den Flüssigkeitsmafsen soll die Höhe das Doppelte des Durchmessers sein. Welche Höhe mufs ein Litermafs haben?

3) Bei den gröfseren Trockenmafsen mufs die Höhe $^2/_3$ des Durchmessers sein. Wie hoch ist ein Trockenmafs von 10 Litern?

[Beim Vergleiche der Ergebnisse 2) und 3) sieht man, dafs solche Inhalte nach dem quadratischen Verhältnisse der Durchmesser wachsen.]

4) Martus, Aufgaben 544, 545, 461, 546—548, 450, 549—552.

5) Um eine gerade Walze, vom Durchmesser d und der Länge s, windet sich eine Schraubenlinie $n$mal herum. Wie lang ist dieselbe und um wie wenig ist sie länger als n Umfänge des Grundkreises? Wie grofs ist ein Umlauf der von zwei Nachbarwindungen begrenzten Seitenfläche? Beispiel: $d = 1$ cm, $s = 10$ cm, $n = 100$. (Im einmal abgewickelten Mantel besteht die Schraubenlinie aus n gleichlaufenden Strecken; der Endpunkt jeder trifft beim Wiederaufrollen mit dem Anfangspunkte der folgenden zusammen. Vergl. Figur 157.)

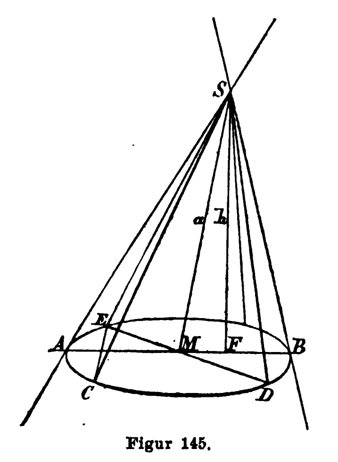
Ergebnis. Der Unterschied $u = s \operatorname{tg} {}^1/_2\, \alpha = 1{,}5911$ mm; daher die genaue Länge der Schraubenlinie $x = 3$ m 14 cm 3,1838 mm. $F = 31{,}4159$ qmm.

---

14. Glied. Der Kegel.

a. Gestalt.

1. Erklärung. Legt man an einen Kreis von einem aufserhalb seiner Ebene angenommenen Punkte aus eine unbegrenzte Gerade und führt sie, während man sie im gegebenen Punkte hält, am Kreise rings herum, so beschreibt sie eine Kegelfläche. Der von ihr und der Grundfläche eingeschlossene Körper heifst ein Kegel. Der feste Punkt ist seine Spitze. Der zwischen ihr und dem Grundkreise befindliche Teil der Kegelfläche ist der Mantel des Kegels. Die von der Spitze auf die Grundebene gefällte Senkrechte ist die Höhe des Kegels, die Gerade, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte des Grundkreises verbindet, die Achse des Kegels. Steht sie auf der Grundfläche senkrecht, so heifst der Kegel ein gerader; bei schief stehender Achse wird er als ein schiefer Kegel bezeichnet.



Figur 145.

Anmerkung. Man hätte statt des Kreises auch eine Ellipse oder eine andere geschlossene krumme

Linie als Leitlinie annehmen können, und würde dann einen elliptischen oder einen allgemeinen Kegel erhalten haben. Im folgenden soll nur der Kreiskegel behandelt werden.

2. Ls. **Durch jeden Punkt einer Kegelfläche läfst sich in dieser eine gerade Linie legen, aber nur eine einzige, nämlich die, welche durch die Spitze geht.**

Bw. wie **13,** 2 mit Zs. 4.

Diese Geraden heifsen Seitenlinien oder Seiten des Kegels.

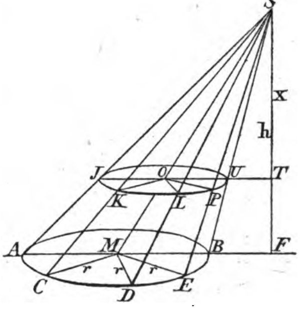
3. Ls. **Jeder der Grundfläche gleichlaufende Schnitt eines Kegels ist ein Kreis. Sein Mittelpunkt liegt in der Achse.**

Bw. Nachdem man durch die Achse und irgendwelche Seitenlinien des Kegels Ebenen gelegt hat, ist leicht nachzuweisen, dafs die Punkte der Schnittlinie vom Treffpunkte O der Achse gleich weit entfernt sind. Figur 146.

4. Von solchem Querschnitte und der Grundfläche verhalten sich die Umfänge wie die Abstände dieser Ebenen von der Spitze, ihre Inhalte aber wie die Quadrate der Abstände von der Spitze.

$$Q = \frac{x^2}{h^2} G.$$

Der Kreis, dessen Abstand von der Spitze $x = {}^1/_2 h$ ist, hat den halben Umfang des Grundkreises, den halben Inhalt aber erst der, dessen Abstand $x = 0{,}707\ h$ ist.

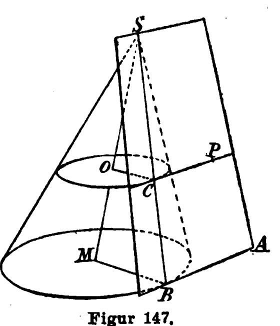


Figur 146.

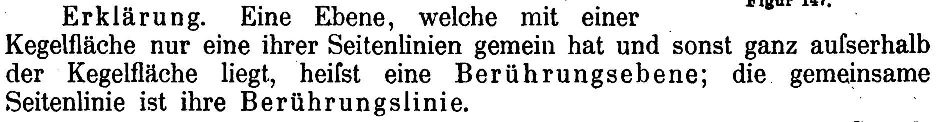
5. Ls. **Legt man durch eine Berührungslinie des Grundkreises und durch die Spitze des Kegels eine Ebene, so hat sie nur eine Seitenlinie mit der Kegelfläche gemeinsam und liegt sonst ganz aufserhalb derselben.**

Bw. Die Seitenlinie SB liegt in der Ebene AS, weil sie zwei Punkte, B und S, mit ihr gemeinsam hat. Es sei P ein Punkt der Ebene AS, der nicht der Linie BS angehört. Man lege durch P die der Grundfläche gleichlaufende Ebene und benutze auch die Ebene MSB.

Zs. Die Ebene AS schneidet jeden der Grundfläche gleichlaufenden Schnitt in einer Berührungslinie.



Figur 147.



Erklärung. Eine Ebene, welche mit einer Kegelfläche nur eine ihrer Seitenlinien gemein hat und sonst ganz aufserhalb der Kegelfläche liegt, heifst eine Berührungsebene; die gemeinsame Seitenlinie ist ihre Berührungslinie.

Umkehrung. Eine Berührungsebene des Kegels schneidet seine Grundfläche in einer Berührungslinie. Bw. wie zu **13,** 5.

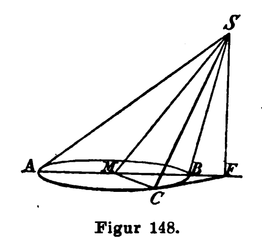
6. Erklärung. Eine durch eine Sehne des Grundkreises und durch die Spitze des Kegels gelegte Ebene heifst ein Sehnenschnitt. (Figur 145.)

Ls. **Jeder Sehnenschnitt eines Kegels ist ein geradliniges Dreieck.**

Zu beweisen durch die zu den Endpunkten der Sehne gehörigen Seitenlinien.

Erklärung. Geht ein Sehnenschnitt durch den Mittelpunkt des Grundkreises, so dafs er also die Achse enthält, so heifst er ein Achsenschnitt. (Figur 145.)

Ls. **Im geraden Kegel steht jeder Achsenschnitt auf der Grundfläche senkrecht, im schiefen nur der, welcher durch die Höhe geht.**

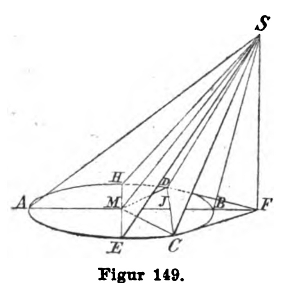


Figur 148.

Ls. **Ein schiefer Kegel hat nur einen senkrechten Achsenschnitt.** (9, 9.)

7. Ls. **Die Seitenlinien eines geraden Kegels sind gleich lang, die eines schiefen sind ungleich, und zwar gehört die gröfste und die kleinste dem senkrechten Achsenschnitte an.**

Bw. durch **8**, 2, 3). Summe und Unterschied zweier Seiten des Dreiecks CMF liefern das zuletzt Erforderliche.



Figur 149.

8. Ls. **Bei einer Sehne, welche die Grundseite des senkrechten Achsenschnitts rechtwinklig schneidet, wird der Sehnenschnitt ein gleichschenkliges Dreieck.**

Der Bw. nach Figur 149 ist leicht.

Zs. 1) Die Ebene eines gleichschenkligen Sehnenschnitts steht rechtwinklig auf dem senkrechten Achsenschnitt.

2) Ein schiefer Kegel hat nur einen gleichschenkligen Achsenschnitt.

3) Unter den Achsenschnitten eines schiefen Kegels ist der senkrechte der kleinste, der gleichschenklige der gröfste. (Figur 76 in **8**, 9.)

9. Erklärung. Einen Wechselschnitt eines schiefen Kegels findet man dadurch, dafs man das Dreieck, welches als senkrechter Achsenschnitt erhalten wurde, seine Lage wechseln läfst, indem man die kleinste Seitenlinie auf der gröfsten, die gröfste auf der kleinsten abträgt und die Endpunkte verbindet; dann durch diese oder eine ihr gleichgerichtete Schnittlinie eine Ebene rechtwinklig gegen den senkrechten Achsenschnitt legt. (Figur 150.)

Ls **Jeder Wechselschnitt eines schiefen Kegels ist ein Kreis. Sein Mittelpunkt liegt nicht auf der zum Mittelpunkte des Grundkreises gehenden Achse.**

Der Bw. entspricht dem zu **13**, 9 ausführlich angegebenen. Hier ist in den Scheiteldreiecken EJL und FJW aufser $\angle J = J$ der spitze Winkel $L = A_1 = A = F$; also sind die Dreiecke ähnlich (was auch in **13**, 9 der Fall war), und man hat

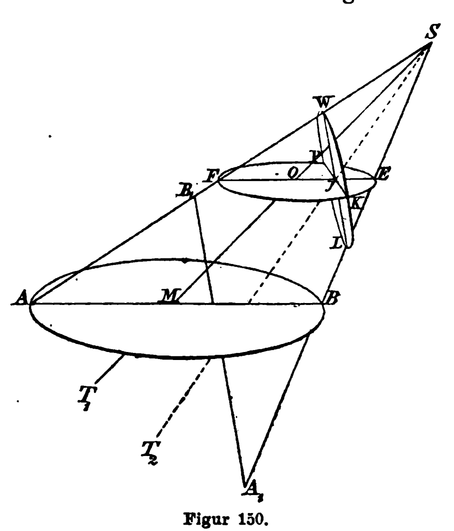
$$\frac{JE}{JL} = \frac{JW}{JF}$$

also ist
$$JE \cdot JF = JL \cdot JW$$

daher wieder
$$PJ^2 = JL \cdot JW$$

und damit schliefst der Beweis wie dort.

In Figur 150 ist die Linie *FE* so gelegt, dafs sie mitten durch *WL* geht. Es ist also *J* der Mittelpunkt des Wechselschnitts. Er liegt nicht auf der Achse *SM*. Denn läge er auf dieser Achse, so wäre er der Mittelpunkt des Kreises *EF*, also $EJ = JF$, und dann würden die Scheiteldreiecke *EJL* und *FJW* nach dem zweiten Satze ganz übereinstimmen, daher die in ihnen gleichliegenden spitzen Wechselwinkel *E* und *F* gleich sein; also müfsten *LE* und *FW* gleichlaufend sein, während sie doch in *S* sich schneiden.



Figur 150.

Anmerkung. Eine schiefe Kegelfläche hat zwei Achsen, ST_1 und ST_2. Die zweite ist der Ort der Mittelpunkte der Wechselschnitte. Denn die von *S* durch den Mittelpunkt *J* gehende Gerade halbiert alle im senkrechten Achsendreiecke *SAB* laufenden Schnittlinien, welche die Richtung B_1A_1 haben. (1. T., **18**, 10, 4.) Der in A_1B_1 stehende Wechselschnitt könnte für die Kegelfläche ebenso gut als Grundkreis genommen werden, wie der Kreis um *M*. Die durch diese beiden Grundkreise abgegrenzten Kegel sind deckbar. Durch Wechseln der Lage des ersten Kegels erhält man den zweiten.

Wendet man die Herstellungsweise der Wechselschnitte auf den geraden Kegel an, so erhält man die der Grundfläche gleichlaufenden Kreise wieder. Eine gerade Kegelfläche hat nur eine Achse. (Vergl. die Aufgabe unter Nr. 19, 13.)

10. Ls. Stellt man rechtwinklig auf den senkrechten Achsenschnitt eine Ebene, welche alle Seitenlinien des Kegels schneidet ohne ein Wechselschnitt oder der Grundfläche gleichlaufend zu sein, so wird der Kegelschnitt eine Ellipse.

Bw. Die in Figur 151 gewählte Ebene steht in S_1S_3 rechtwinklig auf dem senkrechten Achsenschnitt *SAC*. Durch einen beliebigen Punkt *P* der erhaltenen Schnittfigur, sowie durch die Mitte *O* von S_1S_3, legt man die der Grundfläche gleichlaufende Ebene. Dann hat man, wie in 13, 10 begründet wurde, durch den Halbkreis *EPF*

$$PJ^2 = JE \cdot JF$$

Figur 151.

und durch den Verhältnissatz, wenn man *OJ* mit x und OS_1 und OS_3 mit a bezeichnet,

$$\frac{JE}{OK} = \frac{a - x}{a}$$

$$\frac{JF}{OG} = \frac{a + x}{a}$$

deren Produkt giebt, da S_2O (aus demselben Grunde wie bei PJ) auf GK rechtwinklig ist, mit $PJ = y$ und $S_2O = b$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

also

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und das ist die auch in 13, 10 erhaltene Gleichung, welche als allen Punkten einer Ellipse angehörig sich erwies. Wie dort könnte man noch auf die Grundeigenschaft einer Ellipse weitergehen, um zu erhalten $PB + PB_1 = 2a$.

Anmerkung. Wie in der Anmerkung zu 13, 10 besprochen wurde, könnte auch hier durch Drehen der Ausgangslinie S_3S_1 gezeigt werden, dafs die Ellipse an zwei Stellen zum Kreise sich abrunden mufs. Beim Kegel kommt dabei noch etwas, was bei der Walze nicht eintreten konnte. Dreht man S_3S_1 um S_3 rechts herum, so streckt sich in der nach unten unbegrenzt fortlaufenden Kegelfläche die Ellipse immer länger. Hat die Linie sich nun so weit gedreht, dafs sie der Seitenlinie SC gleichlaufend geworden ist, so schneidet die in dieser Richtung auf ASC gestellte Ebene die Seitenlinie SC nicht. Dieser Kegelschnitt schliefst sich nicht, ist also keine Ellipse mehr; er ist eine (nach rechts unten offene) Parabel geworden. Dreht sich die Linie weiter, so schneidet sie die Seitenlinie CS wieder, aber in ihrer Verlängerung über S hinaus, und die in ihr rechtwinklig auf ASC stehende Ebene schneidet auch die der SC benachbarten Seitenlinien erst in der Scheitelkegelfläche, die andern auf dem Kegel selbst, und nur die zwei Seitenlinien nicht, welche in der durch die Kegelspitze S mit ihr gleichlaufenden Ebene liegen. Dieser aus zwei getrennten Zweigen bestehende Kegelschnitt heifst eine Hyperbel. Die Aufstellung der Gleichungen ist so einfach, wie oben, aber die Figur wird weniger übersichtlich, und so mag dies späterer Betrachtung aufgespart bleiben. (20. Glied.)

b. Mantel und Inhalt.

11. Der Kegelmantel läfst sich in eine Ebene ausbreiten. Legt man den Kegel auf eine Ebene, so berührt er sie mit einer Seitenlinie. Läfst man ihn auf der Ebene herumrollen, so bleibt seine Spitze an ihrer Stelle, die Grundfigur läuft, wie ein aus senkrechter Stellung gekommenes Rad, rings herum. Mit jedem Umfangspunkte kommt die zugehörige Seitenlinie ganz in die Ebene, weil sie aufser ihm auch den Punkt der Spitze mit der Ebene gemein hat. Kommt die Stelle der ersten Seitenlinie wieder in die Ebene, so ist der Mantel ganz abgewickelt. Die Figur in der Ebene gestaltet sich nach der Gröfse der Seitenlinien des Kegels. Der Mantel eines geraden Kreiskegels liefert, weil alle Seitenlinien dieselbe Länge s haben, einen Kreisausschnitt vom Halbmesser s (Figur 157 in Nr. 19 zeigt den eben ausgebreiteten Mantel eines sehr schlanken geraden Kreiskegels); ein schiefer Kegel giebt eine von zwei geraden und einer krummen Linie begrenzte Figur, deren Inhalt durch die Schulmathematik nicht angebbar ist.

12. **Der Mantel eines geraden Kegels ist,** nach der Formel für den Kreisausschnitt $S = \frac{1}{2} br$ (1. T., 22, 12),

$$\text{7.} \qquad \boldsymbol{M = \pi r s}$$

also gleich einer Ellipse mit den Halbachsen r und s. Er übertrifft den

von ihm überdeckten Grundkreis um so viel, wie diese auf den Grundkreis gelegte Ellipse aus ihm hervortritt.

Anmerkungen. 1) Der Winkel α an der Spitze des ausgebreiteten Mantels wird durch den Bogen bestimmt, der so lang wie der Kreisumfang ist:

$$2\pi r = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} s, \qquad \text{also} \qquad \alpha = \frac{r}{s} \cdot 360^0.$$

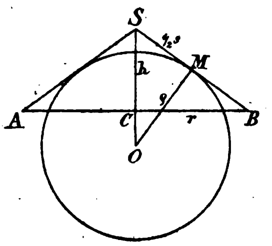
Durch Umdrehung eines gleichseitigen Dreiecks um seine Höhe entsteht ein gleichseitiger Kegel. Wie sieht dessen ausgebreiteter Mantel aus?

2) Der Kreis, welcher die Nebenseiten des Achsenschnitts in der Mitte berührt, giebt einen bemerkenswerten Ausdruck für den Mantel des geraden Kegels. Aus $\triangle\ OSM \backsim BSC$ erhält man

$$\frac{{}^1\!/_2 s}{\varrho} = \frac{h}{r}, \qquad \text{daher} \qquad rs = 2\varrho h$$

mithin nach Formel 7 der Mantel

$$\textbf{8.} \qquad M = 2\pi\varrho h.$$



Figur 152.

Er ist also so grofs wie der ebenso hohe Mantel einer geraden Walze, deren Grundkreis die Nebenseiten seines Achsenschnittes in der Mitte berührt. Führt man eine der Kegelhöhe gleiche Strecke h auf dem Kreise um O, immer senkrecht auf seiner Ebene, rings herum, so sieht man die Gröfse des Kegelmantels.

13. Der Inhalt jedes Kegels ist $J = {}^1\!/_3\, Gh$.

Nachdem man in und um den Kegel beliebige Pyramiden beschrieben hat, verfährt man wie bei **13**, 13.

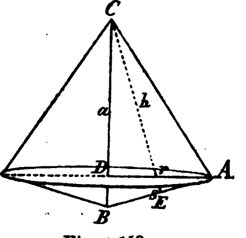
Der Inhalt eines Kreiskegels ist

$$\textbf{9.} \qquad J = {}^1\!/_3\, \pi r^2 h$$

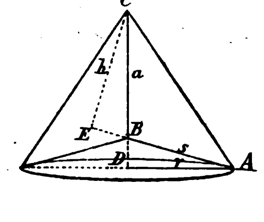
nur ein Drittel einer Walze von gleicher Grundfläche und Höhe.

Ein auf einer Ellipse stehender Kegel hat den Inhalt ${}^1\!/_3\, \pi abh$.

14. Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner kleinen Seiten als Achse, so entsteht ein gerader Kegel. (**8**, 3, 1.) Dreht man ein spitzwinkliges Dreieck um eine seiner Seiten (man ziehe die Höhe auf die als Achse genommene Seite), so beschreibt es einen aus zwei geraden Kegeln zusammengesetzten Körper, welcher Doppelkegel genannt wird. Auch ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck giebt bei Umdrehung um die gröfste Seite einen Doppelkegel.



Figur 153 a.



Figur 153 b.

Dreht man aber ein stumpfwinkliges Dreieck um eine seiner kleinen Seiten, so entsteht ein Körper, welcher der Unterschied zweier geraden Kegel ist und die Bezeichnung Hohlkegel führt.

15. Der Inhalt eines Doppel- oder Hohlkegels ist $J = {}^1\!/_3\, M \cdot h$, wo M einer der beiden Mäntel und h die auf ihm stehende Höhe ist.

Bw. Zunächst erhält man für beide Körper, wenn a die Achse bezeichnet,

$$J = {}^1/_3\,\pi r^2 \cdot a.$$

Der doppelte Inhalt des Dreiecks ABC giebt $ar = sh$, also wird

$$J = {}^1/_3\,\pi rs \cdot h = {}^1/_3\,M \cdot h.$$

Anmerkung. Da diese Formel sowohl für den Doppelkegel mit ausgebogenem Boden, als auch für den Hohlkegel mit eingebogenem Boden dieselbe ist, mufs sie auch den Inhalts-Ausdruck enthalten für den Übergang aus der einen in die andere Gestalt, für den Kegel mit ebener Grundfläche. Man sieht, der Ausdruck „ein Drittel Grundfläche mal Höhe" bezieht sich auch auf gebogene Flächen.

16. Erklärung. Beseitigt man die Spitze eines Kegels durch einen der Grundfläche gleichlaufenden Schnitt, so bleibt ein Körper, welcher ein abgestumpfter Kegel oder ein Kegelstumpf genannt wird. Die Schnittfläche ist seine Deckfläche, ihr Abstand von der Grundfläche seine Höhe. Aus einem geraden Kegel entsteht ein gerader Kegelstumpf.

17. Der Mantel eines geraden Kegelstumpfs ist

$$\textbf{10.} \qquad M = \pi\,(r + r_1) \cdot s.$$

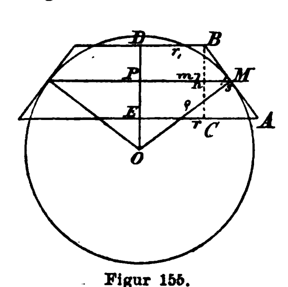
Hierin bezeichnen r und r_1 die Halbmesser der Grundflächen und s die Seite des Stumpfes.

Figur 154.

Man setze die vom Kegel abgeschnittene Spitze wieder auf, bezeichne ihre Seite mit x und ziehe durch den Punkt B der Deckfläche die der Achse gleichlaufende Gerade; dann ist die Herleitung der Formel gemäfs Formel 7 (in Nr. 12) sehr leicht.

Anmerkungen. 1) Formel 7 ist in dieser enthalten.

2) Der in eine Ebene ausgebreitete Mantel des geraden Kegelstumpfs ist der Unterschied zweier Kreisausschnitte mit demselben Winkel an ihrem Kreismittelpunkte, also ein Teil eines Kreisringes. Da der Abstand der Bogen überall $= s$ ist, sind die Bogen gleichlaufende Linien. Diese Figur entspricht einem Trapeze; s ist darin die Höhe, weil der Halbmesser senkrecht steht auf den Berührungslinien, welche die Richtung des Bogens an der Stelle angeben. Ist die Länge der Bogen a und b und schreibt man h für s, so wird $M = {}^1/_2\,(a + b) \cdot h$, übereinstimmend mit dem Ausdrucke für den Inhalt eines Trapezes. Dadurch ist die Formel 10 leicht zu behalten.



Figur 155.

3) Der Kreis, welcher die Nebenseiten des Achsenschnitts in der Mitte berührt, liefert einen einfacheren Ausdruck für den Mantel des geraden Kegelstumpfs. Man führt statt $r + r_1$ die doppelte Mittellinie des Trapezes $ABDE$ ein, $M = 2\pi ms$, (ist unabhängig vom $\angle BMP$!) und zieht wieder durch den Punkt B der Deckfläche die der Achse gleichlaufende Gerade, um $\triangle\, MOP \sim ABC$ zu benutzen. Dann ergiebt sich

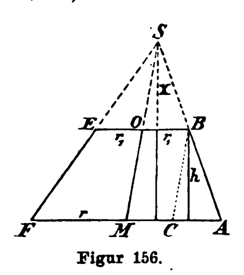
$$\textbf{11.} \qquad M = 2\pi\varrho h.$$

Der Mantel des geraden Kegelstumpfs ist also so grofs wie der ebenso hohe

Mantel einer geraden Walze, deren Grundkreis die Nebenseiten seines Achsenschnitts in der Mitte berührt. (Vergl. Nr. 12, 2.)

18. Der Inhalt eines Kegelstumpfs ist

12. $J = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + rr_1 + r_1^2)$.



Figur 156.

Die Figur 156 stellt nur den senkrechten Achsenschnitt des wieder ergänzten Kegels dar. Die Ableitung des Ausdrucks mittels Nr. 13 ist leicht, wenn man wieder durch den Punkt B der Deckfläche die der Achse gleichlaufende Gerade zieht, um $\triangle\ ABC \backsim BSO$ zu erhalten.

19. Übungen.

1) Man trage auf zwei gleichlaufenden Geraden von einer sie rechtwinklig schneidenden Achse aus eine kurze Strecke a $n$mal ab, setze bei der einen Geraden an den 1., 3., 5., 7., ... Teilpunkt seine Nummer und bei der andern, vom Anfangspunkte an, die Nummern 0, 2, 4, 6, ... Verbindet man die bezeichneten Punkte von 0 an nach der Folge der Nummern, so entsteht eine Zickzacklinie, deren Glieder die gleiche Länge b haben. Nun dreht sich die Figur um die Achse rings herum. Wie grofs ist die vom Zickzack beschriebene wellige Fläche? — Welche Bedeutung hat das Ergebnis in Hinsicht auf den ersten Kegelmantel? Entsteht durch Rückwärtsverlängern der letzten Linie b eine Figur, welche eine Bestätigung giebt für das Gröfsenverhältnis ähnlicher Flächenfiguren? — Unter welcher Bedingung dürfen demnach die Glieder des Zickzacks beliebig ungleich lang sein, um doch dieselbe Flächengröfse zu liefern? Welchen Raum durchsetzen die welligen Flächen, welche alle gleich grofs sind? Wie weit darf der Ausgangspunkt auf der Achse wandern? — Das Heraustreten des Zickzacks aus der vom Endpunkte senkrecht zur Achse gezogenen Geraden r macht die welligen Flächen soviel gröfser, als die Kreisscheibe πr^2, als die auf sie gelegte Ellipsenfläche πrs aus dieser heraustritt.

2) Mantel und Oberfläche eines geraden Kegels: Martus, Aufgaben 474—481, 499, 500, 502, 553.

3) Inhalt des Kegels: M., Aufgaben 485, 487, 464—473, 402, 415, 432, 503, 505.

4) Doppel- und Hohlkegel: M., Aufgaben 527, 528; 532, 533.

5) Mantel eines abgestumpften geraden Kegels: M., Aufgaben 519, 521, 523.

6) Inhalt eines Kegelstumpfs: M., Aufgaben 440, 508, 510—515, 520, 522, 534.

7) Ein Dreieck, welches von einer mitten durch zwei Seiten gehenden Geraden geteilt wird, dreht sich um die dritte Seite. Man vergleiche die Gröfse der von den Teilen des Dreiecks beschriebenen Körper (auch bei unvollständiger Umdrehung, nur um α^0). Wie darf das abgeschnittene Dreieck seine Gestalt wechseln, ohne die Gröfse des gelieferten ringförmigen Körpers zu ändern?

8) Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck dreht sich mit den Quadraten über seinen Seiten um die auf seiner gröfsten Seite stehende Höhe. Wievielmal so grofs als die Walze wird der geschlossene Ring, und wie verhält sich bei den Oberflächenteilen des Ringes die Aufsenseite zur Innenseite?

9) Dreht man ein Quadrat um eine durch einen Eckpunkt gehende Gerade, welche das Quadrat nicht schneidet (und mit einer Quadratseite den Winkel α bildet), so beschreiben die Eckenlinien des Quadrates gleiche Flächen, und die beiden freien

Quadratseiten zusammen eine dreimal so grofse, wie die beiden an die Achse stofsenden Quadratseiten zusammen.

10) Umdrehungskörper: M., Aufgaben 535—539a.

11) Guldinsche Regel.*) Dreht sich eine begrenzte Linie oder eine geschlossene Fläche um eine in ihrer Ebene aufserhalb liegende Achse, so ist der Inhalt der entstehenden Figur gleich dem Produkte aus der gedrehten Figur und dem von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Wege.

Man weise nach, dafs dieser sie zusammenfassenden Regel Genüge leisten die entwickelten Formeln für *a*) Mantel eines geraden Kegels, *b*) Mantel eines geraden Kegelstumpfs, *c*) für einen ebenen Kreisring, *d*) für den Inhalt des Doppel- und Hohlkegels. Nun zeige man, dafs die Regel auch pafst bei unvollständiger Umdrehung, nur um α Grad, und deute die Ergebnisse durch Vergleich mit einem Rechteck, beziehungsweise mit einem Prisma.

Nachdem erst der Inhalt der entstehenden Ringfigur bestimmt ist, weise man das Zutreffen der Regel nach für *e*) den um eine ferne Achse sich drehenden Umfang einer Raute (bei der Bestimmung dieser Oberfläche fasse man die von den Gegenseiten gelieferten Kegelmäntel, mittels des Ausdrucks durch die Mittellinie des Trapezes erst für sich zusammen); *f*) für den um eine Achse zu drehenden Umfang eines Vielecks, welches dadurch entsteht, dafs man viele gerade Linien durch einen Punkt zieht und auf jeder vom Schnittpunkte aus nach beiden Seiten eine Strecke abträgt, deren Gröfse man bei den folgenden Linien beliebig ändern kann, und schliefslich die Endpunkte der Reihe nach ringsherum verbindet. Dies Ergebnis wende man an auf *g*) den rundlaufenden Umfang eines regelmäfsigen $2n$-Ecks, und folglich auch auf den Kreis; und, da mit Rücksicht auf Gleichung **13**, 10, 3) leicht zu beweisen ist, dafs jeder Durchmesser einer Ellipse im Mittelpunkte halbiert wird, auch auf ein der Ellipse einbeschriebenes Vieleck mit gleichen Gegenseiten, und folglich auch auf die Ellipse selbst. Bei allen diesen ist auch wieder an die unvollständige Umdrehung und an die Deutung zu denken.

Nicht so einfach, wie bei diesen Flächen, ist die Inhaltsbestimmung des ringförmigen Körpers, welchen die Fläche eines nicht an die Achse stofsenden Dreiecks liefert. Mit diesem Ergebnis ist es aber wieder leicht, durch paarweises Zusammennehmen der Scheiteldreiecke, die Inhalte der Körper zu finden, welche aus den unter *e*), *f*) und *g*) behandelten Flächen hervorgehen.

Schliefslich ist für alle diese Fälle in Betracht zu ziehen, ob die gedrehte Figur ihre Lage zur Achse und ihre Gestalt ändern darf, um dennoch gleich grofse ringförmige Figuren oder Teile derselben zu liefern. Auch ist anzugeben, wie man Ringe von sehr verschiedener Weite entstehen lassen kann, die aber doch gleiche Flächen oder gleiche Inhalte haben.

M., Aufgaben 540, 541.

12) Ein gerades Trapez soll an der Grundseite Winkel von 45^0 und jede Nebenseite $= s$ erhalten. Wie grofs ist die kleinere Hauptseite zu nehmen, damit das Trapez durch Umdrehung um die, die Hauptseiten halbierende Gerade einen

---

*) Guldin, 1577—1643, aus St. Gallen gebürtig, fand die Regel und schrieb darüber in seinem Werke de centro gravitatis 1635. Sie steht aber schon in den von Pappus gegen das Ende des vierten Jahrhunderts nach Christus aufgestellten mathematischen Sammlungen, neu herausgegeben zu Pisa 1588.



Kegelstumpf liefere, dessen Grund- und Deckfläche zusammen so grofs sind, wie der Mantel?

[Die zweite Wurzel der Bestimmungsgleichung hat hier keine Bedeutung.]

---

13) Aus den Grundwinkeln α und β des senkrechten Achsenschnitts eines schiefen Kegels findet man den Winkel φ zwischen seinen beiden Achsen, aus der Teilung des Winkels γ an der Spitze durch die Mittellinie,

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\varphi = \operatorname{tg} {}^1/_2 (\alpha - \beta) \operatorname{tg}^2 {}^1/_2\gamma.$$

Er wächst mit dem Unterschiede der Winkel α und β (je schiefer der Kegel wird); er wird beim geraden Kegel gleich Null und bei der Walze immer (da für sie der Winkel γ in Null übergegangen ist). So kann eine schiefe Walze nur eine Achse haben, während der schiefe Kegel zwei Achsen besitzt.

14) Auf dem Mantel eines abgestumpften geraden Kegels mit den Grundkreishalbmessern r und r_1 soll eine Linie vom oberen Rande an vom Anfangspunkte der Seitenlinie s dreimal um den Kegel herum zum Endpunkte so laufen, dafs sie den bei dreimaligem Umlaufen möglichst kurzen Weg nimmt. Durch welche beiden Punkte der Seite s mufs die Linie hindurchgehen? Man denke sich zunächst s sehr grofs im Vergleich zu r und r_1, wickele den Kegelmantel dreimal hinter einander ab und ziehe in dem erhaltenen Bogenviereck die Linie. — Beispiel: $r = 10$ mm, $r_1 = 6$ mm, $s = 96$ mm.

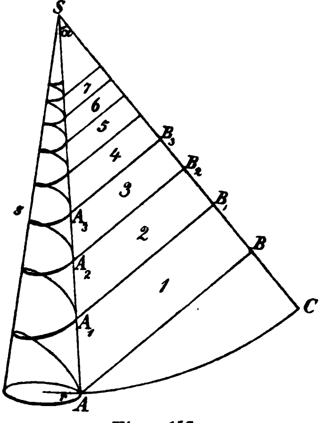
Ergebnis. Nachdem $x = \frac{r_1}{r - r_1} s$, $\gamma = \frac{r - r_1}{s} \cdot 360^0$ und beim Ausgangspunkte ein Winkel α berechnet ist, ergeben sich die Abstände der beiden Schnittpunkte von der Ausgangsstelle

$$y_1 = \frac{x \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} - x \qquad \text{und} \qquad y_2 = \frac{x \sin\alpha}{\sin(\alpha + 2\gamma)} - x.$$

Im Beispiele teilt die Schneckenlinie die 96 mm lange Seitenlinie in die Strecken 11,39 mm, 26,82 mm und 57,79 mm; sie bleibt dem kleineren Grenzkreise möglichst lange nahe. Man würde auf dem Kegel die Schneckenlinie zeichnen können; man schneidet das Bogenviereck, dem Laufe der Linie folgend, durch, wickelt eines der beiden Stücke wieder um den Kegel, sticht an vielen Punkten der Linie durch und verbindet nach Beseitigung der Hülle die Stiche ihrer Folge nach.

Abschlufs. Es mufs der Mittelpunktswinkel γ für den einmal ausgebreiteten Mantel $\leqq \gamma_1$ bleiben aus $\cos 3\gamma_1 = \frac{r_1}{r}$.

15) Zur Spitze eines Schneckengehäuses läuft eine Schneckenlinie hinauf. Die Windungen befinden sich auf dem Mantel eines geraden Kegels und liegen so, dafs sie um den Kegel herum stets auf dem kürzesten Wege zu der nach dem Ausgangspunkte zu ziehenden Seitenlinie des Kegels kommen. Wie lang ist diese aus unzähligen Windungen bestehende Schneckenlinie, wenn die Seite des Kegels s und der Halbmesser seines Grundkreises r gemessen sind, und wie grofs ist, aufser dem vom Kreise und der ersten



Figur 157.

Linienwindung begrenzten Randstreifen, der 1., 2., 3., 4., 5., 6., ... k^{te} Umlauf der von Nachbarwindungen begrenzten Streifenfläche? Man bezeichne zunächst SA_1 mit s_1, SA_2 mit s_2 u. s. w. und berechne für $r = {}^1/_2$ cm und $s = 5$ cm den Randstreifen F_0, dann die Streifen F_1, F_2, F_3, F_7 und F_{27}.

Ergebnis. $\alpha = \frac{r}{s}\,360^0$; $x = s \operatorname{ctg} {}^1/_2\,\alpha = 15{,}388$ cm.

$F_2 = {}^1/_{16}\,s^2 \sin^3 2\alpha$, $F_k = F_2 \cos^{(2k-4)}\alpha$, worin auch der Ausdruck für F_1 enthalten ist.

$F_0 = 1{,}90\,984$ qcm
$F_1 = 2{,}05\,367$
$F_2 = 1{,}34\,416$
$F_3 = 0{,}87\,978$

$F_7 = 16{,}14\,56$ qmm
$F_{27} = 0{,}00\,336$ qmm, das ist kaum mehr, als der dritte Teil des Quadrates über einem Zehntelmillimeter.

---

15. Glied. Die Kugel.

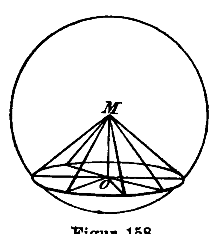
a. Gestalt.

1. Erklärung. Die Kugelfläche entsteht durch Drehen eines Kreises um einen seiner Durchmesser als Achse. Sein Mittelpunkt ist auch der Mittelpunkt der Kugelfläche; der von ihr umschlossene Körper ist eine Kugel. Eine Gerade, welche zwei Punkte der Kugelfläche verbindet, ist eine Sehne, geht sie durch den Mittelpunkt, so heifst sie ein Durchmesser, seine Hälfte ein Halbmesser.

2. Ls. **Alle Halbmesser einer Kugel sind gleich; auch ihre Durchmesser sind einander gleich.**

Bw. Beim Entstehen der Kugelfläche war jeder ihrer Halbmesser augenblicklich ein Kreishalbmesser; weil diese alle dieselbe Gröfse haben, sind auch die Kugelhalbmesser gleich; also sind auch die doppelt so grofsen Durchmesser einander gleich.

3. Ls. **Jeder ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.**



Figur 158.

Bw. Man fälle vom Kugelmittelpunkte M auf die Schnittebene die Senkrechte MO. Die von M nach allen Punkten der Schnittlinie gehenden Geraden sind als Kugelhalbmesser gleich; deshalb haben alle diese Punkte vom Fufspunkte O der Senkrechten gleichen Abstand (8, 2, 4); die Schnittlinie ist also ein Kreis um O.

Zs. 1) Der Mittelpunkt eines Schnittkreises liegt auf der vom Kugelmittelpunkte auf seine Ebene gefällten Senkrechten (wie der Beweis gezeigt hat).

2) Die Verbindungslinie zwischen Schnittkreismittelpunkt und Kugelmittelpunkt steht senkrecht auf der Schnittebene. [Das Gegenteil wird durch 1) abgewiesen.]

3) Die mitten auf einer Schnittkreisebene stehende Senkrechte geht durch den Kugelmittelpunkt. [Ebenfalls.]

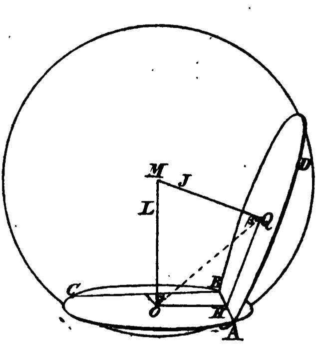
4) Der Ort der Mittelpunkte aller Schnittkreise, deren Ebenen gleichlaufend sind, ist ein Kugeldurchmesser. Seine Endpunkte sind die Pole der gleichlaufenden Schnittkreise.

4. Anzugeben den Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche gehen 1) durch 1 gegebenen Punkt, 2) durch 2 Punkte, 3) durch 3 Punkte, die nicht in gerader Linie liegen. — Jedes Hinzufügen eines Punktes nimmt dem Orte eine Ausdehnung. Es ist zu erwarten, dafs bei 4 Punkten auch die letzte Ausdehnung schwindet, dafs man also nur einen Punkt erhält, als bestimmte Stelle des Mittelpunktes.

Ls. **Durch vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, ist eine Kugelfläche bestimmt.**

Bw. Die Bedingung schliefst die Möglichkeit aus, dafs 3 von diesen Punkten in gerader Linie liegen; denn dann befänden sich alle 4 in einer Ebene, in der durch die Gerade und den vierten Punkt gehenden.

Der Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche durch drei von diesen Punkten, A, B und C, gehen, ist das Lot OL, welches im Mittelpunkte des durch die drei Punkte bestimmten Kreises auf seiner Ebene senkrecht steht. Der Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche durch die beiden ersten und durch den vierten Punkt D gehen, ist die im Mittelpunkte Q auf der Kreisebene ABD stehende Senkrechte QJ. Meint man, dafs die beiden Lote sich schneiden, so hat man zunächst zu beweisen, dafs OL und QJ in einer Ebene liegen. Der Kreismittelpunkt O wurde gefunden durch die Mittelsenkrechten auf AB und BC, der Mittelpunkt Q in gleicher Weise; also stehen im Halbierungspunkte H auf AB zwei Linien senkrecht, HO und HQ; auf deren Ebene OHQ steht also AB senkrecht (**8**, 2). Durch diese Senkrechte AB geht die Ebene ABC; deshalb ist auch sie rechtwinklig auf OHQ (**9**, 5), oder, anders gesprochen, die Ebene OHQ steht auf der Ebene ABC senkrecht. Im Punkte O ihrer Schnittlinie OH wurde auf der Ebene ABC das Lot OL errichtet; also liegt OL in der Ebene OHQ. (**9**, 8.) Ebenso beweist man, dafs die Senkrechte QJ in der Ebene OHQ liegt. Demnach liegen beide Lote, OL und QJ, in einer Ebene OHQ. Dafs sie, in dieser Ebene laufend, sich schneiden müssen, folgt, nachdem man OQ gezogen hat, aus $\alpha + \beta < 2$ R. Da ihr Schnittpunkt M beiden Orten, OL und QJ, angehört, ist er Mittelpunkt einer Kugelfläche, die, mit AM als Halbmesser um M beschrieben, durch die vier Punkte A, B, C, D geht; und weil die geraden Linien OL und QJ sich nur in einem Punkte schneiden, so ist nur eine Kugelfläche durch die vier Punkte möglich.



Figur 153.

5. Schnittkreise einer Kugel sind gleich, wenn deren Ebenen gleiche Abstände vom Kugelmittelpunkte haben.

Bw. Legt man durch die Mittelpunkte zweier Schnittkreise und durch den Kugelmittelpunkt eine Ebene, so schneidet sie die Kugelfläche in einem Kreise, in welchem die als Schnittlinien in den Kreisen erhaltenen

Durchmesser Sehnen sind, die gleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, also gleich sind. Wegen Gleichheit ihrer Durchmesser sind die Schnittkreise gleich.

6. Gleiche Schnittkreise einer Kugel haben gleiche Abstände vom Kugelmittelpunkte.

7. Die Schnittkreise einer Kugel werden um so gröfser, je kleineren Abstand vom Kugelmittelpunkte ihre Ebene hat; und umgekehrt.

Bw. Auch dies geht aus dem entsprechenden Satze vom Kreise hervor, wenn man durch zwei Schnittkreismittelpunkte und den Kugelmittelpunkt eine Ebene legt.

Zusätze. 1) Diejenigen Schnittkreise, deren Mittelpunkt der Kugelmittelpunkt ist, sind gleich und unter allen Schnittkreisen der Kugel die gröfsten. Sie heifsen gröfste Kreise der Kugel oder Hauptkreise, andere Schnittkreise Nebenkreise.

2) Zwei Hauptkreise einer Kugel schneiden sich in einem Durchmesser, halbieren sich also; auch ihre Kreisscheiben halbieren sich.

3) Ein Hauptkreis halbiert die Kugelfläche, und seine Ebene die Kugel. Bw. durch Deckung. Die beiden Teile heifsen Halbkugeln.

8. Eine gerade Linie oder die Ebene, welche auf einem Kugelhalbmesser im Endpunkte senkrecht steht, hat mit der Kugel nur diesen Punkt gemein und liegt sonst ganz aufserhalb derselben.

Zum Beweise verbinde man irgend einen andern Punkt der Linie oder der Ebene mit dem Kugelmittelpunkte. (8, 2, 3.)

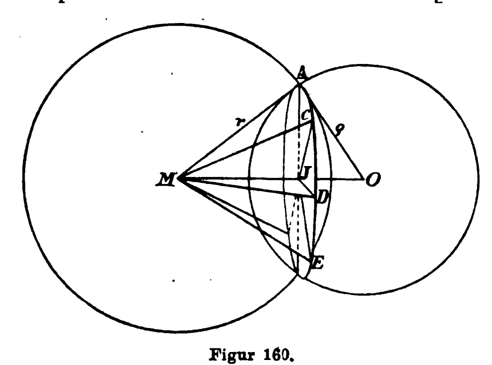
Erklärung. Solche Linie ist eine Berührungslinie der Kugel. Solche Ebene heifst eine Berührungsebene. Der gemeinsame Punkt ist ihr Berührungspunkt.

Zusätze. 1) Eine die Kugel berührende Gerade und jede Berührungsebene steht auf dem nach ihrem Berührungspunkte gehenden Kugelhalbmesser senkrecht.

2) Die vom Kugelmittelpunkte auf eine die Kugel berührende Gerade oder auf eine Berührungsebene gefällte Senkrechte trifft den Berührungspunkt.

3) Die im Berührungspunkte auf einer Berührungsebene errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

4) Gleichlaufende Berührungsebenen einer Kugel berühren sie in den Endpunkten eines Durchmessers. [Fehlt in 3) und 4) nichts?]



Figur 160.

9. Erklärung. Die Gerade, welche durch die Mittelpunkte zweier Kugeln geht, heifst ihre Achse.

Ls. **Haben zwei Kugelflächen einen Punkt gemein, welcher aufserhalb ihrer Achse liegt, so schneiden sie sich in einem Kreise, dessen Ebene mit seinem Mittelpunkte auf der Achse senkrecht steht.**

Bw. Durch den beiden Kugelflächen gemeinsamen Punkt A lege man die, die Achse MO rechtwinklig

schneidende Ebene. Sie liefert auf der Kugel um O einen Schnittkreis, welcher auch der Kugel um M angehört, was leicht zu zeigen ist.

10. Ls. **Haben zwei Kugelflächen einen Punkt ihrer Achse gemein, so berühren sie sich.**

Bw. Ein zweiter gemeinsamer Punkt kann weder in der Achse liegen, weil die Kugeln dann denselben Durchmesser hätten und zusammenfielen, noch aufserhalb der Achse, weil sie sich dann in einem Kreise schneiden müfsten, der alle gemeinsamen Punkte, also auch den gegebenen, enthielte und es ginge die Achse durch einen Punkt des Kreisumfangs, während sie doch durch seinen Mittelpunkt gehen mufs.

11. Ls. **Der Berührungspunkt zweier Kugeln liegt auf der Achse.**

Das Gegenteil wird durch den Ls. in Nr. 9 abgewiesen.

12. **Es sei a die Strecke der Achse zwischen den Mittelpunkten, r und ϱ die Halbmesser der beiden Kugeln. Was findet mit den Kugelflächen statt, wenn**

1) $r + \varrho < a$
2) $r + \varrho = a$
3) $r + \varrho > a > r - \varrho$
4) $a = r - \varrho$
5) $a < r - \varrho$ ist?

***13.** **Von einem Punkte aufserhalb einer Kugel sind unzählig viele Berührungslinien an sie zu ziehen. Der Ort der Berührungspunkte ist ein Kreis, der Ort der Berührungslinien eine Kegelfläche. Der Berührungskegel ist ein gerader.**

Der Beweis ist sehr leicht.

b. Gröfse der Kugelfläche und ihrer Teile.

14. Erklärung. Ein Schnittkreis zerlegt die Kugelfläche in zwei Teile, welche Kugelkappen heifsen, und die Stücke des Kugelraumes sind Kugelabschnitte. Die auf der Ebene des Schnittkreises in seinem Mittelpunkte stehende und bis zur Kappe reichende Senkrechte ist die Höhe der Kappe und des Abschnitts.

Zwei Schnittkreise, deren Ebenen gleichlaufend sind, begrenzen auf der Kugelfläche eine Kugelzone. Das von den drei Flächen eingeschlossene Stück der Kugel ist eine Kugelschicht. Der Abstand zwischen ihren Ebenen ist die Höhe der Zone und der Schicht.

15. Hauptaufgabe. **Die Gröfse einer Kugelkappe zu bestimmen.**

Ausführung. Figur 161. Vom Anfangspunkte A eines Kreisdurchmessers AZ aus trägt man eine kurze Strecke als Sehne hintereinander beliebig oft, $n$mal, in den Halbkreis ein, fällt von den Endpunkten der Sehnen die Senkrechten auf den Durchmesser und dreht die Figur um diesen als Achse. Es werde zunächst die Gröfse der von den Sehnen beschriebenen zusammengesetzten Fläche bestimmt. Sie besteht aus dem Mantel eines geraden Kegels mit der ersten Sehne AB als Seite und sonst aus Mänteln von geraden Kegelstumpfen, unter denen auch der Mantel einer geraden Walze sein kann, wenn eine Sehne EF mit dem Durchmesser AZ gleichlaufend wurde. Da die Sehnen gleich lang gemacht sind, haben sie vom Mittelpunkte gleichen

Abstand, der mit ϱ bezeichnet werden möge. Die Gröfse der Mäntel ist nach den Formeln 8 und 11 in **14**, 12, 2) und 17, 3)

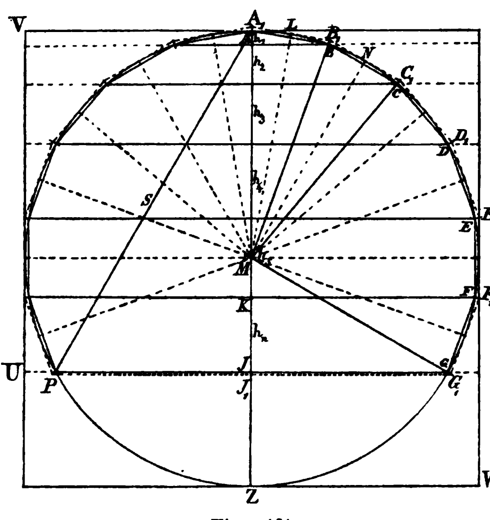
$$M_1 = 2\pi\varrho \cdot h_1, \quad M_2 = 2\pi\varrho \cdot h_2, \quad M_3 = 2\pi\varrho \cdot h_3, \ldots .$$

und bei der Walze kommt, wie leicht zu zeigen ist, $M_5 = 2\pi\varrho \cdot h_5$, also ein ebensolcher Ausdruck. Mithin ist die Gröfse der von den Sehnen beschriebenen zusammengesetzten Fläche

$$S_1 = 2\pi\varrho\,(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots . + h_n) = 2\pi\varrho \cdot h$$

wenn die Höhe AJ der Gesamtfläche mit h bezeichnet wird.

Verlängert man nun alle Abstände ϱ bis zum Kreise und legt durch die Treffpunkte Berührungslinien, jede bis zum Schnitt mit der folgenden, die erste bis zum Schnitt A_1 auf der Verlängerung des Durchmessers ZA, die letzte bis zur Verlängerung des nach dem Endpunkte G gehenden Halbmessers, und fällt von allen Schnittpunkten die Senkrechten auf den Durchmesser AZ, und läfst auch diese Figur um AZ als Achse sich drehen, so entsteht eine umbeschriebene ebenso zusammengesetzte Fläche. Deckbare Dreiecke an ϱ und ϱ zeigen, dafs der Winkel LMN durch BM halbiert wird, aber auch durch B_1M; mithin liegt der Schnittpunkt B_1 auf der Verlängerung des Halbmessers MB, und so jeder folgende Schnittpunkt. Demnach wird die aus dem Dreiecke AMB erhaltene



Figur 161.

Gleichung $\angle BML = AML$ nun zu $\angle B_1ML = A_1ML$ und damit stimmen die Dreiecke B_1ML und A_1ML nach dem ersten Satze überein und liefern $B_1L = A_1L$. So wird jede berührende Seite durch den Berührungspunkt halbiert. Deshalb sind die Formeln 8 und 11 auch auf diese Achsenschnitte anwendbar. Die Summe der Gleichungen, in denen nun der Kreishalbmesser r für ϱ eingetreten ist, liefert, wenn die Höhe A_1J_1 mit h' bezeichnet wird, die Gröfse der umbeschriebenen zusammengesetzten Fläche $S_2 = 2\pi r \cdot h'$. Zwischen dieser und der einbeschriebenen befindet sich die Kugelkappe, deren Inhaltszahl K sei; also ist

$$S_1 < K < S_2 \qquad \text{oder} \qquad 2\pi\varrho \cdot h < K < 2\pi r \cdot h'.$$

Zieht man nun die Sehnen AL, LB, BN, NC und so fort, so hat man $2n$ gleiche Sehnen. Da sie hinter den ersten liegen, ist ihr Abstand vom Mittelpunkte ein etwas gröfserer Wert ϱ. Dieser macht, da $AJ = h$ dasselbe geblieben ist, S_1 gröfser. Die der ersten Sehne AL gleichlaufende Berührungslinie schneidet die Verlängerung des Durchmessers ZA zwischen A_1 und A, und die letzte trifft die Verlängerung des Halbmessers MG zwischen G und G_1, so dafs die von diesem Treffpunkte auf AZ gefällte Senkrechte ihren Fufspunkt zwischen J_1 und J hat. Die frühere Höhe A_1J_1

ist also an beiden Enden verkürzt; der verminderte Wert h' macht S_2 kleiner.

Halbiert man die Bogen wieder und wieder, so nähert sich ϱ mehr und mehr dem r und h' ragt über h immer weniger hinaus; so daſs die einander entgegenkommenden Grenzen übergehen in

$$2\pi r \cdot h \qquad K \qquad 2\pi r \cdot h$$

die gleich gewordenen Grenzen geben die Gröſse der Kugelkappe

$$K = 2\pi rh$$

wo r den **Kugel**halbmesser bezeichnet. Es ist also die Kappe so groſs, wie das ebenso hohe Mantelstück UV der geraden Walze VW, welche um die Kugel zu beschreiben ist.

Es ist aber $2rh \quad AZ \cdot AJ = AP^2$ (1. T., **16**, 6, 2); also, wenn man die Sehne AP des Kappenbogens mit s bezeichnet, auch

$$K = \pi s^2$$

d. h.: die Gröſse der Kappe wird dargestellt von einer Kreisfläche, deren Halbmesser die Sehne ist, welche zu dem die Kappe beschreibenden Bogen gehört. Die Gröſse der Kappe ist nur von einer Linie abhängig, und unabhängig vom Kugelhalbmesser. Dies lehrt:

Wird eine Ebene von beiden Seiten in demselben Punkte von sehr vielen Kugeln berührt, und beschreibt man um diesen Punkt mit dem Halbmesser s eine Kugelfläche, so sind die innerhalb dieser liegenden Kappen jener Kugeln alle gleich groſs, nämlich gleich dem in ihr befindlichen Teile der Ebene. Die Kappen werden um so flacher, je mehr ihr Kugelhalbmesser wächst. Nimmt in beiden Scharen von Kugeln der Halbmesser unaufhörlich zu, so nähern sich die stets gleich groſsen Kappen von beiden Seiten der Kreisfläche, die, als Übergang von der einen zur andern Schar, zu betrachten ist als eine Kugelkappe von unendlich groſsem Halbmesser. — Welche Stellen im Innern der Kugel vom Halbmesser s werden von den gleichen Kappen nicht durchzogen? — Beschreibt man um den gemeinsamen Berührungspunkt noch eine zweite Kugelfläche mit dem Halbmesser s_1, so liegen zwischen dieser und der ersten gleiche Zonen jener Kugeln, alle sind gleich dem Kreisringe in der Ebene.*)

Demnach ist zu merken

13. $$\textbf{Kappe} = 2\pi rh = \pi s^2.$$

Zusätze. 1) Läſst man den die Kappe beschreibenden Bogen wachsen, bis er ein Halbkreis ist, so wird die Sehne s zum Durchmesser d und die Kappe zur ganzen Kugelfläche und man hat

14. $$\textbf{Kugelfläche} = \pi d^2 = 4\pi r^2.$$

Die runde Kugelfläche ist gleich einer ebenen Kreisfläche, deren Halbmesser der Kugeldurchmesser ist, oder viermal so groſs, als der Inhalt eines ihrer Hauptkreise. Sie ist auch gleich dem Mantel der ihr umbeschriebenen geraden Walze. (Figur 161.)

*) Will man von den vielen Kugeln mehrere Zonen haben von derselben Gröſse wie die erste Zone, so beschreibt man um den Berührungspunkt Paare von Kugelflächen, deren Halbmesser s und s_1 rechtwinkligen Dreiecken mit derselben kleinen Seite a zu entnehmen sind, weil der ebene Ring fordert $s_1^2 - s^2 = a^2$. (Vergl. Martus, Ergebnis der Aufgabe 519.)



2) Zwei auf einander senkrechte Hauptkreise zerlegen die Kugelfläche in 4 deckbare Teile. Solches (wie gehörig geschnittene Apfelsinenschale aussehende) krumme Flächenstück ist gleich der Scheibe eines Hauptkreises.

3) Ist g der Grundkreishalbmesser der Kappe, also $s^2 = g^2 + h^2$, so wird

$$\text{Kappe} = \pi g^2 + \pi h^2.$$

Dies lehrt: Dadurch, dafs sich die Kappe über dem ebenen Grundkreise wölbt, kommt zur Grundkreisfläche so viel hinzu, wie die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel angiebt. Dies ist bei flachen Kappen sehr wenig.

4) Die Oberfläche des Kugelabschnitts ist $F = \pi h (4r - h)$. [Zu deuten durch einen geraden Walzenmantel.]

5) Der Mantel eines Körpers, welcher durch Umdrehung eines regelmäfsigen Vielecks von gerader Seitenzahl um den die Mitten zweier Gegenseiten verbindenden kleinen Durchmesser δ entsteht, ist

$$M = \pi \delta^2$$

also unabhängig von der Anzahl der Seiten. (Siehe Anfang der Entwicklung in Nr. 15.) Dies lehrt:

Ein regelmäfsiges Viereck, Sechseck, Achteck, Zehneck, ... , 1000-Eck, 1002-Eck, ... und so unendlich fort, also auch der Kreis — alle von gleichem kleinen Durchmesser δ — geben, bei Umdrehung um diesen, bei den ersten sehr verschieden aussehende Körper, deren Mäntel alle einander gleich sind. (Die beiden Öffnungen der Mäntel haben bei der Kugel sich geschlossen.)

6) Die Oberfläche eines Körpers, welcher durch Umdrehung eines regelmäfsigen Vielecks von ungerader Seitenzahl um seine Höhe h entsteht, ist

$$F = \pi h^2.$$

Daher: Die regelmäfsigen Vielecke mit den Seitenzahlen 3, 5, 7, 9, 11, und so fort bis ins Unendliche, also auch der Kreis — alle von gleicher Höhe h — geben, bei Umdrehung um die Höhe, Körper mit gleich grofsen Oberflächen. Beide Ergebnisse, 5) und 6), erweisen die Kugelfläche $= \pi d^2$.

Anmerkung. Bei den Vielecken von gerader Seitenzahl treten in der Oberflächenformel beide Durchmesser auf. Das Beseitigen des einen bringt die Seitenzahl hinein. Die Oberflächen würden also nur bei ungleichen Durchmessern gleich werden können. Es wird die Oberfläche bei Umdrehung um den grofsen Durchmesser d

$F_1 = \pi d \delta$ und um den kleinen Durchmesser δ $F_2 = {}^1/_2 \pi (d^2 + \delta^2)$.

Auch aus diesen Ausdrücken geht für die Kugelfläche wieder $F = \pi d^2$ hervor.

Die bei Umdrehung um den kleinen Durchmesser entstehende Oberfläche ist gröfser als die bei Umdrehung um den grofsen Durchmesser von demselben $2n$-Eck gelieferte. Denn aus $(d - \delta)^2 > 0$ folgt ${}^1/_2 (d^2 + \delta^2) > d\delta$; also $F_2 > F_1$.

16. Durch Abziehen findet man sehr leicht, dafs auch die Formel für die Gröfse einer Kugelzone lautet

15. $$\textbf{Zone} = 2\pi r h.$$

Sie ist unabhängig von den Halbmessern der Grenzkreise. Demnach sind gleich hohe Zonen derselben Kugel gleich grofs. (Die Zone der Erdkugel zwischen 10° und 20° und die zwischen 70° und 80° nördlicher

Breite sind gleich breit und nicht gleich hoch.) Unter den gleich hohen Zonen einer Kugel ersetzen die nahe bei der Achse befindlichen engen Zonen das, was sie an Weite verloren haben, durch gröfsere Breite.

Zs. Legt man durch die einer Kugel umbeschriebene gerade Walze viele der Grundfläche gleichlaufende Ebenen, so sind die zwischen irgend zweien von ihnen liegenden Teile der Kugelfläche und des Walzenmantels einander gleich. (Siehe Figur 161.)

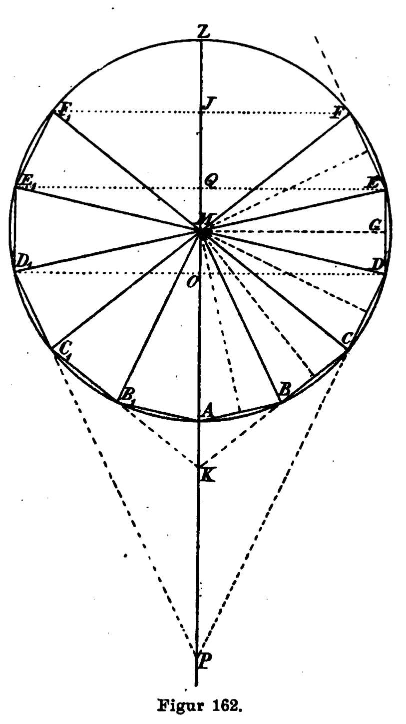
c. Inhalt der Kugel und ihrer Teile.

17. Erklärung. Dreht man einen Kreisausschnitt um einen seiner Grenzhalbmesser rings herum, so beschreibt er einen Kugelausschnitt.

Aufgabe. **Den Inhalt eines Kugelausschnitts zu bestimmen.**

Ausführung. Vom Anfangspunkte A eines Kreisdurchmessers aus trage man eine kurze Strecke als Sehne in den Halbkreis $n$mal hinter einander ein, ziehe nach den Endpunkten die Kreishalbmesser, und lasse die Figur um den Durchmesser AZ als Achse sich drehen. Es werde der Inhalt des von den n Dreiecken beschriebenen Umdrehungskörpers bestimmt. Da die Sehnen gleich sind, haben alle den gleichen Mittelpunktsabstand ϱ. Das Dreieck ABM liefert einen Doppelkegel, dessen Inhalt nach **14**, 14, wenn der von AB beschriebene Mantel mit $M(AB)$ bezeichnet wird, ist

$$K_1 = {}^1/_3\, \varrho \cdot M(AB).$$



Figur 162.

Was für einen Körper das zweite Dreieck, BCM, beschreibt, erkennt man, wenn man CB bis zur Achse verlängert. Das Dreieck KCM liefert einen Doppelkegel $KCMC_1$, das Dreieck KBM auch, $KBMB_1$; zieht man aus dem Doppelkegel $KCMC_1$ den Doppelkegel $KBMB_1$ heraus, so bleibt der vom Dreiecke BCM durchlaufene Raum. Dessen Inhalt ist also

$$K_2 = {}^1/_3\, \varrho \cdot M(KC) - {}^1/_3\, \varrho \cdot M(KB) = {}^1/_3\, \varrho \cdot [M(KC) - M(KB)] = {}^1/_3\, \varrho \cdot M(BC),$$

ein Ausdruck von derselben Form wie K_1; der von BC beschriebene Mantel (eines geraden Kegelstumpfs) ist die Grundfläche dieses Körpers, ϱ die darauf senkrechte Höhe; also selbst dieser ausgehöhlte Körper fügt sich ein in den Inhaltsausdruck spitzer Körper „ein Drittel Grundfläche mal Höhe“.

Nach Verlängern der dritten Sehne CD bis zum Schnittpunkt P auf der Achse kommt ebenso

$$K_3 = {}^1/_3\, \varrho \cdot M(CD).$$

Einen Schnittpunkt auf der Achse erhält man aber nicht, wenn eine der Sehnen, DE, mit der Achse gleichlaufend wurde. Dann mufs man von

einer Walze zwei gleiche Kegel fortnehmen, und kann leicht zeigen, dafs auch in diesem Falle wird

$$K_4 = {}^1/_3\,\varrho \cdot M(DE).$$

Folgt in der zweiten Hälfte des Halbkreises noch eine Sehne, EF, so schneidet deren Verlängerung die Achse in ihrer Verlängerung über den andern Endpunkt Z hinaus, und so ergiebt sich, wie vorhin,

$$K_5 = {}^1/_3\,\varrho \cdot M(EF).$$

Beim Zusammenzählen aller dieser Gleichungen tritt in die zu bildende Klammer die Summe aller Mäntel, das ist die von der Sehnenfolge beschriebene zusammengesetzte Fläche F_1, und man hat

$$S_1 = {}^1/_3\,\varrho \cdot F_1.$$

Nun legt man an den Halbkreis eine Folge von Berührungslinien, deren zwischen ihren Schnittpunkten liegende Strecken nicht gleich zu sein brauchen, und verbindet ihre Schnittpunkte mit dem Mittelpunkte M. Die an den Kreis gelegten Strecken, deren letzte auf der Verlängerung von MF endet, haben immer gleichen Abstand vom Mittelpunkte, was bei Sehnen stattfindet nur, wenn sie gleich sind. Das Umdrehen dieser Figur um die Achse liefert einen Körper, dessen Inhalt in derselben Weise, nur mit dem Kreishalbmesser r statt ϱ, gefunden wird

$$S_2 = {}^1/_3\,r \cdot F_2.$$

Von diesem Körper ist der vom Kreisausschnitt $ACFM$ beschriebene Körper nur ein Teil, und der zuerst berechnete Körper S_1 liegt ganz innerhalb des Kugelausschnitts S; deshalb hat man für diesen die Grenzen

$${}^1/_3\,\varrho \cdot F_1 < S < {}^1/_3\,r \cdot F_2.$$

Vermehrt man die Anzahl der gleichen Sehnen und der Berührungslinien immer fort, so nähert sich der vom Bogen ACF beschriebenen Kugelkappe die Fläche F_1 von innen her und die Fläche F_2 von aufsen. Dabei wird der Mittelpunktsabstand ϱ mehr und mehr so grofs wie r, und beide Flächen, F_1 und F_2, kommen zusammen in der Kugelkappe, deren Gröfse wir mit G bezeichnen wollen. Die gleich gewordenen Grenzen geben den Inhalt des Kugelausschnitts an

$$S = {}^1/_3\,r \cdot G.$$

Auch ein Kugelausschnitt ordnet sich ein in den Inhaltsausdruck „ein Drittel Grundfläche mal Höhe“; die Kappe G ist seine Grundfläche und der Halbmesser r ist in der That die zugehörige Höhe, weil er rechtwinklig die Kugelfläche trifft; denn die Lage der getroffenen Stelle der Fläche wird durch die dort berührende Ebene nach allen Seiten fortgesetzt und auf der Berührungsebene steht der Kugelhalbmesser senkrecht.

Setzt man für die Kappe G die Werte aus Formel 13 ein, so hat man

16. Kugelausschnitt $S = {}^2/_3\,\pi r^2 h = {}^1/_3\,\pi s^2 r$

wobei zu beachten ist, dafs h die Kappenhöhe bezeichnet. Der erste Ausdruck läfst sich durch einen Doppelkegel gut deuten; der zweite veranschaulicht die Gröfse verschiedener Ausschnitte derselben Kugel besser.

Zs. Nimmt man als den sich umdrehenden Kreisausschnitt eine Viertelkreisfläche, so entsteht eine Halbkugel, und man findet den Inhalt der

17. Kugel $= {}^4/_3\,\pi r^3 = {}^1/_6\,\pi d^3$.

18. Aufgabe. **Den Inhalt eines Kugelabschnitts zu bestimmen.**

Ausführung. Man denke an den auf der Grundebene des Abschnitts stehenden Kegel, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt ist. Dieser Kegel ist, falls der Abschnitt kleiner als die Halbkugel war, vom entstandenen Kugelausschnitte abzuziehen, dagegen zu einem Kugelausschnitte hinzuzufügen, wenn der Abschnitt gröfser als die Halbkugel war. In beiden Fällen ergiebt sich der Inhalt des Abschnitts

$$\mathbf{18.} \qquad A = {}^1/_3\, \pi h^2 (3r - h).$$

[Diese Formel ist genau zu merken, weil der Ausdruck keine Ähnlichkeit mit den früheren hat. Nur der Ausdruck für seine Oberfläche ist ihm verwandt. (Nr. 15, 4.)]

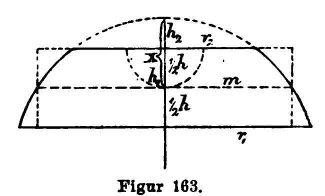
19. Aufgabe. *a*) **Den Inhalt einer Kugelschicht zu bestimmen durch ihre Höhe h und den Halbmesser m des mittleren Querschnitts.**

Ausführung. Die Kugelschicht ist der Unterschied zweier Abschnitte mit den Höhen h_1 und h_2. Ihr Inhalt wird also

$$J = {}^1/_3\, \pi\, [3r(h_1^2 - h_2^2) - (h_1^3 - h_2^3)]$$

woraus $h_1 - h_2 = h$ sich ausschliefsen läfst:

$$1) \quad J = {}^1/_3\, \pi h\, [3r(h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)].$$



Figur 163.

Der mitten durch die Höhe h der Grundfläche gleichlaufende Querschnitt mit dem Halbmesser m habe vom höchsten Punkte der Kappe den Abstand x. Dann wird $h_1 = x + {}^1/_2 h$ und $h_2 = x - {}^1/_2 h$. Bildet man hieraus die Ausdrücke in beiden kleinen Klammern, so findet sich

$$J = {}^1/_3\, \pi h\, [3x(2r - x) - {}^1/_4 h^2].$$

Es ist aber $x(2r - x) = m^2$ und damit ergiebt sich der Inhalt der

$$\text{Schicht} = \pi m^2 h - {}^1/_{12}\, \pi h^3.$$

(Die Deutung steht in der Figur.) Der Inhaltsausdruck ist unabhängig vom Halbmesser der gegebenen Kugel. Daher Lehrsatz: Aus vielen Kugeln, welche in demselben Kreise sich schneiden, erhält man gleich grofse Schichten, wenn man auf jeder Seite der Schnittfläche eine ihr gleichlaufende Ebene in gleichem Abstande legt. — Darunter befindet sich auch ein Kugelabschnitt. Die Formel gilt also auch für einen Kugelabschnitt. (Die besondere Ableitung für diesen Grenzfall ist leicht.)

b) **Den Inhalt einer Kugelschicht auszudrücken durch ihre Höhe h und die Halbmesser r_1 und r_2 der Grund- und Deckfläche.**

Ausführung. Man multipliziere die mit 1) bezeichnete Gleichung mit 2 und löse die kleinen Klammern auf

$$2J = {}^1/_3\, \pi h\, [3h_1 \cdot 2r + 3h_2 \cdot 2r - 2h_1^2 - 2h_1 h_2 - 2h_2^2].$$

Um $r_1^2 = h_1(2r - h_1)$ hineinzubekommen, ist noch ein h_1^2 abzuziehen, damit $-3h_1^2$ dasteht, und hinten wieder hinzuzufügen, und mit h_2^2 ist ebenso zu verfahren. Dann kommt man auf den Inhaltsausdruck

$$\text{Schicht} = \pi r_1^2 \cdot \frac{h}{2} + \pi r_2^2 \cdot \frac{h}{2} + {}^1/_6\, \pi h^3$$

welcher lehrt: Eine Kugelschicht ist gleich den beiden auf ihrer Grund- und Deckfläche stehenden Walzen von halber Höhe und einer Kugel von gleicher Höhe. — Wie lautet demnach das Ergebnis für einen Kugelabschnitt? (In dieser Gestalt zeigt sich der Inhalt der Schicht nicht unabhängig vom Kugelhalbmesser.)

Anmerkung. Durch zweckmäfsige Vereinigung der Ergebnisse *b*) und *a*) erkennt man sofort, dafs auch eine Kugelschicht und ein Kugelabschnitt in der Simpsonschen Regel $J = {}^1/_6 h\ (G + 4M + D)$ enthalten sind, und als Grenzfall auch die Kugel selbst. Für eine Walze ist es selbstverständlich, und für einen Kegel leicht nachzuweisen. (Vergl. **12**, 12, 7.)

20. Ls. **Ein Körper, welchem eine alle Grenzebenen berührende Kugel einbeschrieben werden kann, hat den Inhalt**

19. $$J = {}^1/_3 F\varrho$$

wo F seine Oberfläche und ϱ den Halbmesser der einbeschriebenen Kugel bezeichnet.

Bw. Man lege durch jede Kante und den Mittelpunkt O der einbeschriebenen Kugel eine Ebene. Sie zerlegen den Körper in lauter Pyramiden, deren gemeinsame Spitze der Punkt O ist, und deren Grundflächen die Inhalte G_1, G_2, . . . G_n haben. Zählt man die Inhalte der Pyramiden zusammen, so ergiebt sich die Behauptung.

21. Der Satz des Archimedes.*) **Kegel, Kugel und Walze, von gleichen Halbmessern und Höhen, verhalten sich wie 1 : 2 : 3.**

22. Übungen.

1) Wenn die Lufthülle der Erde, ohne ihren Rauminhalt zu vergröfsern, zu einer Kugel sich zusammenballte, wie grofs würde deren Halbmesser im Vergleich zum Erdhalbmesser r werden? Die Tiefe des Luftmeeres ist gleich ${}^1/_{70}$ des Erdhalbmessers anzunehmen. (Zur Verdeutlichung der Vorstellung beschreibe man um denselben Mittelpunkt Kreise mit Halbmessern von 70 und von 71 mm und nachher mit dem gefundenen Halbmesser x einen dritten Kreis. — Der Halbmesser des Mondes ist ${}^3/_{11}$ des Erdhalbmessers.)

2) Die Kugel, die gerade Walze und der gleichseitige Kegel, welche um die Kugel beschrieben sind, bilden die Glieder einer stetigen Verhältnisgleichung, sowohl für den Inhalt, als auch für die Oberfläche.

3) Die Kugel, die einbeschriebene Walze und der einbeschriebene Kegel, deren Achsenschnitte regelmäfsig sind, bilden die Glieder einer stetigen Verhältnisgleichung, sowohl bei ihren Oberflächen, als auch beim Inhalte.

4) Kugelfläche: Martus, Aufgaben 489, 486, 429.

5) Kugelkappe: M., Aufg. 571*a*—581, 614.

6) Zone: M., Aufg. 599—602, 542, 525; 605—607.

7) Inhalt der Kugel: M., Aufg. 562—570, 459, 460; 638.

8) Kugel mit Walze: M., Aufg. 555—558; mit Inhalt einer Ellipse 554.

9) „ „ Kegel: M., Aufg. 482, 483, 497, 498, 506; 491, 492; 616, 488.

10) „ „ Doppelkegel: M., Aufg. 529, 531.

11) „ „ Kegelstumpf: M., Aufg. 509, 516—518.

12) „ „ Pyramide: M., Aufg. 414, 405, 434, 437, 438.

13) Kugelausschnitt: M., Aufg. 608—613, 615.

14) Kugelabschnitt: M., Aufg. 582—598, 621 und, zugleich als Beispiele für eine Kugelschicht, 543, 604.

---

*) Archimedes wurde 287 vor Chr. zu Syrakus geboren und 212 bei Eroberung dieser Stadt durch die Römer von einem Soldaten getötet. Auf seinem Grabmale war eine Kugel und eine Walze dargestellt. Dadurch fand Cicero die Grabstätte wieder auf. (Tusc. V.)

15) Flacher Kugelabschnitt. Der ruhige Wasserspiegel eines kreisrunden Teiches ist, als Teil der Erdkugelfläche, keine Ebene, sondern sehr schwach gewölbt. Der mittelste Punkt der Wölbung sei von allen Punkten des Randes um $s = 63{,}463$ m entfernt.*) Wie hoch liegt der mittelste Punkt über der Ebene des Wasserrandes? wieviel Wasser bildet die Wölbung über dieser Ebene? und um wie wenig ist die Kappe gröfser als ihr Grundkreis? Erdkugelhalbmesser $r = 6\,370\,000$ m. In der Formel für den Kugelabschnitt ist die Klammer aufzulösen. (**15**, 15, 3.)

Antwort: Zwei Kubikmeter bilden die Wölbung, trotzdem der mittelste Punkt noch nicht ganz $^1/_3$ mm über der Ebene sich befindet, und die Kappe nur um weniger als $^1/_3$ Quadratmillimeter gröfser ist als ihr Grundkreis. — Die Wassermenge nimmt mit gröfser gewählter Sehne s schnell zu. Schon bei $s = 70{,}234$ m (weniger als $^1/_9$ der ersten Sehne mehr) kommen 3 cbm, wobei die Wölbungshöhe noch nicht 0,4 mm erreicht und die Kappe den Grundkreis noch nicht um $^1/_2$ qmm übertrifft.

16) Wie hoch wird der Kugelabschnitt, bei welchem die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel die Hälfte der Oberfläche des Abschnitts ist? Und wie hoch wird der, bei welchem die einbeschriebene Kugel die Hälfte des Abschnitts enthält? Wie verhalten sich Grundfläche, Kugelfläche und Kappe im ersten Falle, und wie im zweiten?

17) Wie ist der Durchmesser einer Kugel durch einen zu ihm senkrechten ebenen Schnitt zu teilen, damit die Oberfläche der dem ersten Abschnitte einbeschriebenen Kugel gleich der Kappe des andern wird? Und wie hoch ist der Kugelabschnitt, bei welchem die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel der Oberfläche des andern Abschnitts gleich ist?

18) An eine Kugel wird von einem Punkte aus, dessen Abstand von der Kugel gleich ihrem Durchmesser ist, die berührende Kegelfläche gelegt. Wie verhält sich dieser Kegelmantel zur gröfseren der beiden vom Berührungskreise begrenzten Kugelkappen?

19) Durch den Punkt, welcher den Durchmesser einer Kugel nach dem goldenen Schnitte teilt, wird rechtwinklig zum Durchmesser eine Ebene gelegt und über dem Schnittkreise ein gerader Kegel errichtet, der seine Spitze in dem vom Teilpunkte mehr entfernten Endpunkte des Durchmessers hat. Man bestimme das Verhältnis seines Mantels zu der Kappe, deren Höhe der kleinere Teil des Durchmessers ist.

20) Welcher Winkel am Mittelpunkte gehört zu einem Kugelausschnitte, dessen Oberfläche gleich dem Inhalte des Hauptkreises der Kugel ist? welcher Bruchteil der Kugel ist sein Inhalt?

Ergebnis: $2\varphi = 73^0\,44'\,21$ oder $24''$ (siebenstellige Logar. geben $23{,}3''$). Das rechtwinklige Dreieck des Kegels ist das Pythagoreische mit den Seiten 3, 4, 5. $J = {}^1/_{10}\,K$.

21) Es ist eine Halbkugel vom Halbmesser r gegeben. Durch einen Schnitt, welcher in halber Höhe gleichlaufend mit ihrer Grundfläche geführt ist, wird der obere Teil beseitigt und ersetzt durch eine über dem Schnitt als Grundfläche beschriebene Halbkugel. Auch von dieser wird in gleicher Weise der obere Teil entfernt, und es wird wieder eine passende Halbkugel darauf gelegt. Mit ihr und jeder

*) Der Pariser Platz am Brandenburger Thor in Berlin ist ein Quadrat. Der ihm einbeschriebene Kreis giebt eine Vorstellung von der Gröfse des oben gedachten Teiches.



folgenden wird immer weiter ebenso verfahren. Man berechne die Höhe, bis zu welcher der Körper nur ansteigen kann, und zeichne die Höhe mittels der Durchmesser der beiden ersten Halbkugeln. Wie grofs wird der Mantel dieses Körpers? — Man versäume nicht, für eine wiederholt auftretende Bruchzahl den Buchstaben b einzuführen, und im Ergebnis den irrationalen Nenner rational zu machen. Auch die Länge jedes Schenkels in dem gezeichneten Achsenschnitte des Körpers läfst sich angeben. Nur der Inhalt dieses kegelartigen Körpers hat keinen einfachen Ausdruck. — Die Fragen sind auch allgemein zu lösen, indem man als Höhe der Schichten nur $^1/_n$ des Halbmessers bei jeder Halbkugel nimmt. —

Anmerkung. Die Spitze des Körpers liegt im Scheitel des geraden Kegels, welcher die beiden untersten Kugelflächen berührt, und diesen Mantel berühren alle.

22) Ring: M., Aufgaben 560a und b.

23) Nachzuweisen, dafs der Inhaltsausdruck $J = {}^1/_3 F\varrho$ auch gilt für Körper, die von geraden Kegelflächen begrenzt werden, nämlich gerade Kegel, Doppel- und Hohlkegel, solche gerade Kegelstumpfe, die eine einbeschriebene Kugel besitzen, diejenigen Körper, welche durch Umdrehung regelmäfsiger Vielecke entstehen. (**15**, 15, 5 und 6. Figur 162.)

24) Mit Inhalt und Oberfläche eines Körpers auch der Halbmesser der ihm einbeschriebenen Kugel: für Pyramiden M., Aufgaben 417, 418, 420, 421, 619; für Doppelkegel 530, für Kegel 620.

25) Über dem Grundkreise vom Halbmesser r einen geraden Kegel zu errichten, dessen Mantel $1^1/_2$ mal so grofs ist, wie die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel. Wie grofs ist die Seite des Kegels zu nehmen?

26) Über dem Grundkreise vom Halbmesser r einen geraden Kegel zu errichten, welcher $2^1/_4$ mal so grofs ist, wie die ihm einbeschriebene Kugel. Wie grofs mufs die Seite des Kegels werden?

27) Eine Kugel berührt drei gleiche Kugeln: M., Aufgabe 403.

28) Cavallierischer Satz.*) Ein auf ebener Grundfläche stehender Körper, bei welchem in jeder Höhe z der mit der Grundfläche gleichlaufende Querschnitt den Ausdruck besitzt

$$Q = A + bz + \gamma z^2$$

hat bis zur Höhe z den Inhalt $J = Az + {}^1/_2 bz^2 + {}^1/_3 \gamma z^3$.

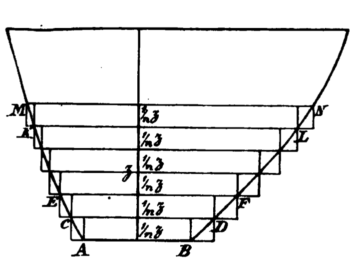
Bw. Da in dem Ausdrucke Q jedes Glied eine Fläche sein mufs, so bedeutet A eine Fläche und b eine Linie, γ aber eine unbenannte Zahl. (Dieser verschiedenen Bedeutung gemäfs ist die Buchstaben-Bezeichnung gewählt.) Von den Gröfsen A, b, γ können zwei oder eine auch das negative Vorzeichen haben oder gleich Null sein. Letzteres ist bei A der Fall, wenn der Querschnitt in seiner Ebene für $z = 0$ sich in eine Linie oder einen Punkt zusammenzieht.

Man teile den gewählten Abschnitt z der Höhe des Körpers (von welchem in Figur 164 nur ein zur Grundebene senkrechter Durchschnitt gezeichnet ist) in n gleiche Teile, lege durch jeden Teilpunkt den der Grundfläche gleichlaufenden Querschnitt, und errichte über jedem nach oben und unten ein bis zum folgenden Schnitte reichendes gerades oder schiefes Prisma (Walze). (Siehe Figur 131 in **12**, 5.) So sind zwei Reihen von Prismen entstanden, stehende und hängende. Das an einem Querschnitte (CD oder EF) hängende Prisma ist dem auf ihm stehenden gleich. Die

---

*) Bonaventura Cavallieri, 1598—1647, Professor zu Bologna.

aus n Prismen bestehenden beiden Reihen unterscheiden sich durch das erste (auf AB) bei den inneren Prismen und das letzte (unter MN) bei den aus dem Körper heraustretenden Prismen. Der durch Figur 164 dargestellte Körper wird nach oben immer breiter; deshalb findet die Deckfläche jedes stehenden Prismas innerhalb des folgenden Schnittes Platz, die Grundfläche jedes hängenden Prismas kann den vorhergehenden Schnitt ganz umschliefsen; es liegen die stehenden Prismen alle innerhalb des Körpers, die hängenden treten sämtlich aus ihm heraus; also ist der Körper gröfser als die Summe der einen Reihe und kleiner als die der andern. Wird der Körper nach oben fortwährend schmaler (dies zeigt dieselbe Figur, wenn man das Buch umdreht, so dafs die Schrift auf dem Kopfe steht), so ist er kleiner als die Summe der stehenden und gröfser als die der hängenden Prismen; er liegt also zwischen diesen Grenzen. Würde aber der Körper, etwa von dem Schnitte EF an, schmaler werden, so würde das auf ihm stehende Prisma aus ihm heraustreten, die folgenden auch, während die vorhergehenden stehenden Prismen innere waren. Dann wüfste man nicht, ob die Summe aller stehenden Prismen gröfser oder kleiner als der Körper ist; und bei den hängenden Prismen würde dasselbe stattfinden. Der Beweis kann sich also nur auf solche Körper beziehen, die immer breiter, oder fortwährend schmaler werden.*)



Figur 164.

Da der Körper für jeden Wert der Höhe z Querschnitte haben soll, deren Gröfse durch

$$Q = A + bz + \gamma z^2$$

angegeben wird, so erhält man die Inhalte der Grundflächen der einzelnen Prismen, wenn man für z einsetzt der Reihe nach die Höhen Null, $1 \cdot {}^z/_n$, $2 \cdot {}^z/_n$, $3 \cdot {}^z/_n$ und so fort.

Es ist der Inhalt der stehenden Prismen, von denen das unterste zur Grundfläche den Querschnitt in der Höhe Null, das oberste den Querschnitt KL in der Höhe $(n-1) \cdot {}^z/_n$ hat,

$$\begin{aligned}
P_0 &= A \cdot \frac{z}{n} \\
P_1 &= \left[A + b \cdot 1 \frac{z}{n} + \gamma \cdot 1^2 \left(\frac{z}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{z}{n} \\
P_2 &= \left[A + b \cdot 2 \frac{z}{n} + \gamma \cdot 2^2 \left(\frac{z}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{z}{n} \\
P_3 &= \left[A + b \cdot 3 \frac{z}{n} + \gamma \cdot 3^2 \left(\frac{z}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{z}{n} \\
&\vdots \\
P_{n-1} &= \left[A + b \cdot (n-1) \frac{z}{n} + \gamma \cdot (n-1)^2 \left(\frac{z}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{z}{n}
\end{aligned}$$

Die hängenden Prismen beginnen mit dem, dessen Deckfläche CD in der Höhe $\frac{z}{n}$ ist, also mit einem Prisma, welches dem obigen P_1 gleich ist; das folgende ist $= P_2$,

*) Soll der Inhalt eines Körpers mit wechselnder Breite bestimmt werden, so mufs man ihn in Stumpfe teilen an den schmalsten und an den breitesten Stellen, und die Stücke des Körpers einzeln berechnen und dann zusammenzählen.

und so fort, und schliefsen mit dem für den Querschnitt MN in der Höhe $n \cdot \frac{z}{n}$, dessen Inhalt ist

$$P_n = \left[A + b \cdot n \frac{z}{n} + \gamma \cdot n^2 \left(\frac{z}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{z}{n}.$$

Die Summe der n Prismen der ersten Reihe, von Nummer 0 bis $(n-1)$, werde bezeichnet mit $S_0^{n-1}(P)$, die der andern mit $S_1^n(P)$. Für dieses Zusammenzählen mufs man die Summe der Quadrate der ganzen Zahlen von 1 bis n kennen.*) Es wird

$$S_0^{n-1}(P) = \left[nA + b \cdot \frac{n-1}{2} \cdot n \cdot \frac{z}{n} + \gamma \cdot {}^1/_6 (n-1)\, n\, (2n-1) \cdot \frac{z^2}{n^2}\right] \cdot \frac{z}{n}$$

und $$S_1^n(P) = \left[nA + b \cdot \frac{n}{2}(n+1) \cdot \frac{z}{n} + \gamma \cdot {}^1/_6\, n\, (n+1)(2n+1) \cdot \frac{z^2}{n^2}\right] \cdot \frac{z}{n}.$$

Wird der Körper nach oben immer breiter, so ist

$$S_0^{n-1}(P) < J < S_1^n(P)$$

die zu bestimmende Inhaltszahl J des Körpers liegt also zwischen zwei Grenzen, deren geringe Verschiedenheit ersichtlicher wird, wenn man die Nenner n an die Klammern verteilt:

$$\left[A + b \cdot {}^1/_2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) z + \gamma \cdot {}^1/_6 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) z^2\right] \cdot z < J < \left[A + b \cdot {}^1/_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) z + \gamma \cdot {}^1/_6 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) z^2\right] \cdot z.$$

Denkt man die Höhe z in eine immer gröfsere Anzahl n gleicher Teile zerlegt, so wird der Bruch $\frac{1}{n}$ immer kleiner, für $n =$ Billion, Trillion, Quadrillion, . . . ist er schon sehr klein und geht bei unendlich grofs werdendem n in Null über. Da sind die Grenzen gleich geworden:

$$[A + b \cdot {}^1/_2 z + \gamma \cdot {}^1/_6 \cdot 2 \cdot z^2] \cdot z = J = [A + b \cdot {}^1/_2 z + \gamma \cdot {}^1/_6 \cdot 2 \cdot z^2] \cdot z.$$

Wird der Körper nach oben schmaler, so ist

$$S_0^{n-1}(P) > J > S_1^n(P)$$

und da die Grenzen für $n = \infty$ wieder gleich werden, ist in beiden Fällen

$$J = Az + {}^1/_2\, bz^2 + {}^1/_3\, \gamma z^3.$$

---

*) Man findet ihre Summe S, wenn man in

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

für k der Reihe nach einsetzt 1, 2, 3, . . . $(n-1)$ und n, und die n Gleichungen zusammenzählt; dabei heben sich die links stehenden dritten Potenzen (mit Ausnahme der letzten) gegen die rechts vorn stehenden (mit Ausnahme der ersten):

$$\begin{array}{rlllll}
2^3 = & 1^3 & + 3 \cdot 1^2 & + 3 \cdot 1 & + 1 \\
3^3 = & 2^3 & + 3 \cdot 2^2 & + 3 \cdot 2 & + 1 \\
4^3 = & 3^3 & + 3 \cdot 3^2 & + 3 \cdot 3 & + 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n^3 = & (n-1)^3 & + 3(n-1)^2 & + 3(n-1) & + 1 \\
(n+1)^3 = & n^3 & + 3 \cdot n^2 & + 3 \cdot n & + 1 \\
\hline
(n+1)^3 = & 1 & + 3S & + 3 \cdot \frac{n}{2}(n+1) & + n
\end{array}$$

woraus folgt, wenn man sogleich $(n+1)$ ausschliefst,

$$(n+1)\,[(n+1)^2 - {}^3/_2\, n - 1] = 3S = (n+1)\,[n^2 + {}^1/_2\, n]$$

daher $$S = {}^1/_6\, n\, (n+1)(2n+1).$$

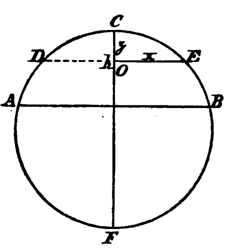
Um die Summe der Quadrate der ganzen Zahlen von 1 nur bis $(n-1)$ zu haben, braucht man hierin statt n nur die Schlufszahl $(n-1)$ zu denken, und erhält mit der gebräuchlichen Bezeichnung

$$S_1^{n-1}(k^2) = {}^1/_6 (n-1)\, n\, (2n-1).$$

Die auf den Kopf gestellte Figur 164 zeigt, dafs man die geteilte Strecke z der Höhe auch von oben anfangen lassen kann, was oft vorteilhafter ist.

Beispiele. 1) Den Inhalt eines Kugelabschnitts zu bestimmen mittels des Cavallierischen Satzes.

Ausführung. Jeder der Grundfläche AB gleichlaufende Querschnitt ist ein Kreis mit dem Inhalte $Q = \pi x^2$. Er ist in seiner Abhängigkeit vom Höhenabschnitt z darzustellen. Dies leistet $x^2 = z\,(2r - z)$. Man sieht, dafs es hier natürlich ist, den Höhenabschnitt von oben her anfangen zu lassen, nicht von der Grundfläche AB aus. Nun zeigt



Figur 165.

$$Q = \pi z\,(2r - z) = 2\pi rz - \pi z^2$$

die Gröfse jedes Querschnitts abhängig von seiner Höhenlage z. Das erste Glied A des allgemeinen Ausdrucks Q ist hier nicht vorhanden, weil der Querschnitt in der Höhe $z = 0$ in den Punkt C sich zusammenzieht. Hier ist die Linie $b = 2\pi r$ und die unbenannte Zahl $\gamma = -\pi$. Demnach wird der Inhalt des Kugelabschnitts bis zur Höhe z

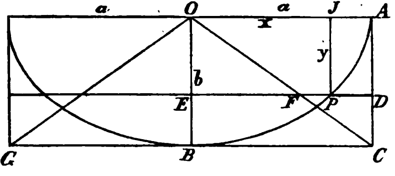
$$J_z = \pi r z^2 - {}^1/_3\,\pi z^3 = {}^1/_3\,\pi z^2\,(3r - z)$$

und der ganze Abschnitt bei $z = h$

$$A = {}^1/_3\,\pi h^2\,(3r - h)$$

wie er in Nr. 18 auf längerem Wege, erst nach Berechnung des Kugelausschnitts, gefunden wurde.

2) In Figur 166 ist eine halbe Ellipse mit dem umbeschriebenen Rechteck gezeichnet. Dreht sich die Figur um OB als Achse, so beschreibt das Bogendreieck ABC einen Körper, der wie ein Napf aussieht. Der Querschnitt, welchen die Strecke PD um E beschreibt, wird ein Kreisring, dessen Inhalt ist



Figur 166.

$$Q = \pi a^2 - \pi x^2 = \pi\,(a^2 - x^2).$$

Seinen Ausdruck, abhängig von einem Abschnitt der Höhe, liefert die für die Ellipse in **13**, 10 erhaltene Gleichung 1)

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2}\,y^2$$

$$Q = \pi\,\frac{a^2}{b^2}\,y^2.$$

Also wird der Inhalt des Körpers bis zur Höhe y

$$J_y = {}^1/_3\,\pi\,\frac{a^2}{b^2}\,y^3$$

und für die ganze Höhe, $y = b$, der Napf

$$N = {}^1/_3\,\pi a^2 b$$

mithin ebenso grofs, wie der Kegel COG. In der That wird auch dessen von EF beschriebener Querschnitt $= \pi\left(\frac{a}{b}\,y\right)^2$, also $= Q$. Napf und Kegel, auf derselben Grundfläche und von gleicher Höhe, haben in jeder Querebene gleich grofse Schnittfiguren. Folglich mufste der Cavallierische Satz für beide Körper den-

selben Inhalt angeben. Demnach hat der Lehrsatz **12**, 5 allgemeinere Bedeutung, so weit der Cavallierische Satz mit nur ganzen Potenzexponenten reicht.*)

Es hat sich ergeben, dafs dem Inhaltsausdrucke „ein Drittel Grundfläche mal Höhe" auch der eines napfförmigen Körpers sich einfügt, der nicht einen Scheitelpunkt hat, sondern welcher sich schliefst in einer in gleichem Abstande von der Grundfläche ringsum laufenden Berührungslinie.

Den übrigen Teil der Walze AG nimmt der von der halben Ellipse beschriebene Körper ein, dessen Gröfse also $^2/_3\,\pi a^2 b$ ist; folglich ist das ganze, bei Drehung um die kleine Achse entstehende

$$\text{Umdrehungs-Ellipsoid} = {}^4/_3\,\pi a^2 b$$

welcher Ausdruck auch den Inhalt einer Kugel in sich schliefst.

29) Hierzu ein Beispiel: M., Aufgabe 561.

30) Es ist leicht, nachzuweisen, dafs die Simpsonsche Regel

$$J = {}^1/_6\, h\,(G + 4M + D)$$

zutrifft bei den auf ebener Grundfläche stehenden Körpern, bei welchen in jeder Höhe z der mit der Grundfläche gleichlaufende Querschnitt den Ausdruck besitzt

$$Q = A + bz + \gamma z^2$$

für welche Körper der Inhalt durch den Cavallierischen Satz bekannt ist.**) (Vergl. **12**, 12, 7 und **15**, 19, Anm.)

31) Legt man von einem Punkte aus an eine gegebene Kugel die berührende Kegelfläche, sowie durch einen der Punkte, in welchen die Achse die Kugel schneidet, die Berührungsebene, so wird sie die Grundfläche eines napfförmigen Körpers, welchen ein Teil der Kegel- und Kugelfläche begrenzt. Man soll den Inhalt dieses Körpers, in dessen Mantel die Seitenlinien dem Grundkreishalbmesser gleich sind, durch seine Grundfläche und Höhe ausdrücken. [Ergebnis von M., Aufgabe 622.]

---

16. Glied. Die regelmäfsigen Körper.

1. Einleitung. 1) Die Kugel ist natürlich ein vollkommen regelmäfsiger Körper. Soll ein von Ebenen begrenzter Körper ganz regelmäfsig gestaltet sein, so müssen an jeder seiner Ecken in gleicher Anzahl sich finden gleiche Kanten, gleiche Seitenwinkel und gleiche Flächenwinkel; seine Grenzflächen müssen also regelmäfsige Vielecke derselben Art sein.

---

*) Seinem Ausdruck Q für den Inhalt des Querschnitts kann man noch mehr Glieder geben

$$Q = A + bz + \gamma z^2 + \frac{z^3}{d} + \frac{z^4}{E} + \ldots$$

dann wird

$$J = Az + {}^1/_2\, bz^2 + {}^1/_3\,\gamma z^3 + {}^1/_4\frac{z^4}{d} + {}^1/_5\frac{z^5}{E} + \ldots$$

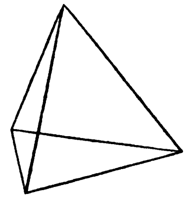
wie ebenso zu finden ist, nachdem man die Summen der dritten und der vierten Potenzen der ganzen Zahlen von 1 bis n durch die Entwicklungen von $(k+1)^4$ und $(k+1)^5$ in gleicher Weise sich verschafft hat. Doch kann man dies für später sich aufsparen.

**) Es könnte bei dem Ausdrucke Q noch ein viertes Glied, $\frac{z^3}{d}$, hinzugenommen werden; aber kein fünftes, $\frac{z^4}{E}$; denn für solche Körper trifft die Simpsonsche Regel nicht mehr zu.

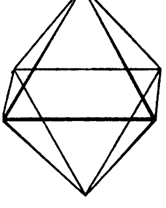
2) Es kann nicht mehr als fünf von Ebenen begrenzte regelmäfsige Körper geben. Denn von gleichseitigen Dreiecken sind in einer Ecke zusammenzubringen entweder 3, oder 4 oder 5. Nimmt man 6, so bilden sie eine Ebene, ein regelmäfsiges Sechseck; sie geben also keine Ecke mehr; und wollte man 7 zusammenfügen, so müfste wenigstens ein Flächenwinkel gröfser als 2 Rechte werden, so dafs die Flächenwinkel nicht alle gleich sind. (**10**, 10.) Von regelmäfsigen Vierecken sind nur 3 zu verwenden; denn nimmt man 4 Quadrate, so bilden sie eine Ebene. Nun können nur noch 3 regelmäfsige Fünfecke gebraucht werden; denn 3 regelmäfsige Sechsecke geben eine Ebene, und 3 regelmäfsige Siebenecke lassen sich gar nicht zu einer Ecke vereinigen und die mehrseitigen regelmäfsigen Vielecke um so weniger, da ihre Winkel immer gröfser werden. Es waren also nur $3 + 1 + 1 = 5$ Ecken zu bilden.

Dafs in jedem dieser 5 Fälle es möglich ist, durch Anfügen von ebensolchen Ecken einen regelmäfsigen Körper zu umgrenzen, wird nachher durch Herstellen der einzelnen bewiesen werden.

3) Zunächst soll an den fertigen Körpern, um sie kennen zu lernen, festgestellt werden, die Zahl der Flächen, Eckpunkte, Kanten und Eckenlinien des Körpers.



Figur 167.

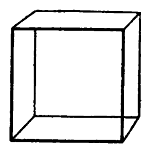


Figur 168.

a) An der Spitze der Figur 167 sieht man drei zu einer Ecke zusammengefügte gleichseitige Dreiecke, von welchen die Gegenseiten der drei zur Spitze vereinten Eckpunkte wieder solches gleichseitiges Dreieck bilden; so dafs der Körper von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Er ist ein Vierflächner (Tetraeder).

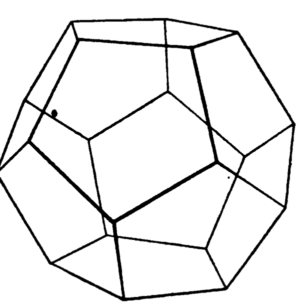
b) Figur 168 zeigt eine Doppelpyramide von je 4 gleichseitigen Dreiecken. Der Körper ist ein Achtflächner (Oktaeder).

Figur 169.



Figur 170.

c) Oben an der Spitze der Figur 169 befindet sich eine Pyramide, deren Mantel aus 5 gleichseitigen Dreiecken besteht, und an jeder Grundseite hängt ein Dreieck, wie die lose gehaltenen 5 Finger der herabhängenden linken Hand. Unten ist es entsprechend; die 5 stehenden Dreiecke sind in die 5 hängenden so eingefügt, wie man die Hände faltet. Der Körper hat also $4 \times 5 = 20$ Grenzflächen; er ist ein Zwanzigflächner (Ikosaeder).



Figur 171.

d) Die aus 3 Quadraten gebildete Ecke bestimmt einen Würfel. (Figur 170.) Nach der Benennungsweise der übrigen würde er als Sechsflächner (Hexaeder) zu bezeichnen sein.

e) Die Deckfläche des durch Figur 171 dar-

gestellten Körpers ist ein regelmäſsiges Fünfeck; von jeder seiner Seiten hängt ebensolches Fünfeck herab. Auch sie sind mit den auf den Seiten der Grundfläche stehenden Fünfecken wie die Finger der gefalteten Hände zusammengelegt. Der Körper hat also $2 \times 6 = 12$ Grenzflächen; er ist ein Zwölfflächner (Dodekaeder).

Aus der Betrachtung der fünf Figuren leite man ab (entweder, wie eben geschah, durch gruppenweises Zusammenfassen der Stücke, oder durch Berechnen aus der Zahl der Seiten oder Eckpunkte der Grenzfiguren) die Zahlen, welche die folgende Tabelle angiebt. Die Menge der Eckenlinien des vierten und fünften Körpers findet man dadurch, daſs man zunächst diejenigen Ecken zählt, nach welchen von der gewählten Ecke aus keine Eckenlinie des Körpers sich ziehen läſst. Dabei gehe man in Figur 171 von demjenigen Eckpunkte aus, bei welchem die 3 Kanten am stärksten gezeichnet sind.

Nr.	Flächen	Eckpunkte	Kanten	Eckenlinien
1	4	4	6	0
2	6	8	12	4
3	8	6	12	3
4	12	20	30	100
5	20	12	30	36

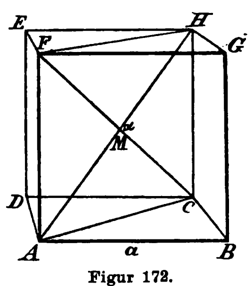
Man beachte, daſs beim zweiten und dritten Körper, sowie beim 4. und 5., die Zahl der Flächen des einen mit der Zahl der Eckpunkte des andern übereinstimmt, und daſs die Zahl der Kanten in beiden Paaren dieselbe ist.

2. Ls. **Jeder regelmäſsige Vielflächner besitzt drei Kugeln mit demselben Mittelpunkte; die eine berührt alle Flächen, die andere alle Kanten und die dritte geht durch alle Eckpunkte.**

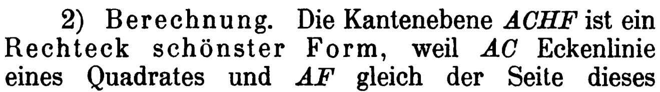
Bw. Man denke bei jedem der übereinstimmenden regelmäſsigen Vielecke, welche den Körper begrenzen, den umbeschriebenen Kreis. Die Kreise um die beiden Vielecke an der Kante AB haben AB als gemeinsame Sehne, wie die Kreise um O und Q in Figur 159 (**15**, 4); mithin schneiden sich, wie dort bewiesen, die in den Mittelpunkten O und Q auf den Kreisebenen errichteten Senkrechten, da sie beide in einer Ebene, OHQ, liegen. Der Schnittpunkt heiſse M. Bei dem um das dritte Vieleck beschriebenen Kreise, welcher mit dem um das erste eine wie BC gelegene Sehne gemeinsam hat, muſs die auf seiner Ebene im Mittelpunkte Q_1 errichtete Senkrechte aus demselben Grunde das erste Lot OL schneiden. Dieser Schnittpunkt werde zunächst mit M_1 bezeichnet. Die beiden Vierecke $OHQM$ und $OH_1Q_1M_1$ sind deckbar, weil sie zwei Seiten, als Halbmesser der den übereinstimmenden regelmäſsigen Vielecken einbeschriebenen Kreise, und 3 Winkel gleich haben. Also ist $OM_1 = OM$; mithin ist M_1 und M derselbe Punkt. Die beiden Vierecke lassen sich aber auch so aufeinander legen, daſs der Halbmesser HQ auf H_1O kommt; dann fällt QM auf OM; also sind die deckbaren Vierecke gleichschenklig. Ebenso schicken alle übrigen umbeschriebenen Kreise ihre Mittelsenkrechten durch denselben Punkt M und die entstehenden gleich-

schenkligen Vierecke stimmen alle überein. Beschreibt man daher um M mit MO als Halbmesser eine Kugelfläche, so geht sie durch Q, Q_1, Q_2, . . . und berührt die Ebenen, weil jede auf einem Halbmesser im Endpunkte senkrecht seht. Beschreibt man um M eine zweite Kugelfläche mit MH als Halbmesser, so geht sie durch H_1, H_2, . . ., weil die Eckenlinien MH, MH_1, MH_2, . . . bei der Deckung zusammenfielen, und berührt die Kanten AB, BC, . . . aus demselben Grunde. (**8**, 2.) Die dritte um M mit MA als Halbmesser zu beschreibende Kugel geht durch alle Eckpunkte des Körpers, weil HM, H_1M, ... Mittelsenkrechte der Kanten sind.

3. Der Würfel. 1) Herstellung. Auf der Ebene eines Quadrates $ABCD$ errichte man in dessen Seiten senkrechte Ebenen. Deren Schnittlinien stehen auch auf der Grundebene senkrecht. (**9**, 9.) Eine Kante AF des entstandenen geraden prismatischen Raumes macht man gleich der Quadratseite und legt durch F die der Grundfläche gleichlaufende Ebene. Der hierdurch abgegrenzte Quader ist ein regelmäfsiger Körper, weil jede Ecke in gleicher Anzahl gleiche Kanten, gleiche Seitenwinkel und gleiche Flächenwinkel besitzt.



Figur 172.



2) Berechnung. Die Kantenebene $ACHF$ ist ein Rechteck schönster Form, weil AC Eckenlinie eines Quadrates und AF gleich der Seite dieses Quadrates ist. Mit ihm stimmen die übrigen Kantenebenen überein. Deshalb sind die 4 Eckenlinien des Würfels gleich, und da sie in demselben Punkte sich halbieren (**11**, 8), so ist M der Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel, also auch der der beiden einbeschriebenen Kugeln. Deren Halbmesser werden mit ϱ bezeichnet, und zwar der von der Kugel, welche die Kanten berührt, mit ϱ_1, der der umbeschriebenen mit r. Aus ihren Durchmessern ersieht man sofort ihre Gröfse, bestimmt durch die Kanten a des Würfels,

$$\varrho = {}^1/_2\, a = 0{,}5\, a; \quad \varrho_1 = {}^1/_2\, a\sqrt{2} = 0{,}707\, a, \quad r = {}^1/_2\, a\sqrt{3} = 0{,}866\, a.$$

Dies giebt den spitzen Winkel α, unter welchem die Eckenlinien sich schneiden, am schnellsten durch den Kosinussatz aus

$$\cos\alpha = {}^1/_3 \qquad \alpha = 70^0\, 31'\, 43''.$$

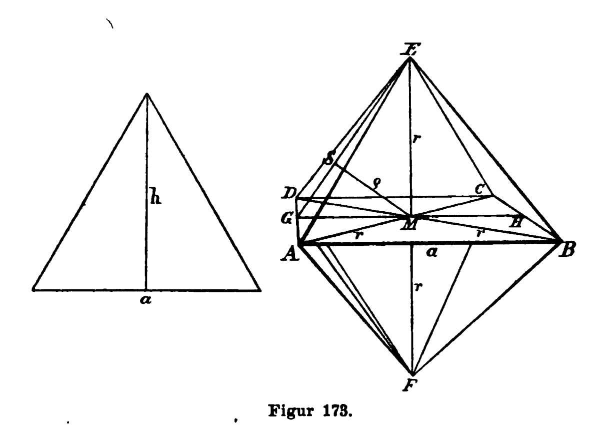
Ferner ist die Oberfläche des Würfels $F = 6a^2$ und sein Inhalt $J = a^3$.

4. Der regelmäfsige Achtflächner. 1) Herstellung. Figur 173.*) Auf einem Quadrate $ABCD$ errichtet man im Mittelpunkte M die halbe Eckenlinie nach beiden Seiten, und legt durch die Endpunkte E und F und jede Quadratseite eine Ebene; dann begrenzen dieselben einen regelmäfsigen Achtflächner.

Dafs alle Kanten $= a$ werden, ist leicht nachzuweisen. Auch die Kantenebenen $AECF$ und $BEDF$ sind Quadrate wegen ihrer halben Eckenlinien. Die Ecken A und B (und die übrigen) stimmen überein, weil ihre Hälften

---

*) Die Figur wird bequem dadurch entworfen, dafs man den durch die Mittellinie GH gehenden Achsenschnitt als Zeichenebene nimmt. Man macht GH gleich der Seite a des nebenbei gezeichneten gleichseitigen Dreiecks, beschreibt mit dessen Höhe h um G und H Kreuzbogen, deren Schnittpunkte die Spitzen E und F sind. Dann zieht man DA durch G, u. s. w.



Figur 173.

aus Gleichheit der drei Seitenwinkel deckbar sind. Daher ist der Achtflächner ein regelmäfsiger Körper, und M der Mittelpunkt seiner drei Kugeln.

2) Berechnung. Zunächst hat man

$$\varrho_1 = {}^1\!/_2\, a = 0{,}5\, a \quad \text{und}$$
$$r = {}^1\!/_2\, a\sqrt{2} = 0{,}707\, a.$$

Die erweiterte Ebene ADE schneidet die umbeschriebene Kugel in einem Kreise, welcher der um ADE beschriebene Kreis ist. Die auf den Schnittkreis von M gefällte Senkrechte MS trifft seinen Mittelpunkt, welcher im gleichseitigen Dreiecke ADE der Schwerpunkt ist. Daher ist SE ${}^2\!/_3$ der Höhe des gleichseitigen Dreiecks. Dies giebt

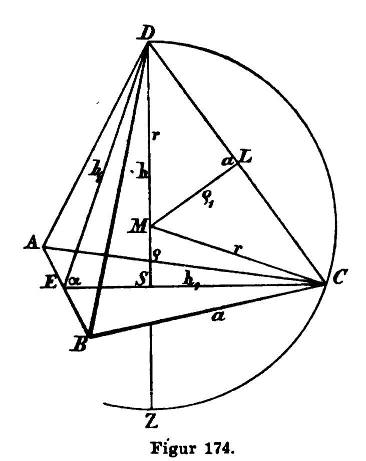
$$\varrho = {}^1\!/_6\, a\sqrt{6} = 0{,}408\, a.$$

Es ist $\angle EGF$ der Neigungswinkel α des Flächenwinkels an der Kante AD. Man findet ihn, wie oben, aus

$$\cos\alpha = -\,{}^1\!/_3$$

also gleich dem stumpfen Schnittwinkel der Würfeleckenlinien, $\alpha = 109^0\,28'\,17''$.

Endlich ist $F = 2\,a^2\sqrt{3} = 3{,}464\, a^2$ und $J = {}^1\!/_3\, a^3\sqrt{2} = 0{,}471\, a^3$. Dazu, als Probe für die Rechnung, $J = {}^1\!/_3\, F\varrho$. (**15**, 20.)



Figur 174.

5. Der regelmäfsige Vierflächner. Herstellung.*) Auf der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks ABC errichtet man im Schwerpunkte S die Senkrechte, legt durch sie und einen Eckpunkt C die Ebene und beschreibt in dieser um C mit der Seite a des gleichseitigen Dreiecks ABC einen Kreis, welcher die Senkrechte in D schneidet. Die durch D und die Seiten des Grunddreiecks zu legenden Ebenen bilden den Mantel eines regelmäfsigen Vierflächners. Seinen Mittelpunkt M findet man auf dem Lote SD, indem man in der Ebene CDS auf CD die Mittelsenkrechte LM zieht.

Der Beweis ist sehr leicht.

*) Als Zeichenebene nehme man die durch eine Kante und die Höhe gehende Ebene und wähle die Seite des nebenbei zu zeichnenden gleichseitigen Dreiecks ziemlich grofs (für Figur 174 ist sie 4 cm lang), weil die Seitendreiecke am Körper auffallend klein erscheinen. Man beginnt mit EC, gleich der Höhe h_1 des Hilfsdreiecks, beschreibt um E mit h_1 und um C mit der Seite a Kreuzbogen, deren Schnitt die Spitze D ist, legt AB durch E, u. s. w.

2) Berechnung. Zuerst ist die Höhe DS des Vierflächners zu bestimmen: $h = {}^1/_3\, a\sqrt{6} = 0{,}816\, a$;
dann hat man aus dem Hauptkreise DCZ $2rh = a^2$
also $r = {}^1/_4\, a\sqrt{6} = 0{,}612\, a$
und $\varrho = h - r = {}^1/_{12}\, a\sqrt{6} = 0{,}204\, a$;
demnach ist $\varrho = {}^1/_3\, r = {}^1/_4\, h$ und $r = {}^3/_4\, h$.

[Solche Teilung der von der Spitze nach dem Schwerpunkte S gehenden Geraden war zu erwarten, weil der Mittelpunkt auch der Schwerpunkt des regelmäſsigen Körpers sein muſs. (**12**, 12, 2.)]
Nun folgt hieraus $\varrho_1 = {}^1/_4\, a\sqrt{2} = 0{,}354\, a$.
Es giebt $ES = {}^1/_3\, h_1$ $\cos\alpha = {}^1/_3$
also ist der Neigungswinkel des Flächenwinkels gleich dem spitzen Schnittwinkel der Würfeleckenlinien, $\alpha = 70^0\, 31'\, 43''$; und aus dem gleichschenkligen Dreiecke CDE geht hervor der Neigungswinkel DCE der Kante zur Gegenfläche $\beta = 90^0 - {}^1/_2\,\alpha = 54^0\, 44'\, 8''$.

Es wird die Oberfläche $F = a^2\sqrt{3} = 1{,}732\, a^2$
und der Inhalt $J = {}^1/_{12}\, a^3\sqrt{2} = 0{,}118\, a^3$
wozu $J = {}^1/_3\, F\varrho$ die Bestätigung giebt.

Schluſsbemerkung. Die weit schwieriger zu behandelnden regelmäſsigen 12- und 20-Flächner mögen erst in **21**, 1 und 2 vorgenommen werden.

6. Übungen.

1) Würfel: M., Aufgabe 639.

2) Achtflächner: M., Aufgaben 631—635.

3) Vierflächner: M., Aufgaben 624—630, 617, 618.

4) Der regelmäſsige Achtflächner und der Würfel, welche derselben Kugel einbeschrieben sind, haben auch die die Flächen berührende Kugel gemeinsam.

5) In der dem regelmäſsigen Vierflächner umbeschriebenen Kugel ist der einbeschriebene Würfel dreimal so groſs als der Vierflächner.

6) Eine Kreisfläche, welche genau gleich einem Quadrate ist. Von dem einem regelmäſsigen Vierflächner mit den Kanten a umbeschriebenen Kegel werde durch eine mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene ein Kegel abgeschnitten, dessen Mantel gleich der Oberfläche des Vierflächners ist. Wie groſs wird der Inhalt des Schnittkreises? — Aber an welcher Stelle des Mantels befindet sich dieser so groſse Kreis? (Sein Randabstand von der Spitze ist etwa $y = 0{,}977\,21\, a$, siebenstellige Logarithmen geben $0{,}977\,2050\, a$ an.)

---

7) Zwei regelmäſsige Vierflächner von gleicher Kante werden zu einer Doppelpyramide zusammengesetzt. Welcher Bruchteil der Achse, welche die Spitzen der dreiseitigen Ecken verbindet, wird der Durchmesser der die sechs Grenzflächen berührenden Kugel? und wie teilt jeder Berührungspunkt die Höhe eines Seitendreiecks?

8) Legt man Berührungsebenen durch die Punkte, in welchen die Höhen eines regelmäſsigsn Vierflächners von der die Seitenflächen berührenden Kugel geschnitten werden, so bleibt nach Fortnahme der an den Ecken abgetrennten Stücke ein Körper, dessen Gestalt aus seinen Seitenfiguren und Flächenwinkeln zu bestimmen ist. Wenn der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel $= \varrho$ gegeben ist, so soll berechnet

werden 1) die Gröfse der Kanten, 2) der Halbmesser der ihm umbeschriebenen Kugel, 3) die Oberfläche und 4) der Inhalt des Körpers.

Ergebnis. 4) $J = 6{,}9282\,\varrho^3$. [Vergl. **21**, 7, 8) und 9).]

9) Die Ecken eines Würfels werden so weit abgestumpft, dafs die Schnitte durch die Mitte der in einer Ecke zusammentreffenden Kanten gehen. Dadurch entsteht ein vierzehnseitiger Körper mit lauter gleichen Kanten. Jede derselben sei gleich a gegeben. Man berechne die Oberfläche und den Inhalt dieses Körpers, und wenn er eine umbeschriebene und zwei einbeschriebene Kugeln besitzt, auch deren Halbmesser. [Vergl. **21**, 7, 9).] [$\varrho_1 = 0{,}866\,a$.]

10) Dieselbe Aufgabe für einen regelmäfsigen Achtflächner. Dabei ist nachzuweisen, dafs eine Ebene durch die vier Punkte möglich ist. [Es entsteht derselbe Körper; aber die Berechnung ist eine andere.] (Vergl. **21**, 7, 8.)

11) Stumpft man die Ecken eines regelmäfsigen Vierflächners so weit ab, dafs von den Seitenflächen regelmäfsige Sechsecke übrig bleiben, so entsteht ein achtseitiger Körper mit lauter gleichen Kanten. Durch die Gröfse a jeder Kante bestimme man 1) die Oberfläche und 2) den Inhalt des Körpers, 3) den Halbmesser der ihm umbeschriebenen Kugel und 4) den der ihm einbeschriebenen Kugel, die alle Kanten berührt. [$J = 2{,}7106\,a^3$, $r = 1{,}1726\,a$.]

12) Dieselbe Aufgabe für einen regelmäfsigen Achtflächner. Bei diesem vierzehnseitigen Körper ist noch 5) anzugeben die Gröfse der Flächenwinkel.

[$F = 26{,}7846\,a^2$, $r = 1{,}5811\,a$.]

13) Stumpft man die Ecken eines Würfels so weit ab, dafs von den Seitenflächen regelmäfsige Achtecke übrig bleiben, so entsteht ein vierzehnseitiger Körper mit lauter gleichen Kanten. Durch die Gröfse a jeder Kante bestimme man 1) die Oberfläche und 2) den Inhalt des Körpers, 3) den Halbmesser der ihm umbeschriebenen Kugel und 4) den der ihm einbeschriebenen Kugel, die alle Kanten berührt; endlich 5) den Flächenwinkel an einer Dreieckskante.

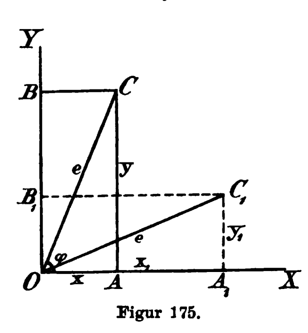
[$F = 32{,}4347\,a^2$, $J = 13{,}5997\,a^3$, $r = 1{,}7788\,a$.]

---

17. Glied. Anhang. Bestimmung der gröfsten oder kleinsten unter abhängigen Figuren.

Zur Einführung in diese Betrachtungen werden vier Gruppen von Aufgaben zur Auswahl vorgelegt für Behandlung in Übungsstunden.

1. 1) **Unter den Rechtecken mit der gegebenen Eckenlinie e das gröfste zu bestimmen.**



Figur 175.

Innerhalb des rechten Winkels XOY dreht sich um O die Strecke $OC = e$. In jeder Lage bestimmen die vom Endpunkte C auf die Schenkel gefällten Senkrechten ein Rechteck mit der Eckenlinie e, dessen Inhalt andere und andere Gröfse erhält. Ist die Grundseite $OA = x$ noch sehr klein, so ist zwar die Höhe $AC = y$ recht grofs; aber der Inhalt wegen der kleinen Grundseite nur gering; die Inhaltszahl beginnt, wenn OC aus OY hervorgehen will, mit Null. Rückt nun OC, wie der Minutenzeiger einer Uhr, vor, so wächst

der Inhalt des Rechtecks; er wird jedoch später wieder kleiner, wenn OC_1 sich dem andern Schenkel OX nähert, weil dort die Höhe y schnell abnimmt, und wenn sie verschwindet, ist auch die Inhaltszahl zu Null geworden. Da also die Inhaltszahl von Null an ein ununterbrochenes Zunehmen und Wiederabnehmen durchgemacht hat, mufs sie irgendwo am gröfsten gewesen sein. Diese Stelle ist zu bestimmen.

Dazu bieten sich zwei Wege.

a) Hat in dem gewählten Rechtecke $OACB$ die Eckenlinie e gegen die Grundseite x den Neigungswinkel φ, so wird der Inhalt

$$R = xy = e^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

welchen Ausdruck man zusammenziehen wird in

$$R = {}^1/_2 e^2 \sin 2\varphi.$$

Die Gröfse der Inhaltszahl ändert sich also nur durch den Sinus; sie wird am gröfsten bei $\sin 2\varphi = 1$, bei $2\varphi = 90^0$, $\varphi = 45^0$. Das gröfste unter den Rechtecken mit gleicher Eckenlinie ist das Quadrat. Sein Inhalt ist ${}^1/_2 e^2$.

b) In $R = xy$ ist die zweite Veränderliche y zu ersetzen durch den Ausdruck, welcher ihre Abhängigkeit von x angiebt, $y = \sqrt{e^2 - x^2}$,

$$R = x\sqrt{e^2 - x^2}.$$

Da die Inhaltszahl jenseit des gröfsten Wertes durch alle möglichen Zahlen hinabgeht auf Null, mufs sie an einer Stelle wieder auf die eben gedachte Gröfse R kommen. Dort hat aber x eine andere Länge, x_1, so dafs dieselbe Zahl R sich ergiebt aus

$$R = x_1\sqrt{e^2 - x_1^2}$$

und man hat durch Gleichsetzen

$$x\sqrt{e^2 - x^2} = x_1\sqrt{e^2 - x_1^2}.$$

Zum Beseitigen der Quadratwurzeln wird die Gleichung quadriert

$$e^2x^2 - x^4 = e^2x_1^2 - x_1^4$$

und wenn man die gleichartigen Gröfsen zusammenbringt

$$x_1^4 - x^4 = e^2(x_1^2 - x^2).$$

Der Faktor $(x_1^2 - x^2)$ steckt auch in dem links stehenden Unterschiede zweier Quadrate. Weil x_1 jenseit der Stelle des gröfsten Rechtecks liegen sollte, so hat x_1 eine andere Gröfse als x; da also dieser Unterschied $(x_1^2 - x^2)$ nicht gleich Null sein soll, so darf man durch $(x_1^2 - x^2)$ die Gleichung dividieren und erhält

$$x_1^2 + x^2 = e^2.$$

Daraus ersieht man, dafs $x_1 = \sqrt{e^2 - x^2}$ die Grundseite des vorhin nur gedachten zweiten Rechtecks ist, welches dieselbe Inhaltszahl R hat; und man könnte durch $\sqrt{e^2 - x^2}$ die Grundseite x_1 berechnen und würde sie von anderer Gröfse als das gewählte x (OA) finden, nämlich $= y$ (AC). Nur wenn man bei der Wahl des x zufällig das x des gröfsten Rechtecks getroffen hätte. müfste x_1 gleich x sich ergeben, weil dem gröfsten Rechteck kein anderes an Gröfse gleichkommt. Aus dieser Überlegung folgt, dafs man in der Gleichung

$$x_1^2 + x^2 = e^2$$

die Grundseite des gröfsten Rechtecks besitzt, wenn man x_1 gleich x setzt:

$$2x^2 = e^2$$

mithin ist das gesuchte $x = e\sqrt{1/2}$, dazu $y = e\sqrt{1/2}$, als ebenso grofs wie x. Das gröfste dieser Rechtecke ist das Quadrat.

2) **Welches von diesen Rechtecken hat den gröfsten Umfang?**

Man betrachte den Umfang $2s = 2x + 2y$ bei einem Rechtecke, in welchem e fast senkrecht auf x steht. Läfst man e in die senkrechte Stellung übergehen, so wird der Umfang zu $2e$. Dies ist der Grenzwert des Umfangs. Wächst x von Null bis zu geringer Gröfse, so werden die Seiten y kaum kleiner als e; und was sie verloren haben, wird durch die beiden Seiten x mehr als hinreichend ersetzt; der Umfang wird also gröfser. Geht der Neigungswinkel φ in Null über, so kommt der Umfang wieder auf die Gröfse $2e$. Es mufs also ein Rechteck mit gröfstem Umfange geben.

a) Es wird

$$s = x + y = e(\cos\varphi + \sin\varphi)$$
$$s = 2e\sin 45^0 \cdot \cos(45^0 - \varphi).$$

Dieser Ausdruck hat seinen gröfsten Wert, wenn $\cos(45^0 - \varphi) = 1$ wird; also bei $45^0 - \varphi = 0$, $\varphi = 45^0$. Das Quadrat hat auch den gröfsten Umfang, nämlich $2s = 2e\sqrt{2} = 2{,}828e$.

b) Bei der Bestimmung durch Linien ist hier folgendermafsen zu verfahren:

$$s = x + y = x + \sqrt{e^2 - x^2}.$$

Das Rechteck mit ebenso grofsem Umfange, welches jenseit des Rechtecks mit dem gröfsten Umfange liegt, verschafft die Gleichung

$$x + \sqrt{e^2 - x^2} = x_1 + \sqrt{e^2 - x_1^2}$$

die durch Zusammenstellen der gleichartigen Ausdrücke geordnet wird

$$\sqrt{e^2 - x^2} - \sqrt{e^2 - x_1^2} = x_1 - x.$$

Um auch auf der linken Seite x_1 und x zusammenkommen zu lassen, sind die Wurzelzeichen zu beseitigen, und dies leistet die Benutzung der Formel

$$(a - b)\cdot(a + b) = a^2 - b^2.$$

Den Unterschied der beiden Quadratwurzeln multipliziert und dividiert man mit der Summe der Wurzeln:

$$\frac{(e^2 - x^2) - (e^2 - x_1^2)}{\sqrt{e^2 - x^2} + \sqrt{e^2 - x_1^2}} = x_1 - x$$

oder

$$\frac{x_1^2 - x^2}{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}} = x_1 - x$$

hat also im Zähler die Vereinigung, und diese enthält als Faktor den Unterschied $x_1 - x$, welcher wegen der getrennten Lage der beiden Rechtecke nicht gleich Null sein sollte, also fortgehoben werden darf:

$$\frac{x_1 + x}{\sqrt{e^2 - x^2} + \sqrt{e^2 - x_1^2}} = 1.$$

Nach der Überlegung unter 1*b*) hat man in dieser Gleichung das x des Rechtecks mit gröfstem Umfange, wenn man x_1 gleich x setzt:

$$\frac{2x}{2\sqrt{e^2 - x^2}} = 1, \quad x = \sqrt{e^2 - x^2}$$

welche Gleichung schon zeigt $x = y$ und liefert $2x^2 = e^2$, $x = e\sqrt{1/2}$. Das Quadrat hat den gröfsten Umfang $2s = 2e\sqrt{2} = 2{,}828e$.

3) Vom Umfange bleibe die obere Seite fort.

Bei welchem von diesen Rechtecken ist die Summe der Grundseite und der beiden Nebenseiten am gröſsten?

a) Es wird aus $b = x + 2y$

$$b = e(\cos\varphi + 2\sin\varphi)$$

daher die Ansatzgleichung

$$\cos\varphi + 2\sin\varphi = \cos\varphi_1 + 2\sin\varphi_1$$
$$\cos\varphi - \cos\varphi_1 = 2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)$$
$$2\sin{}^1/_2(\varphi_1 + \varphi)\sin{}^1/_2(\varphi_1 - \varphi) = 4\cos{}^1/_2(\varphi_1 + \varphi)\sin{}^1/_2(\varphi_1 - \varphi).$$

Da φ_1 ein Winkel von anderer Gröſse, als φ, sein sollte, ist $\sin{}^1/_2(\varphi_1 - \varphi)$ nicht gleich Null und darf fortgehoben werden

$$\sin{}^1/_2(\varphi_1 + \varphi) = 2\cos{}^1/_2(\varphi_1 + \varphi)$$

und diese Gleichung wird zur Bestimmungsgleichung für den Winkel φ des Rechtecks mit der gröſsten Summe der drei Seiten, wenn man $\varphi_1 = \varphi$ setzt,

$$\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

also

$$\operatorname{tg}\varphi = 2.$$

Unter den zweimal rechtwinklig gebrochenen Linien b wird die gröſste nach dieser Gleichung leicht gezeichnet mittels e und $2e$.

Um die Länge der Teile und der ganzen gröſsten gebrochenen Linie anzugeben, sind $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus der Bestimmungsgleichung zu berechnen. Deren Quadrat giebt durch

$$1 - \cos^2\varphi = 4\cos^2\varphi \qquad \cos\varphi = \sqrt{{}^1/_5}$$

also $\sin\varphi$ das Doppelte $\sin\varphi = 2\sqrt{{}^1/_5}$;

daher $x = e\cos\varphi = e\sqrt{{}^1/_5}$, $y = e\sin\varphi = 2e\sqrt{{}^1/_5} = 2x$

also die gröſste Linie b

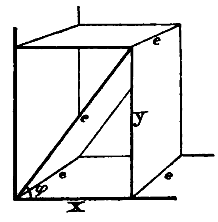
$$\text{gr. } b = 5x = e\sqrt{5} = 2{,}236\,e.$$

Dieses Rechteck hat die Gestalt von zwei über einander gesetzten Quadraten. Die gröſste gebrochene Linie ist gleich der Eckenlinie des zu seiner Zeichnung benutzten Hilfsdreiecks.

b) Die andere Behandlung ist ganz wie die unter 2*b*).

Für die dem Rechtecke entsprechende körperliche Figur, den Quader, möge die Kantenebene als das Quadrat über e gegeben werden.

Von einem auf dem Tische liegenden nahezu quadratischen Hefte klappe man den oberen Deckel bis zur senkrechten Stellung auf, bewege das erste Blatt langsam auf ihn zu und denke dabei den Rand des Blattes auf die Grundebene und auf die Deckelebene abgelotet. Dann sieht man die Gestalten der hier in Betracht kommenden Quader.



Figur 176.

4) **Welcher unter den Quadern, in denen das Quadrat über e eine Kantenebene ist, hat den gröſsten Inhalt?**

Es ist der Inhalt $J = exy$. Das Produkt xy wird, wie unter 1) bewiesen wurde, am gröſsten, wenn y gleich x ist. Demnach sind bei dem gröſsten Quader die Vorder- und Hinterfläche Quadrate, die vier andern Flächen Rechtecke schönster Form, weil ihre Seiten gleich der Seite und Ecken-

linie eines Quadrates sind. Der gröſste Quader ist halb so groſs wie der Würfel mit der Kante e.

5) **Bei welchem Quader ist die Summe der vier Flächen mit der Seite e am gröſsten?**

Antwort: Beim gröſsten Quader nach dem Ergebnis bei 2).

6) **Welcher Quader mit der Kantenebene e^2 hat den gröſsten Mantel?**

a) $$M = 2xy + 2ey = 2e^2 \sin\varphi \cos\varphi + 2e^2 \sin\varphi$$
$$M = e^2 (\sin 2\varphi + 2\sin\varphi).$$

Die aus der Ansatzgleichung hervorgehende Bestimmungsgleichung
$$\cos 2\varphi + \cos\varphi = 0$$
ist umzusetzen in
$$\cos 2\varphi = -\cos\varphi = \cos(180^0 - \varphi)$$
also ist $$2\varphi = 180^0 - \varphi, \quad 3\varphi = 180^0, \quad \varphi = 60^0.$$

Die Seitenflächen mit der Eckenlinie e bestehen aus zwei halben gleichseitigen Dreiecken, die Grund- und die Deckfläche aus zwei Quadraten mit der Seite $\frac{1}{2}e$. Es ist der
$$\text{gr. } M = \tfrac{3}{2}\sqrt{3} \cdot e^2 = 2{,}598\, e^2.$$

b) $$M = 2(e + x)\, y = 2(e + x)\sqrt{e^2 - x^2}$$
$$(e + x)\sqrt{e^2 - x^2} = (e + x_1)\sqrt{e^2 - x_1^2}.$$

Solche Ansatzgleichung, in welcher die Vorzahl der Quadratwurzel ein Klammerausdruck ist, muſs man nicht ins Quadrat erheben. Dadurch käme die Bestimmungsgleichung auf einen höheren Grad und würde eine der Aufgabe fremde Wurzel erhalten. Man könnte die Klammer auflösen; viel besser aber ist es
$$(e + x_1)\sqrt{e^2 - x^2} = (e + x_1)\sqrt{e^2 - x^2}$$
also eine Selbstgleichung, in welcher das x in der Klammer (oder das unter der Quadratwurzel) die Marke erhält, darunter aufzustellen und von der Ansatzgleichung abzuziehen:
$$(x - x_1)\sqrt{e^2 - x^2} = (e + x_1)\left(\sqrt{e^2 - x_1^2} - \sqrt{e^2 - x^2}\right)$$
$$= \frac{(e + x_1)(x^2 - x_1^2)}{\sqrt{e^2 - x_1^2} + \sqrt{e^2 - x^2}}$$
woraus hervorgeht die Bestimmungsgleichung
$$e^2 - x^2 = (e + x)\, x.$$
Der auf beiden Seiten stehende Faktor $(e + x)$, gleich Null gesetzt, würde $x = -e$ ergeben, was für die Aufgabe keine Bedeutung hat; es liefert
$$e - x = x$$
die gesuchte Wurzel $$x = \tfrac{1}{2}e.$$

Während durch diese Behandlung der quadratischen Bestimmungsgleichung die gesuchte Wurzel aus der einfachsten Gleichung, $e - x = x$, hervorging, würde derjenige, welcher die Ansatzgleichung zum Beseitigen der Quadratwurzel doch quadrierte, auf die Gleichung dritten Grades
$$x^3 + \tfrac{3}{2}ex^2 - \tfrac{1}{2}e^3 = 0$$
kommen und entweder festsitzen oder auf langem Wege endlich finden, daſs diese Bestimmungsgleichung die unbrauchbare Wurzel $x = -e$ zweimal enthält neben dem gesuchten $x = \frac{1}{2}e$. Deshalb merke man sich die Vorschrift über die Benutzung einer Selbstgleichung!

7) **Welcher Quader mit der Kantenebene e^2 hat die gröfste Oberfläche?**

a) $F = 2ex + 2ey + 2xy = (2\cos\varphi + 2\sin\varphi + \sin 2\varphi)\, e^2$
führt zu der Bestimmungsgleichung

$$\cos 2\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi = 0$$

in welcher $\cos 2\varphi$ zu ersetzen ist durch $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

$$(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (\cos\varphi - \sin\varphi) = 0$$

und nun ist der gemeinsame Faktor auszuschliefsen

$$(\cos\varphi - \sin\varphi)\,[\cos\varphi + \sin\varphi + 1] = 0.$$

Es liefert $\cos\varphi - \sin\varphi = 0$ durch $\cos\varphi = \sin\varphi$ die gesuchte Wurzel $\varphi = 45^0$. Der andere Faktor kann zu Null werden nur durch Winkel über 90^0, die hier unbrauchbar sind.

Der gröfste Quader hat auch die gröfste Oberfläche, und diese ist $(1 + 2\sqrt{2})\, e^2 = 3{,}828\, e^2$.

b) $F = 2\,[ex + (e + x)\, y] = 2\,[ex + (e + x)\sqrt{e^2 - x^2}]$.
Die Bestimmungsgleichung

$$e\sqrt{e^2 - x^2} + (e^2 - x^2) = (e + x)\, x$$

wird
$$e\sqrt{e^2 - x^2} = (e + x)\,[x - (e - x)].$$

Der auf beiden Seiten stehende Faktor $\sqrt{e + x}$ giebt, gleich Null gesetzt, keine brauchbare Wurzel; für jeden andern Wert, als $x = -e$, ist er nicht gleich Null und darf nun fortgehoben werden. Es liefert

$$e\sqrt{e - x} = \sqrt{e + x} \cdot [2x - e]$$

$$x = {}^1/_2\, e\sqrt{2}, \quad \text{dazu wird } y = x.$$

2. 1) **Welches ist das gröfste unter allen gleichschenkligen Dreiecken, in denen die Summe von Grundseite und Höhe gleich der gegebenen Strecke s ist?**

Es werde die Grundseite mit x, die Höhe mit y bezeichnet. Ist die Grundseite x nur ein sehr kleiner Teil von s, so wird der Inhalt, trotz der grofsen Höhe $y = s - x$, nur klein; die Inhaltszahl beginnt, wenn x aus Null hervorgehen will, mit Null. Sie wird mit wachsender Breite des Dreiecks anfangs schnell gröfser; später aber, wenn für die Höhe nur wenig übrig bleibt, wird sie kleiner, und geht für $y = 0$ wieder in Null über. Ein gröfstes Dreieck mufs vorhanden sein.

Zu dem beliebig gewählten Dreiecke mit dem Inhalte

$$J = {}^1/_2\, xy = {}^1/_2\, x\,(s - x)$$

mufs es hinter dem gröfsten ein ebenso grofses geben, weil die Inhaltszahl von ihrem höchsten Werte durch alle denkbaren Zahlen zu Null hinabgeht. Dieses Dreieck, mit der Grundseite x_1, die von anderer Länge als x ist, liefert mit dem gewählten Dreiecke die Gleichung

$${}^1/_2\, x\,(s - x) = {}^1/_2\, x_1\,(s - x_1)$$

deren Umformung
$$x_1{}^2 - x^2 = s\,(x_1 - x)$$

durch $x_1 - x$ dividiert werden darf, weil dieser Rest nicht gleich Null sein sollte. Aus $x_1 + x = s$ sieht man, dafs die Grundseite x_1 des ebenso grofsen anderen Dreiecks gleich der Höhe des ersten Dreiecks ist. Die Grundseite x_1 des zugehörigen Dreiecks wird für beliebige erste Dreiecke

von anderer Gröſse als x sein, und nur dann ihm gleich sich finden, wenn man das x des gröſsten Dreiecks nahm, weil das gröſste Dreieck kein ebenso groſses anderes neben sich hat. Setzt man demnach $x_1 = x$, so hat man das x des gröſsten Dreiecks aus der Gleichung

$$2x = s, \qquad x = {}^1/_2\, s, \qquad \text{also auch } y = {}^1/_2\, s.$$

Das gröſste ist dasjenige gleichschenklige Dreieck, bei welchem Grundseite und Höhe gleich sind, also nicht das durch seine Gestalt ausgezeichnete gleichseitige Dreieck.

2) Diese gleichschenkligen Dreiecke drehen sich um ihre Höhe.

Welches Dreieck liefert den gröſsten Kegel?

Bringt man in der Ansatzgleichung die gleichartigen Gröſsen zusammen, so hat man $x_1^3 - x^3 = s\,(x_1^2 - x^2)$.

Nach der Formel $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

die durch Ausmultiplizieren der Klammern am bequemsten erhalten wird, hat auch $x_1^3 - x^3$ den Faktor $(x_1 - x)$, welcher fortgehoben werden darf,

$$x_1^2 + x_1 x + x^2 = s\,(x_1 + x).$$

Hieraus wird, bei $x_1 = x$, die Bestimmungsgleichung

$$3x^2 = 2sx.$$

Durch die erste Wurzel dieser Gleichung zweiten Grades, $x = 0$, weist die Mathematik auf einen kleinsten Wert der Inhaltszahl K. Denn die Funktion

$$K = {}^1/_{12}\,\pi x^2\,(s - x)$$

ist für eine negative und für eine kleine positive Zahl x positiv, bei $x = 0$ aber gleich Null, also kleiner als ihre beiden Nachbaren rechts und links, und solche Gröſse nennt man einen kleinsten Wert. Das gesuchte x ist die andere Wurzel

$$x = {}^2/_3\, s, \qquad \text{dazu} \qquad y = {}^1/_3\, s.$$

Bei der Raumaufgabe ist also ${}^1/_2\, x = y$, die halbe Grundseite gleich der Höhe. Der Achsenschnitt des gröſsten Kegels besteht aus zwei gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken; der Winkel an der Spitze des Achsenschnitts ist ein Rechter. Das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck liefert den gröſsten Kegel.

3) In welcher Weise die Gröſse der Schenkel sich ändert, ist nicht sofort zu erkennen. Die Rechnung muſs darüber Auskunft geben. Es wird der Schenkel $z = \sqrt{({}^1/_2 x)^2 + y^2}$ für $x = 0{,}1s$ und $y = 0{,}9s$ zu $z = 0{,}901s$, und wenn x in Null übergeht, wird $z = y = s$; mithin wird z bei den Anfangswerten des wachsenden x kleiner. Nun habe x bis $0{,}8s$ zugenommen, also y auf $0{,}2s$ sich vermindert; da ist $z = 0{,}447s$; und bei $x = 0{,}9s$, $y = 0{,}1s$ kommt $z = 0{,}461s$; z wird also wieder gröſser und bei $x = s$, $y = 0$ zu $0{,}5s$. Mithin giebt es einen kleinsten Wert des Schenkels, und es ist die Aufgabe zu stellen:

Unter den gleichschenkligen Dreiecken, bei denen die Summe von Grundseite und Höhe $= s$ ist, dasjenige zu bestimmen, welches die kleinsten Schenkel hat.

a) Bei dieser Entwicklung lasse man in der Ansatzgleichung y hier stehen

$$ {}^1/_4 x^2 + y^2 = {}^1/_4 x_1^2 + y_1^2$$

$$ {}^1/_4 (x^2 - x_1^2) = y_1^2 - y^2 = (y_1 + y)\,(y_1 - y).$$

Es ist $y_1 - y = (s - x_1) - (s - x) = x - x_1$
daher bleibt nach dem Fortheben

$$^1/_4(x + x_1) = y_1 + y$$

dies giebt bei $x_1 = x$ $\quad ^1/_2 x = 2y$
also $x = 4y = s - y$, $y = {}^1/_5 s$, $x = {}^4/_5 s$. Der oben für $x = 0{,}8s$ berechnete Wert $z = 0{,}447 s$ war der des kleinsten Schenkels.

b) Mit Winkelfunktionen ist die Aufgabe in folgender Weise zu behandeln. Es sei der halbe Winkel an der Spitze $= \varphi$. Dann wird $y = z\cos\varphi$ und $x = 2z\sin\varphi$, zusammen $s = (\cos\varphi + 2\sin\varphi)z$, also

$$z = \frac{s}{\cos\varphi + 2\sin\varphi}.$$

Wenn der Schenkel, nachdem er seinen kleinsten Wert bekommen hat, wieder zunimmt, erreicht er abermals die Länge z, aber bei einem andern Winkel, welcher mit φ_1 bezeichnet werden möge. Das Gleichsetzen dieser beiden Werte giebt

$$\cos\varphi_1 + 2\sin\varphi_1 = \cos\varphi + 2\sin\varphi$$

und wenn man dieselben Funktionen zusammenbringt

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi = 2(\sin\varphi - \sin\varphi_1)$$

$$2\sin{}^1/_2(\varphi + \varphi_1)\sin{}^1/_2(\varphi - \varphi_1) = 4\cos{}^1/_2(\varphi + \varphi_1)\sin{}^1/_2(\varphi - \varphi_1).$$

Da φ_1 andere Gröfse als φ hat, ist $\sin{}^1/_2(\varphi - \varphi_1)$ nicht gleich Null, darf also fortgehoben werden:

$$\sin{}^1/_2(\varphi + \varphi_1) = 2\cos{}^1/_2(\varphi + \varphi_1)$$

daher $\quad \operatorname{tg}{}^1/_2(\varphi + \varphi_1) = 2.$

Je näher die paarweise gleichen z dem kleinsten Werte stehen, desto weniger sind φ_1 und φ von einander verschieden, und bei diesem selbst kommen beide in demselben Winkel zusammen. Man hat also in dem Ausdrucke $\operatorname{tg}{}^1/_2(\varphi + \varphi_1) = 2$ den Winkel φ des kleinsten Schenkels, wenn man φ_1 gleich φ setzt,

$$\operatorname{tg}\varphi = 2.$$

Da ist also $\dfrac{^1/_2 x}{y} = 2$, $x = 4y = s - y$; $y = {}^1/_5 s$, $x = {}^4/_5 s$.

4) Der Umfang des gleichschenkligen Dreiecks ist

$$u = x + 2\sqrt{^1/_4 x^2 + y^2} = x + \sqrt{x^2 + 4y^2}.$$

Er erhält bei $x = 0{,}1s$ und $y = 0{,}9s$ den Wert $u = 1{,}903s$. Wenn x bei Null beginnt, tritt $u = 2y$ aus $2s$ hervor. Der Umfang wird also, wenn x aus Null herauswächst, kleiner, und kommt, wenn x in s, y in Null übergeht, an den Grenzwert $2s$, also auf die Ausgangsgröfse. Demnach mufs es ein Dreieck mit kleinstem Umfange geben.

Welches unter diesen gleichschenkligen Dreiecken hat den kleinsten Umfang?

a) Auch bei dieser Entwicklung werde y noch nicht durch $s - x$ ersetzt.

$$x + \sqrt{x^2 + 4y^2} = x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4y_1^2}$$

oder geordnet $\quad \sqrt{x^2 + 4y^2} - \sqrt{x_1^2 + 4y_1^2} = x_1 - x.$

Um auch links x_1 und x zusammenkommen zu lassen, werden die Quadratwurzeln beseitigt nach $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, indem man die linke Seite mit der Summe der Quadratwurzeln multipliziert und dividiert.

$$\frac{x^2 - x_1^2 + 4(y^2 - y_1^2)}{\sqrt{x^2 + 4y^2} + \sqrt{x_1^2 + 4y_1^2}} = x_1 - x.$$

Da $y - y_1 = (s - x) - (s - x_1) = x_1 - x$ ist und auch rechts erst x_1, dann x steht, ist im Zähler umzustellen

$$\frac{4(y_1 + y)(x_1 - x) - (x_1^2 - x^2)}{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}} = x_1 - x$$

und nun fällt $x_1 - x$ durch Dividieren heraus

$$\frac{4(y_1 + y) - (x_1 + x)}{\sqrt{x^2 + 4y^2} + \sqrt{x_1^2 + 4y_1^2}} = 1.$$

Hieraus geht bei $x_1 = x$ und $y_1 = y$ für diese Gröfsen des kleinsten Umfanges die Bestimmungsgleichung hervor

$$4y - x = \sqrt{x^2 + 4y^2}, \quad \text{welche wird} \quad 3y^2 = 2xy.$$

Die erste Wurzel $y = 0$ mit $x = s$ hat für unsere Aufgabe keine Bedeutung (die Funktion u fährt fort zu wachsen bei $x > s$ und negativem y); die andere

$$y = {}^2/_3 x = s - x$$

liefert $x = {}^3/_5 s$, $y = {}^2/_5 s$, dazu $2z = s$
giebt den kleinsten Umfang $= 1{,}6\,s$.

Die Hälfte des gleichschenkligen Dreiecks mit kleinstem Umfange ist das Pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis 3 : 4 : 5, welches mit der andern Hälfte so zusammengesetzt ist, dafs im gleichschenkligen Dreieck der Schenkel zur Grundseite sich verhält = 5 : 6; es ist also etwas weniger hoch, als das gleichseitige Dreieck über derselben Grundseite.

b) Die Behandlung mit Winkelfunktionen ist geschickt durchzuführen. Es wird $u = 2z + x = 2z + 2z\sin\varphi = 2z\,(1 + \sin\varphi)$
durch den unter 3*b*) entwickelten Ausdruck für z

$$u = 2 \cdot \frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi + 2\sin\varphi} \cdot s.$$

Demnach

$$\frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi + 2\sin\varphi} = \frac{1 + \sin\varphi_1}{\cos\varphi_1 + 2\sin\varphi_1}.$$

Sind zwei Brüche gleich, so ist der Bruch aus dem Unterschiede der Zähler und dem der Nenner gleich jedem der Brüche (1. T., **18**, 2):

$$\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_1}{2(\sin\varphi - \sin\varphi_1) - (\cos\varphi_1 - \cos\varphi)} = \frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi + 2\sin\varphi}.$$

Nach dem Kürzen des linken Bruches geht für $\varphi_1 = \varphi$ die vereinfachte Bestimmungsgleichung hervor

$$1 + \sin\varphi = 2\cos\varphi.$$

Diese Gleichung werde quadriert, ohne links zu entwickeln,

$$(1 + \sin\varphi)^2 = 4(1 - \sin^2\varphi).$$

Der auf beiden Seiten stehende Faktor $1 + \sin\varphi$ kann hier nicht $= 0$ sein; daher hat man

$$1 + \sin\varphi = 4(1 - \sin\varphi)$$

also $\sin\varphi = {}^3/_5$, dazu $\cos\varphi = {}^4/_5$;
deshalb ist $y = z\cos\varphi = {}^4/_5 z$ und $x = 2z\sin\varphi = {}^6/_5 z$, zusammen $s = 2z$. Jeder Schenkel des Dreiecks mit kleinstem Umfange ist $z = {}^1/_2 s$, die Grundseite $x = {}^3/_5 s$, die Höhe $y = {}^2/_5 s$, der kleinste Umfang $= 1{,}6\,s$.

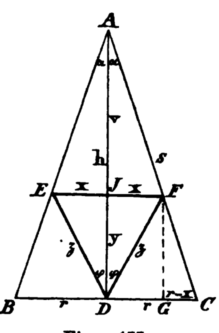
5) Der Mantel des durch Umdrehung solches gleichschenkligen Dreiecks entstehenden Kegels ist

$$M = \pi \cdot {}^1/_2 x \cdot z = {}^1/_2 \pi x \sqrt{({}^1/_2 x^2) + y^2}.$$

Er beginnt bei $x = 0$ mit $M = 0$, wird bei $x = 0{,}6s$ und $y = 0{,}4s$ erst zu $M = 0{,}15\pi s^2$, bei $x = 0{,}9s$ und $y = 0{,}1s$ zu $M = 0{,}207\pi s^2$, bei $x = s$ und $y = 0$ zur Kreisfläche $M = 0{,}25\pi s^2$, und die Funktion M wächst bei $x > s$ und negativem y immer weiter. Es hat also der Mantel keinen kleinsten (oder gröfsten) Wert, um so weniger die Oberfläche des Kegels.

3. 1) **In ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundseite $2r$ und der Höhe h soll das gröfste gleichschenklige Dreieck einbeschrieben werden, welches seine Spitze im Fufspunkte der Höhe hat.**

Läfst man eine der Grundseite BC stets gleichlaufende Gerade von BC an durch das ganze Dreieck bis zur Spitze hinauf wandern, so sieht man, dafs die Inhaltszahl des einbeschriebenen Dreiecks DEF aus Null hervorgeht, gröfser und gröfser wird, beim Annähern an die Spitze aber wegen der sehr verkürzten Grundseite EF wieder abnimmt und, wenn diese in A anlangt, mit Null schliefst. Es mufs also ein Dreieck mit gröfstem Inhalte vorhanden sein.



Figur 177.

Bezeichnet man die Grundseite EF des einbeschriebenen Dreiecks DEF mit $2x$, seine Höhe mit y, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$J = xy.$$

Es ändert sich y zugleich mit x. Den Ausdruck dieser Abhängigkeit des y von x liest man, wenn man $FG \parallel AD$ zieht, sofort ab aus $\triangle FGC \sim ADC$

$$y = \frac{h}{r}(r - x)$$

und hat nun die Inhaltszahl

$$J = \frac{h}{r}(r - x)\,x$$

nur abhängig von der Änderung des x.

Jenseit des gröfsten Dreiecks kommt die Inhaltszahl wieder auf dieselbe Gröfse J bei einem Dreiecke, dessen halbe Grundseite eine andere Länge, x_1, hat. Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke derselben Gröfse J erhält man die Ansatzgleichung

$$\frac{h}{r}(r - x)\,x = \frac{h}{r}(r - x_1)\,x_1$$

aus welcher nach Umformung und dem Fortdividieren des gemeinsamen Faktors $x_1 - x$, welcher nicht gleich Null sein sollte, hervorgeht

$$x_1 + x = r.$$

Die halbe Grundseite x_1 des vorhin nur gedachten anderen Dreiecks von gleicher Gröfse wie DEF ist aus $x_1 = r - x$ zu finden und wird sich von anderer Gröfse als x ergeben, wenn man nicht zufällig das x des gröfsten Dreiecks trifft; da mufs x_1 gleich x werden, weil dem gröfsten Dreiecke kein anderes ebenso grofses Dreieck zur Seite steht. Setzt man also $x_1 = x$

in $x_1 + x = r$, so hat man in der Gleichung $2x = r$ die Grundseite des größten Dreiecks, und durch $x = \frac{1}{2} r$ mittels des obigen Ausdrucks seine Höhe $y = \frac{1}{2} h$. Die Grundseite des größten Dreiecks geht also mitten durch die Höhe des gegebenen Dreiecks, von dessen Inhalt das gröſste einbeschriebene Dreieck $\frac{1}{4}$ in sich schlieſst.

Das gröſste Dreieck ist dem gegebenen ähnlich. Sein Schwerpunkt liegt von der Spitze D aus $\frac{2}{3} y = \frac{1}{3} h$ entfernt auf der Höhe; dort befindet sich auch der Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks. Unter den einbeschriebenen Dreiecken ist dasjenige das gröſste, dessen Schwerpunkt in den des gegebenen fällt.

2) **Welches von den eingezeichneten Dreiecken beschreibt bei Umdrehung der Figur um die Höhe den gröſsten Kegel?**

Drückt man die schneidende Ebene (EF) ganz hinab (bis auf BC), so wird der Inhalt des Kegels durch die Höhe zu Null (der Körper artet aus in eine Kreisfläche), und wenn die Schnittebene bis zur Spitze A hinaufgekommen ist, hat sich der Kegel in die Höhe DA zusammengezogen, sein Rauminhalt ist wieder zu Null geworden. Es muſs einen gröſsten Kegel geben.

Hier gelangt man in der vorhin angegebenen Weise zu der Bestimmungsgleichung
$$3x^2 = 2rx$$
deren erste Wurzel, $x = 0$, einen kleinsten Wert der Inhaltszahl
$$J = \frac{1}{3} \pi \frac{h}{r} (r - x) x^2$$
nachweist; denn im Scheitelkegel liefert die ihre Wanderung fortsetzende Schnittebene immer gröſser werdende Kegel. (Läuft F auf der Verlängerung der CA weiter, so geht dort das betrachtete x nach entgegengesetzter Richtung, wird also negativ und läſst die Zahl J immer gröſser werden.) Bei $x = 0$ war demnach $J = 0$ ein kleinster Wert, kleiner als die Nachbaren vorher und nachher. Die andere Wurzel $x = \frac{2}{3} r$ giebt den gröſsten Kegel mit der Höhe $y = \frac{1}{3} h$. Hier wird also von der Höhe h nur das untere Drittel abgeschnitten. Der gröſste Kegel beträgt nur $\frac{4}{27}$ vom Inhalte des vom gegebenen Dreiecke beschriebenen Kegels.

Da der Winkel an der Spitze von anderer Gröſse ist, wird der gröſste einbeschriebene Kegel dem ganzen nicht ähnlich; aber in der Lage des Schwerpunktes stimmt das Ergebnis der Körperaufgabe mit dem in der Ebene zusammen: unter den einbeschriebenen Kegeln ist derjenige der gröſste, dessen Schwerpunkt in den des gegebenen Kegels kommt.

3) **Wie groſs sind die Schenkel des einbeschriebenen Dreiecks mit kleinstem Umfange?**

Läſst man die Schnittlinie wieder von BC ausgehen, so beginnt der Umfang des Dreiecks von $2r + 2r = 4r$ an; die Schenkel der entstehenden Dreiecke werden kleiner, bis sie rechtwinklig auf AC und AB stoſsen; die Grundseite der einbeschriebenen Dreiecke wird auch kleiner; also nimmt der Umfang von $4r$ an ab, und wenn die Schnittlinie in dem hohen Dreiecke ABC bis zur Spitze kommt, ist der Umfang bis zu $2h$ angewachsen. Die Möglichkeit für einen kleinsten Umfang ist also vorhanden, während es beim Inhalte einen gröſsten Wert gab.

α) Der Umfang $u = 2x + 2z$ giebt die Ansatzgleichung
$$x + z = x_1 + z_1 \quad \text{oder geordnet} \quad x - x_1 = z_1 - z.$$

Um auch auf der rechten Seite, wo $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $z_1 = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}$ ist, x und x_1 zusammenzubringen, ist zu nehmen

$$z_1 - z = \frac{z_1{}^2 - z^2}{z_1 + z} = \frac{x_1{}^2 + y_1{}^2 - x^2 - y^2}{z_1 + z} = \frac{(y_1 + y)(y_1 - y) - (x^2 - x_1{}^2)}{z_1 + z}$$

und auch in $y_1 - y$ steckt $x - x_1$, denn es ist $y_1 - y = \frac{h}{r}(x - x_1)$ oder, da $\frac{h}{r}$ $\operatorname{ctg}\alpha$ bedeutet, $y_1 - y = (x - x_1)\operatorname{ctg}\alpha$; also wird aus jener Gleichung

$$x - x_1 = \frac{(y_1 + y)(x - x_1)\operatorname{ctg}\alpha - (x^2 - x_1{}^2)}{z_1 + z}$$

so dafs $(x - x_1)$ herausfällt

$$1 = \frac{(y_1 + y)\operatorname{ctg}\alpha - (x + x_1)}{z_1 + z}.$$

In dieser Gleichung stehen, wenn man $x_1 = x$ setzt, die dem Dreiecke mit kleinstem Umfange angehörigen Gröfsen

$$1 = \frac{2y\operatorname{ctg}\alpha - 2x}{2z}$$

also lautet die Bestimmungsgleichung

$$z = y\operatorname{ctg}\alpha - x.$$

Leider mufs diese Gleichung, da z eine Quadratwurzel vertritt, quadriert werden, wodurch in die Bestimmungsgleichung eine der A u f g a b e f r e m d e W u r z e l k o m m e n k a n n:

$$x^2 + y^2 = y^2\operatorname{ctg}^2\alpha - 2xy\operatorname{ctg}\alpha + x^2.$$

Nach Fortfallen des x^2 ist y überall Faktor und es würde die Gleichung durch $y = 0$ befriedigt werden. Zu $y = 0$ gehört $x = r$ und der Wert $u = 4r$, der als Ausgangswert genommen wurde und nicht der gesuchte kleinste Umfang ist. Allein auch die Funktion

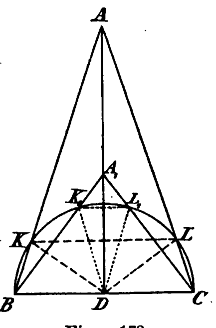
$$u = 2\left[x + \sqrt{x^2 + y^2}\right]$$

wird für negative y, zu denen Seiten $2x$ zwischen den Verlängerungen der Schenkel über die Grundseite BC hinaus gehören und die immer zunehmen, weiter g r ö f s e r; mithin hat $y = 0$ für die Aufgabe, einen kleinsten oder gröfsten Wert zu bestimmen, k e i n e B e d e u t u n g; sie ist die durch Quadrieren hineingekommene, der Aufgabe f r e m d e Wurzel. Also ist y fortzuheben:

$$y = y\operatorname{ctg}^2\alpha - 2x\operatorname{ctg}\alpha.$$

Dies wird
$$x\sin 2\alpha = y\cos 2\alpha$$
und wenn man nun für y den Ausdruck $(r - x)\operatorname{ctg}\alpha$ einsetzt, ergiebt sich

$$x = r\cos 2\alpha, \quad \text{also} \quad y = r\sin 2\alpha \quad \text{und} \quad z = r.$$



Figur 178.

Dasjenige einbeschriebene Dreieck hat den kleinsten Umfang, dessen Schenkel g l e i c h d e n H ä l f t e n d e r G r u n d s e i t e sind und man findet dessen Eckpunkte auf AC und AB, indem man über BC den Halbkreis beschreibt. Auf ihm liegen die beiden Eckpunkte der Dreiecke mit kleinstem Umfange für s ä m t l i c h e D r e i e c k e, die man auf BC für die Aufgabe geben kann und sieht daraus sogleich, dafs die Aufgabe nur für solche Dreiecke m ö g l i c h ist, die über

den Halbkreis hinausragen; es mufs die Höhe des Dreiecks gröfser als die halbe Grundseite gegeben werden. Bei allen auf BC stehenden Dreiecken, für welche die Aufgabe möglich ist, haben die Dreiecke mit kleinstem Umfange gleich lange Schenkel.

b) Bezeichnet man den Winkel an der Spitze des einbeschriebenen Dreiecks mit 2φ (Figur 177), so wird der Umfang $u = 2z + 2x$ durch $x = z\sin\varphi$

$$u = 2z(1 + \sin\varphi)$$

und aus dem Dreiecke ADF liefert der Sinussatz $z = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)} h$

$$u = 2h\sin\alpha \cdot \frac{1 + \sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Auf die Ansatzgleichung

$$\frac{1 + \sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{1 + \sin\varphi_1}{\sin(\alpha + \varphi_1)}$$

ist der Satz anzuwenden (1. T., **18**, 2): Sind zwei Brüche gleich, so ist der Bruch aus dem Unterschiede der Zähler und dem der Nenner gleich jedem der beiden Brüche:

$$\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_1}{\sin(\alpha + \varphi) - \sin(\alpha + \varphi_1)} = \frac{1 + \sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

$$\frac{2\cos{}^1/_2\,(\varphi + \varphi_1)\sin{}^1/_2\,(\varphi - \varphi_1)}{2\cos{}^1/_2\,(2\alpha + \varphi + \varphi_1)\sin{}^1/_2\,(\varphi - \varphi_1)} = \text{Bruch}$$

gekürzt

$$\frac{\cos{}^1/_2\,(\varphi + \varphi_1)}{\cos{}^1/_2\,(2\alpha + \varphi + \varphi_1)} = \text{Br.}$$

Beim Dreiecke mit kleinstem Umfange sind φ_1 und φ derselbe Winkel. Setzt man also $\varphi_1 = \varphi$, so hat man für diesen Winkel die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha + \varphi)} = \frac{1 + \sin\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

welche durch Fortschaffen der Nenner wird

$$\sin(\alpha + \varphi)\cos\varphi = \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + \varphi)\sin\varphi$$

das letzte Glied vereinigt sich mit dem auf der linken Seite zu

$$\sin\alpha = \cos(\alpha + \varphi) \quad \text{oder} \quad \cos(90^0 - \alpha) = \cos(\alpha + \varphi)$$

also ist $\quad 90^0 - \alpha = \alpha + \varphi, \quad$ daher $\quad 90^0 - \varphi = 2\alpha.$

Dies lehrt: Beim Dreiecke mit kleinstem Umfange ist $\angle CDF = BAC$, in Figur 178 $\angle CDL = BAC$, und, da noch $\angle C = C$, so wird $\triangle CDL \sim BAC$, also auch gleichschenklig. Deshalb findet man L auf CA, indem man um D mit DC einen Kreis beschreibt.

4) Der Mantel der unter 2) betrachteten geraden Kegel, $M = \pi xz$, flacht sich, wenn die Schnittebene ganz auf die Grundfläche niedergedrückt wird, zur Grundkreisfläche ab; seine Ausgangsgröfse ist also πr^2. Erhebt sich die Schnittebene langsam, so wird z kleiner bis zum Lote von D auf CA; auch x wird kleiner; also nimmt der Mantel von πr^2 an ab, später aber nimmt er wieder zu wegen schneller Vergröfserung der Seitenlinie z, wenn auch x langsam fortfährt kleiner zu werden. Kommt jedoch die Schnittebene der Spitze nahe, so wird durch die nur noch geringe Länge von x das Produkt xz wieder kleiner; der Mantel legt sich eng um die

Höhe DA und artet in die Linie DA aus, wenn die Schnittebene durch die Spitze geht. Dort wird $M = \pi xz$ durch $x = 0$ zu Null. Demnach wird es, wenn der gegebene Kegel recht hoch ist, einen einbeschriebenen Kegel mit kleinstem Mantel und einen mit gröfstem Mantel geben; und mit dieser Bezeichnung meint man einen Kegelmantel, welcher kleiner ist als seine Nachbaren vor und hinter ihm, und einen anderen, welcher gröfser ist als seine Nachbaren, wenn es auch an andern Stellen der unbegrenzt gegebenen Kegelfläche einbeschriebene Kegel geben mag, deren Mäntel gröfser sind, als jener „gröfste" Mantel. In diesem Sinne ist die Aufgabe zu nehmen:

In einen gegebenen geraden Kegel, dessen Seitenlinien mit der Achse den nur kleinen Winkel α bilden, diejenigen mit ihrer Spitze im Fufspunkte der Höhe h ruhenden geraden Kegel einzuzeichnen, deren Mäntel einen kleinsten oder einen gröfsten Zahlenwert haben.

a) Es giebt $M = \pi xz$ die Ansatzgleichung $\qquad xz = x_1 z_1$
von ihr werde abgezogen die Selbstgleichung $\qquad x_1 z = x_1 z$

$$(x - x_1)\, z = x_1\, (z_1 - z).$$

Dies zeigt, dafs man hier an die unter 3*a*) entwickelte Gleichung nur links z und rechts x_1 als Faktor beizufügen braucht:

$$(x - x_1)\, z = x_1 \cdot \frac{(y_1 + y)\,(x - x_1)\operatorname{ctg}\alpha - (x^2 - x_1^2)}{z_1 + z}$$

also
$$z = x_1 \cdot \frac{(y_1 + y)\operatorname{ctg}\alpha - (x + x_1)}{z_1 + z}$$

und bei $x_1 = x$ die Bestimmungsgleichung

$$z = x \cdot \frac{y \operatorname{ctg}\alpha - x}{z}$$

also $\qquad x^2 + y^2 = xy \operatorname{ctg}\alpha - x^2 \quad$ oder $\quad 2x^2 + y^2 = y \cdot x \operatorname{ctg}\alpha.$

Es bedeutet $x \operatorname{ctg}\alpha$ AJ (Figur 177). Dieser Abstand v der Schnittebene von der Spitze des gegebenen Kegels werde nun als bestimmende Gröfse eingeführt:

$$x = v \operatorname{tg}\alpha, \quad y = h - v$$
$$2v^2 \operatorname{tg}^2\alpha + h^2 - 2hv + v^2 = hv - v^2$$
$$\frac{2v^2}{\cos^2\alpha} - 3hv + h^2 = 0$$

deren Auflösung ergiebt

$$v_{\frac{1}{2}} = {}^1/_4 h \cos\alpha\left[3\cos\alpha \pm \sqrt{1 - (3\sin\alpha)^2}\right].$$

Die Quadratwurzel zeigt, dafs die Aufgabe nur bei solchen geraden Kegeln möglich ist, bei welchen

$$\sin\alpha < {}^1/_3 \qquad \alpha < 19^0\, 28'\, 17''$$

ist. Diese Grenze darf α nicht erreichen, weil in dem Kegel mit diesem Winkel der bis dahin kleinste und gröfste Kegelmantel zu einem Mantel sich vereinigen; da wird, wenn die Schnittebene vom Grundkreise aus durch den Kegel emporsteigt, der Kegelmantel kleiner und fährt sogleich fort (nachdem er an dieser Stelle augenblicklich stehen geblieben ist) kleiner zu werden; so dafs ein unter den Nachbaren kleinster oder gröfster Wert nicht mehr vorhanden ist.

Um aus dem Ergebnis für v das Zeichenverfahren ablesen zu können, ist $^1/_4 h$ wieder in die Klammer und unter die Quadratwurzel zu bringen:

$$v_{\frac{1}{2}} = \left[{}^3/_4 h \cos\alpha \pm \sqrt{({}^1/_4 h)^2 - ({}^3/_4 h \sin\alpha)^2}\right] \cdot \cos\alpha.$$

Dies lehrt: Beschreibt man um den Kegel-Schwerpunkt S mit seinem Abstande vom Grundkreise eine Kugel, so schneidet sie die gegebene Kegelfläche in den Grundkreisen des kleinsten und des gröfsten einbeschriebenen Kegelmantels. Dieselbe Kugelfläche liefert dieses Paar von Schnittkreisen für sämtliche Kegel von der Höhe h, bei welchen die Aufgabe möglich ist.

Figur 179.

b)

$$M = \pi x z = \pi z^2 \sin\varphi$$

$$M = \pi h^2 \sin^2\alpha \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin^2(\alpha + \varphi)}.$$

Die Ansatzgleichung $\dfrac{\sin\varphi}{\sin^2(\alpha+\varphi)} = \dfrac{\sin\varphi_1}{\sin^2(\alpha+\varphi_1)}$, wird wie unter 3b) behandelt; dabei werde die Summe

$$[\sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + \varphi_1)]$$

nicht umgestaltet. Der in der Bestimmungsgleichung

$$\frac{\cos\varphi}{2\sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{\sin^2(\alpha+\varphi)}$$

auf beiden Seiten stehende Faktor $\dfrac{1}{\sin(\alpha+\varphi)}$ kann nie gleich Null sein, er mufs fortgehoben werden

$$\frac{\cos\varphi}{2\cos(\alpha+\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

$$\sin(\alpha+\varphi)\cos\varphi = 2\cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi$$

bringt man von rechts ein $\cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi$ nach links, so zieht sich der Ausdruck zusammen in

$$\sin\alpha = \cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi.$$

Diese Gleichung werde mit 2 multipliziert, um die Formel 20 (in **3**, 5)

$$\sin(u+v) - \sin(u-v) = 2\cos u \sin v$$

anwenden zu können für $u = \alpha + \varphi$ und $v = \varphi$

$$2\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\varphi) - \sin\alpha$$

mithin findet man φ aus

$$\sin(\alpha + 2\varphi) = 3\sin\alpha$$

nicht nur durch Rechnung, sondern auch durch Zeichnung. Zu diesem Zwecke ist die rechte Seite mit einer eine Länge bedeutenden Mafszahl zu multiplizieren und zu dividieren, wozu man die gegebene Höhe h verwenden wird:

$$\sin(\alpha + 2\varphi) = \frac{h \sin\alpha}{{}^1/_3 h}.$$

Man beschreibt um D mit $DF = {}^1/_3 h$ einen Kreis; sein Schnitt P auf AC giebt den Aufsenwinkel $DPE = \alpha + 2\varphi$, mithin ist der innere Winkel

$ADP = 2\varphi$; also geht die Seite DR des gröfsten Kegelmantels durch die Mitte J des Bogens FP. Den andern Wert zum Sinus liefert der andere Schnitt P_1. Es ist der Aufsenwinkel $DP_1Q = \alpha + 2\varphi_1$, also der innere Winkel $ADP_1 = 2\varphi_1$ und die Seite DL des kleinsten Kegelmantels geht durch die Mitte J_1 des Bogens FP_1.

Auch bei dieser Behandlung geht aus dem Schlufswerte die Grenzbedingung hervor

$$\sin\alpha < {}^1/_3.$$

5) **Bei welchen unter den einbeschriebenen geraden Kegeln ist die Oberfläche ein kleinster oder ein gröfster Wert?**

Die Behandlung dieser schwierigen Aufgabe gelingt mit Winkelfunktionen durch Lösen einer Gleichung dritten Grades.

Figur 180.

Die Ansatzgleichung

$$\frac{\sin\varphi + \sin^2\varphi}{\sin^2(\alpha+\varphi)} = \frac{\sin\varphi_1 + \sin^2\varphi_1}{\sin^2(\alpha+\varphi_1)}$$

wird wie die unter $4b$) behandelt und führt zu der Bestimmungsgleichung

$$\frac{\cos\varphi\ (1 + 2\sin\varphi)}{2\sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\varphi)} = \frac{\sin\varphi\ (1+\sin\varphi)}{\sin^2(\alpha+\varphi)}$$

der auf beiden Seiten stehende Faktor $\frac{1}{\sin(\alpha+\varphi)}$ ist fortzuheben, da er nie $= 0$ sein kann:

$$\frac{\cos\varphi\ (1 + 2\sin\varphi)}{2\cos(\alpha+\varphi)} = \frac{\sin\varphi\ (1+\sin\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}.$$

Durch Beseitigen der Nenner ordne man

$$(1 + 2\sin\varphi)\cdot\sin(\alpha+\varphi)\cos\varphi = 2\ (1+\sin\varphi)\cdot\cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi.$$

Es ist die rechts stehende Gröfse $2\ (1+\sin\varphi) = 1 + (1 + 2\sin\varphi)$, so dafs auf beiden Seiten die Klammer $(1+2\sin\varphi)$ steht. Setzt man diese mit ihren Faktoren von rechts nach links und sondert sie ab, so tritt Zusammenziehung ein

$$(1 + 2\sin\varphi)\sin\alpha = \cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi.$$

Jetzt mufs $\cos(\alpha+\varphi)$ aufgelöst werden

$$(1 + 2\sin\varphi)\sin\alpha = \cos\alpha\cos\varphi\sin\varphi - \sin\alpha\sin^2\varphi$$

die letzte Gröfse gehört zu den links stehenden

$$(1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi)\sin\alpha = {}^1/_2\cos\alpha\sin 2\varphi$$

woraus hervorgeht

$$2\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}.$$

Es ist aber $1 + \sin\varphi = 1 + \cos(90^0 - \varphi) = 2\cos^2(45^0 - {}^1/_2\varphi)$ und der Zähler $\sin 2\varphi$ läfst sich auch auf diesen Winkel bringen

$$\sin 2\varphi = \sin(180^0 - 2\varphi) = \sin 4\ (45^0 - {}^1/_2\varphi).$$

Setzt man daher $45^0 - {}^1/_2\varphi = \psi$, so lautet die Bestimmungsgleichung

$$2\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 4\psi}{4\cos^4\psi}.$$

Sie aufzulösen, wird der Zähler zerlegt

$$\sin 4\psi = 2\sin 2\psi \cos 2\psi = 4\sin\psi \cos\psi (\cos^2\psi - \sin^2\psi)$$

also hat man

$$2\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\psi\,(1 - \mathrm{tg}^2\psi)$$

oder in der gesetzmäſsigen Form

$$\mathrm{tg}^3\psi - 3\cdot {}^1/_3 \cdot \mathrm{tg}\,\psi - 2\cdot(-\mathrm{tg}\,\alpha) = 0.$$

Das a der einfachen Gleichung dritten Grades (II in **7**, 15) ist hier positiv, also kann der erste oder der zweite Fall vorliegen (**7**, 17). Wenn aber die Aufgabe möglich ist, so muſs es einen Kegel mit kleinster und einen mit gröſster Oberfläche geben; die Gleichung muſs also zwei reelle Wurzeln haben. Der zweite Fall liefert nur eine reelle Wurzel; also kann die Gleichung nur dem ersten Falle angehören: es muſs sein

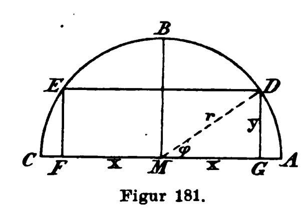
$$({}^1/_3)^3 > \mathrm{tg}^2\alpha, \text{ also } \alpha < 10^0\, 53'\, 36''.$$

Die erste Wurzel der Gleichung ist negativ, würde also für φ einen Winkel über 90^0 liefern; in der erweiterten Kegelfläche ist aber die Oberfläche des einbeschriebenen Kegels fortdauernd im Wachsen begriffen. Daher ist die negative Wurzel für die Aufgabe unbrauchbar.

Wählt man für ein zu berechnendes Beispiel $\alpha = 10^0$, so ergiebt sich: die Oberfläche des einbeschriebenen Kegels erreicht bei $\varphi_1 = 19^0\,20'\,3''$ einen gröſsten Wert, darauf bei $\varphi_2 = 42^0\,59'\,20''$ einen kleinsten Wert und fährt dann fort zu wachsen bis ins Unendliche.

4. 1) **Einem Halbkreise das gröſste Rechteck einzuzeichnen.**

Daſs es ein gröſstes Rechteck geben muſs, ist leicht zu zeigen.



Figur 181.

a) Bildet der nach einem Eckpunkte gehende Halbmesser mit dem Halbkreisdurchmesser den veränderlichen spitzen Winkel φ, so ist der Inhalt des Rechtecks $J = 2r^2 \sin\varphi \cos\varphi = r^2 \sin 2\varphi$. Er ist am gröſsten bei $2\varphi = 90^0$, $\varphi = 45^0$. Das gröſste Rechteck ist aus zwei neben einander stehenden Quadraten zusammengesetzt. Sein Inhalt ist $= r^2$.

b) $J = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$ ergiebt durch

$$x\sqrt{r^2 - x^2} = x_1\sqrt{r^2 - x_1^2}$$

$$x_1^4 - x^4 = r^2(x_1^2 - x^2)$$

$$x_1^2 + x^2 = r^2, \quad \text{also} \quad x = r\sqrt{{}^1/_2} = y.$$

2) **Welches unter den einem Halbkreise einzubeschreibenden Rechtecken hat den gröſsten Umfang?**

Läſst man DE von AC an aufrücken, so beginnt der Umfang mit $4r$. Unmittelbar über AC ist DE kaum kleiner, die entstandenen Nebenseiten bringen mehr, als von AC geschwunden ist; der Umfang nimmt also zu und geht, wenn DE sich dem höchsten Punkte B nähert auf den Schluſswert $2r$ hinab. Also muſs ein Rechteck mit gröſstem Umfange vorhanden sein.

a) $$2s = 4x + 2y = 2r(2\cos\varphi + \sin\varphi)$$

liefert durch $$2\cos\varphi + \sin\varphi = 2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1$$

und $$\sin\varphi - \sin\varphi_1 = 2(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)$$

für den gesuchten Winkel $$\mathrm{ctg}\,\varphi = 2.$$

Auf der in B berührenden Geraden trägt man von B aus $2r$ ab und verbindet den Endpunkt mit M; der Schnittpunkt des Kreises ist der Eckpunkt des gesuchten Rechtecks, welches aus vier neben einander stehenden Quadraten sich zusammensetzt.

b) $$s = 2x + y = 2x + \sqrt{r^2 - x^2} = 2x_1 + \sqrt{r^2 - x_1^2}$$
wird behandelt, wie 1, 2b, und es ergiebt sich
$$x = 2r\sqrt{1/5}, \qquad y = r\sqrt{1/5}$$
also ist aus $x = 2y$ die Gestalt des Rechtecks ersichtlich; und hiernach wird auch das Einzeichnen ausgeführt, wie unter a) angegeben ist. Der gröfste Umfang ist $2r\sqrt{5} = 4{,}472\,r$. Er mufste dem Ausgangswerte nahe stehen, weil der Umfang nachher schnell auf $2r$ hinabgeht.

3) **Bei welchem Rechtecke ist die Summe von Grundseite und den beiden Nebenseiten am gröfsten?**

Antwort: Beim Rechtecke vom gröfsten Inhalte. Die gröfste zweimal rechtwinklig gebrochene Linie ist $2r\sqrt{2}$, gleich der Eckenlinie des dem ganzen Kreise umbeschriebenen Quadrats.

Die Figur drehe sich um den auf dem Durchmesser senkrechten Halbmesser MB.

4) **In eine Halbkugel die gröfste gerade Walze zu beschreiben.**

Hier stimmen beide Behandlungsweisen überein. Es ergiebt sich $y^2 = {}^1/_3\,r^2$, $x^2 = {}^2/_3\,r^2 = 2y^2$. Ein Rechteck schönster Form, welches um die kleinere Seite sich ganz herumdreht, liefert die gröfste Walze. Hiernach wird die Zeichnung von der Berührungslinie in B aus hergestellt.

5) **Aus welchem Rechtecke entsteht die Walze mit gröfstem Mantel?**

Der Ansatz zeigt sofort, dafs es das Rechteck mit gröfstem Inhalte ist.

6) **Welche der einbeschriebenen Walzen hat die gröfste Oberfläche?**

Die Oberfläche beginnt mit $2\pi r^2$, nimmt zu und schliefst mit Null.

a) $$F = (2\cos^2\varphi + \sin 2\varphi)\,\pi r^2 = (1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\,\pi r^2$$
$$F = [1 + 2\sin 45^0 \cos(45^0 - 2\varphi)]\,\pi r^2$$
ist am gröfsten bei $2\varphi = 45^0$, $\varphi = 22^1/_2{}^0$; wonach das Rechteck gezeichnet wird. Die gröfste Oberfläche ist $= (1 + \sqrt{2})\,\pi r^2 = 2{,}414\,\pi r^2$.

b) $F = 2\pi x\,(x + y)$ giebt die Ansatzgleichung
$$x\,(x + y) = x_1\,(x_1 + y_1)$$
von dieser werde abgezogen die Selbstgleichung
$$\frac{x_1\,(x + y) = x_1\,(x + y)}{(x - x_1)\,(x + y) = x_1\,(x_1 - x + y_1 - y).}$$
Da aus $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und $y_1 = \sqrt{r^2 - x_1^2}$ die Wurzelzeichen zu entfernen sind, um x und x_1 zusammentreten zu lassen, so ist zu setzen
$$y_1 - y = \frac{y_1^2 - y^2}{y_1 + y} = \frac{x^2 - x_1^2}{y_1 + y}$$
und darum auch in der letzten Klammer die Ordnung: erst x, dann x_1, herzustellen:
$$(x - x_1)\,(x + y) = x_1\left[\frac{x^2 - x_1^2}{y_1 + y} - (x - x_1)\right]$$

aus welcher Gleichung $(x - x_1)$ herausfällt, weil dieser Unterschied nicht gleich Null sein sollte:

$$x + y = x_1 \left[\frac{x + x_1}{y_1 + y} - 1\right]$$

Dies wird für $x_1 = x$ die Bestimmungsgleichung

$$x + y = x\left[\frac{x}{y} - 1\right] \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} - 1.$$

Es sei das Verhältnis $\frac{y}{x} = v$; aus $v + 2 = \frac{1}{v}$ ergiebt sich nur

$$v = -1 + \sqrt{2}$$

da das Verhältnis der Seiten nicht negativ sein kann. [Andere Behandlung ist darum mangelhaft, weil nicht zu entscheiden ist, welches Vorzeichen bei der Quadratwurzel Gültigkeit hat. Erst am Ende, beim Ausdrucke für die Oberfläche, müfste man den kleineren Wert verwerfen.]

Um die Feststellung des Verhältnisses zu verwerten, wird $x^2 + y^2 = r^2$ durch x^2 dividiert, $1 + v^2 = \frac{r^2}{x^2}$ und $v^2 = 1 - 2v$ eingesetzt

$$2 - 2v = 2(1 - v) = 2(2 - \sqrt{2}) = \frac{r^2}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2(2 - \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 \cdot 2} r^2, \quad x = \tfrac{1}{2} r \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$y^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}(2 + \sqrt{2})\, r^2 = \tfrac{1}{4}(2 - \sqrt{2})\, r^2, \quad y = \tfrac{1}{2} r \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Auch die Zeichnung des Rechtecks wird nach v ausgeführt

$$v = \frac{\sqrt{2r^2} - r}{r} = \frac{y}{x}$$

an der Berührungslinie in A, auf der man unten erst r abträgt. Es ist das Verhältnis der halben Seite des umbeschriebenen regelmäfsigen Achtecks zum Halbmesser.

7) Zum Mantel werde noch der Grundkreis genommen, so dafs die Begrenzung eines Bechers entsteht.

Welches Rechteck liefert die gröfste Becherfläche?

a) $B = (\cos^2\varphi + \sin 2\varphi)\, \pi r^2 = [\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) + \sin 2\varphi]\, \pi r^2.$

Die Ansatzgleichung liefert aus

$$\tfrac{1}{2}(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_1) = \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi$$
$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2$$

wonach die Zeichnung hergestellt wird. Dann geben $\sin^2 2\varphi = \tfrac{4}{5}$ und $\cos^2 2\varphi = \tfrac{1}{5}$ die gröfste Becherfläche $= \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\, \pi r^2 = 1{,}618\, \pi r^2$.

b) Bei der andern Behandlung wird ganz wie bei 6*b*) verfahren. Hier wird das Seitenverhältnis $y : x = v = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, also das der Seite des einbeschriebenen regelmäfsigen Zehnecks zum Halbmesser.

Es ergiebt sich

$$x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)} \quad \text{und} \quad y = r\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)}.$$

Auch hieraus erhält man die gröfste Becherfläche $= \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\, \pi r^2$.

5. Übungen.

Die Regeln, welche bei Behandlung solcher Aufgaben in Anwendung treten, waren:

1. **Der Unterschied zweier Quadratwurzeln wird mit der Summe der Wurzeln multipliziert und dividiert.** [1, 2*b*).]

2. **Von einer Gleichung zweier Produkte wird eine Selbstgleichung abgezogen, bei welcher die Veränderliche in dem einen Faktor die Marke erhält.** [1, 6*b*).]

3. **Sind zwei Brüche gleich, so ist der Bruch aus dem Unterschiede der Zähler und dem der Nenner gleich jedem der Brüche.** [2, 4*b*).]

Man beachte sorgsam diese Regeln, um die Aufgaben geschickt zu entwickeln.

A. Aufgaben für Bestimmung durch Linien.

1) Martus, Aufgaben, 653, 661, 647—649, 651 *a* und *b*, 655—657, 660, 663, 664, 644, 645.

2) *a*) Welcher unter den auf quadratischer Grundfläche stehenden Quadern, die alle die Ecklinie e haben, besitzt den gröfsten Inhalt? *b*) Welcher hat den gröfsten Mantel? *c*) Welcher hat die gröfste Oberfläche? [Bei *c*) ist die zweite Wurzel mittels der Bestimmungsgleichung abzuweisen.]

3) In den verlängerten Mittellinien eines Quadrats sollen die Eckenlinien umbeschriebener gleichseitiger Vierecke liegen. *a*) Welches derselben hat den kleinsten Inhalt? *b*) welches besitzt den kleinsten Umfang?

4) *a*) In eine Kugel den gröfsten Kegel zu beschreiben. — Denkt man zuerst die Grundfläche, so ist offenbar, dafs es ein gerader Kegel werden mufs. Man bezeichne seine Höhe mit x. — Ergebnis: Es ist der Kegel, dessen Schwerpunkt in den der Kugel fällt. — *b*) In eine Kugel denjenigen geraden Kegel zu beschreiben, welcher den gröfsten Mantel besitzt; *c*) denjenigen mit gröfster Oberfläche.

5) *a*) Um eine Kugel den kleinsten geraden Kegel zu beschreiben. *b*) Welcher von diesen Kegeln hat die kleinste Oberfläche, *c*) welcher hat den kleinsten Mantel?

6) *a*) Welches ist das gröfste Dreieck im Kreise? *b*) Welches hat den gröfsten Umfang?

7) *a*) Welches ist das gröfste unter den einem Halbkreise einzubeschreibenden Trapezen, deren Grundseite der Durchmesser ist? (Zum Nachweise der Möglichkeit beginne man die Betrachtung beim höchsten Punkte des Halbkreises.) *b*) Welches hat den gröfsten Umfang?

8) Man hat eine lange Strecke $n$mal gemessen, und die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n$ erhalten. Es soll derjenige Zahlenwert x ermittelt werden, für welchen die Summe der Quadrate aller Abweichungen jener Zahlen von ihm am kleinsten ist, und der deshalb als das der Wahrheit am nächsten kommende Ergebnis der Messung zu nehmen ist.

Ergebnis. $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$. Der Mittelwert ist also die verlangte Zahl. Sie ist es, für welche die absolute Summe aller negativen Abweichungen ebenso grofs, wie die positiven, ist. Diese Zahl wird also der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man voraussetzen darf, dafs unveränderliche Fehler ausgeschlossen

sind. Um die Zuverlässigkeit des Ergebnisses in der Angabe erkennen zu lassen, setzt man den „wahrscheinlichen Fehler“ dahinter. Die Abweichung einer Messung vom Mittelwerte x wird als ihr „Fehler“ genommen, z. B. $x - a_1 = f_1$. Die in der Aufgabe behandelte Summe war die der „Fehlerquadrate“. Ist w^2 deren durchschnittliche Gröfse, also $w^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2}{n}$, welche Summe man mit $[f^2]$ bezeichnet, so ist der wahrscheinliche Fehler $w = \pm \sqrt{\frac{[f^2]}{n}}$ und die vollständige Angabe des Messungsergebnisses: Länge der Strecke $= x \pm w$. [Vergl. **6**, 2, 1) unten.]

9) Von welchem Punkte einer Dreiecksseite aus mufs man die den beiden andern gleichlaufenden Geraden bis zu ihnen ziehen, damit bei Umdrehung des Dreiecks um diese Seite die erhaltene Raute den von ihr beschriebenen Körper am gröfsten liefere? [Die Oberfläche des Umdrehungskörpers hat keinen gröfsten Wert; sie nimmt entweder fortwährend zu oder ab.]

10) Ein auf unbegrenzter Ebene stehender Würfel soll von geraden Kegelmänteln so überdeckt werden, dafs die frei über der Grundebene stehenden Eckpunkte in ihnen liegen. Welcher unter diesen Kegeln hat den kleinsten Inhalt?

11) Welches unter den um den Kreis vom Halbmesser r zu beschreibenden gleichschenkligen Dreiecken hat die kleinsten Sckenkel? — Man erteile die Antwort durch den Abstand der Spitze vom Kreise.

12) Oberhalb einer Ebene befindet sich im Abstande a der Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser r. Wie hoch über der Ebene ist in der Verlängerung von a die Spitze eines die Kugel umhüllenden und auf der Ebene stehenden Kegels anzunehmen, wenn sein Inhalt so klein wie möglich werden soll? Wie vereinfacht sich das Ergebnis, wenn die Kugel auf der Grundebene ruht?

13) Unter allen geraden Walzen, deren Inhalt gleich der Kugel vom Halbmesser r ist, die Gestalt derjenigen zu ermitteln, welche die kleinste Oberfläche hat.

14) Unter allen geraden Kegeln, die so grofs sind wie die Kugel vom Halbmesser r, den mit kleinster Oberfläche zu bestimmen. Wievielmal so grofs als der Grundkreishalbmesser ist seine Seite?

Ergebnis. Er hat die Gestalt des Kegels, welcher einem regelmäfsigen Vierflächner einbeschrieben ist.

15) M., Aufgaben, 651*b*, 652, 668*a*; 646, 674; 667*A*, 661*A*, 659*A*; 672; 662.

16) Ein leuchtender Punkt hat den Abstand a vom Kugelmittelpunkte. Wie grofs mufs der Kugelhalbmesser x sein, *a*) damit der erleuchtete Teil der Kugelfläche möglichst grofs ist? *b*) damit der Mantel des die Kugel treffenden Lichtkegels so grofs wie möglich sei; *c*) damit der Lichtkörper am gröfsten sei. (Man nehme diesen als Rest von Doppelkegel und Ausschnitt.) *d*) Bei welchem Kugelhalbmesser hat der Lichtkörper die gröfste Oberfläche?

Ergebnis bei *d*): $x = {}^2/_9 a + \sqrt{({}^2/_9\, a)^2 + ({}^1/_3\, a)^2} = {}^1/_9(2 + \sqrt{13})\, a = 0{,}623\, a$. (Die gröfste Oberfläche hat keinen einfachen Ausdruck.)

17) Schneidet man auf jeder der drei in einer Ecke zusammenstofsenden Würfelkanten vom Eckpunkte aus eine Strecke x ab und verbindet die Endpunkte, so werden die mittleren Drittel der drei Verbindungslinien drei Seiten eines regelmäfsigen Sechsecks. Verfährt man von der Gegenecke aus mit derselben Strecke ebenso, so hat man Grund- und Deckfläche eines dem Würfel einbeschriebenen Prismas. *a*) Welches

von den so zu erhaltenden geraden Prismen hat den gröfsten Inhalt? und *b*) welches besitzt den gröfsten Mantel?

Ergebnis. Die Achse des Prismas ist von der Eckenlinie des Würfels bei *a*) das mittlere Drittel, bei *b*) das zweite und dritte Viertel. [Beim Prisma mit gröfster Oberfläche kommt kein einfaches Ergebnis.]

Da die Gleichung der Ellipse durch **13**, 10, 3) bekannt ist, können folgende leichte Aufgaben behandelt werden:

18) Einer Ellipse einzuzeichnen *a*) das Rechteck mit gröfstem Inhalte, *b*) das mit gröfstem Umfange. Für das Ergebnis bei *a*) zeichne man das Rechteck, welches die in den Scheiteln berührenden Geraden einschliefsen. Bei *b*) erhält man die halben Rechtecksseiten x und y, indem man vom Mittelpunkte die Senkrechte auf eine zwei Scheitel verbindende Sehne fällt. Also ist der gröfste Umfang gleich dem des gleichseitigen Vierecks, dessen Eckenlinien die Achsen sind. Was wird aus den Ergebnissen beim Kreise?

19) *a*) Einer Ellipse des gröfste Sechseck einzuzeichnen, welches die grofse Achse als Eckenlinie und zwei Seiten ihr gleichlaufend hat. Wie lang werden bei ihm diese beiden Hauptseiten? *b*) Wie lang werden die vier an die grofse Achse stofsenden Nebenseiten in demjenigen unter diesen Sechsecken, welches den gröfsten Umfang hat? Was müssen beide Fragen für den Kreis ergeben?

20) Eine Ellipse, in welcher die kleine Achse kleiner ist als der Abstand der Brennpunkte, hat sich um die kleine Achse gedreht. Wie grofs ist unter den um den Mittelpunkt zu beschreibenden Kugelflächen der Halbmesser derjenigen, welche innerhalb des Ellipsoides die gröfste Zone besitzt. — (Ihr Halbmesser bleibt unabhängig von b.)

21) *a*) In eine Ellipse das gröfste gleichschenklige Dreieck zu beschreiben, welches seine Spitze im linken Scheitel der grofsen Achse hat. *b*) Welches von diesen Dreiecken beschreibt bei Umdrehung der Figur um die grofse Achse den gröfsten Kegel? [In der Lage des Schwerpunktes stimmen beide Ergebnisse überein.] *c*) Welcher vor diesen Kegeln besitzt den gröfsten Mantel? [Für *c*) gelingt die Lösung der Aufgabe, wenn man von $yz = y_1 z_1$ abzieht $y_1 z = y_1 z$ und wie in Nr. 3, 3 *a*) verfährt, dann bei der Bestimmungsgleichung zunächst nur für z^2 den Ausdruck einsetzt; dabei hebt sich ein Paar von Gliedern heraus, und man kann, nachdem nun auch der Ausdruck für y^2 eingesetzt ist, die unbrauchbare Wurzel $(a + x)^2$ beseitigen.] (Beim gröfsten Umfang des Dreiecks kommt kein einfaches Ergebnis.)

B. Aufgaben für Bestimmung durch Winkelfunktionen.

22) Einen Winkel α in einen Kreis als Winkel am Umfange so hineinzulegen, dafs die Summe der von den Schenkeln abgeschnittenen Sehnen möglichst grofs ist. — Bei dem um seinen Scheitel sich drehenden Winkel braucht die Untersuchung erst zu beginnen, wenn ein Schenkel wieder kleiner wird.

23) Unter den in einen Kreis zu beschreibenden gleichschenkligen Dreiecken das mit gröfstem Umfange durch Winkelfunktionen zu bestimmen.

24) M., Aufgaben 665, 674 A und B.

25) An welchen Stellen des Bogens liegen die Eckpunkte des gröfsten unter den Rechtecken, welche einem gegebenen Kreisausschnitte so einbeschrieben werden können, dafs zwei Seiten der Halbierungslinie seines Winkels am Mittelpunkte, 2α,

gleich laufen? — Man zerlege das doppelte Produkt der beiden Sinus in den Unterschied zweier Kosinus. — Die Bestimmung des Rechtecks mit gröfstem Umfange führt zu keinem einfachen Ergebnis. Schreibt man die Bestimmungsgleichung um in

$$\frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\varphi}{\sin 30^0}$$

und wendet den Satz von gleichen Brüchen an (in **3**, 10, 7), so erhält man einen wenigstens gut logarithmischen Ausdruck.

26) Dazu M., Aufgabe 650 A.

27) Auf welche Stelle eines Viertelkreises mufs man den Halbierungspunkt eines von demselben Kreise genommenen Bogens, dessen Winkel am Mittelpunkte, 2β, viel kleiner als 90^0 ist, bringen, damit, wenn der Viertelkreis um den einen Grenzhalbmesser sich dreht, die auf dem andern liegende Ablotung des Bogens einen Kreisring beschreibe, dessen Inhalt möglichst grofs ist? — Der Inhaltsausdruck ist gehörig zusammenzuziehen; sonst kommt man auf eine Bestimmungsgleichung zwischen zwei Sinus, deren Deutung verständiger Überlegung bedarf.

28) Unter den Vierecken, die einen gegebenen Winkel 2α haben und nicht nur einem gegebenen Kreise umbeschrieben sind, sondern auch die Bedingung erfüllen, dafs sich um jedes ein Kreis beschreiben lasse, diejenigen zu bestimmen, deren Inhalt einen kleinsten oder einen gröfsten Wert hat. — Die zweite Bedingung fordert weiter nichts, als dafs der Gegenwinkel des gegebenen $180^0 - 2\alpha$ sei. Man lasse diesen am Kreise ringsherum laufen.

29) Unter allen Vierecken, welche zwei gegebene Winkel, 2α und 2β, besitzen, und einem gegebenen Kreise so umbeschrieben sind, dafs dieser ganz innerhalb liegt, das kleinste zu finden. (Der Winkel 2β kann auf 2α folgen, oder ihm gegenüber liegen.)

30) Unter den Vierecken, welche einen gegebenen Winkel 2α und einen gegebenen Umfang $2s$ haben und der Bedingung genügen, dafs sowohl in als um jedes derselben Kreise beschrieben werden können, das gröfste zu finden. Man bezeichne den Halbmesser des Kreises, welcher solchem Vierecke ein- oder anbeschrieben werden kann, mit x. [S. die Bemerkung zu 28).]

31) Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel 2α und einen gegebenen Flächeninhalt f^2 haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat. — Man bezeichne die beiden andern Winkel solches Dreiecks mit 2φ und 2ψ, denke an die Formel **3**, 11, 16, 2) und lese aus der Bestimmungsgleichung Zutreffendes ab. Das gesuchte Dreieck ist aus dem mittels der Strecke f gezeichneten herzustellen mit Beachtung des Satzes 1. T., **21**, 9.

32) Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel 2α und denselben Umfang $2s$ haben, dasjenige zu finden, welches den gröfsten Inhalt besitzt.

33) Unter allen geraden Kegeln von der Seite s denjenigen zu bestimmen, welchem die gröfste Kugel einbeschrieben werden kann. Die Entwicklung mit Winkelfunktionen ist die bessere.

Ergebnis. Der Grundkreishalbmesser ist der gröfsere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitte geteilten Seite s.

34) M., Aufgaben, 667 α und β; 659, 659 B; 668 b.

35) Die Eckpunkte A und B eines gegebenen Dreiecks ABC bewegen sich auf zwei in O sich rechtwinklig schneidenden Geraden. Welchen Winkel mufs AB mit AO bilden, damit die Entfernung der Dreiecksspitze C von O so grofs oder so klein wie möglich sei? Beispiele: 1) $\alpha = \beta$, 2) $\alpha = 30^0$, $\beta = 15^0$, 3) $\gamma = 90^0$. —



Dafs es eine gröfste und eine kleinste Entfernung OC giebt, ist für ein gleichseitiges Dreieck ABC über der Seite c leicht nachzuweisen. Den Winkel φ_1 für die gröfste und $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^0$ für die kleinste Entfernung erhält man aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Die beiden ausgezeichneten Lagen des Dreiecks ABC sind für das zweite Beispiel in einer Figur mit noch ein paar anderen Standorten bequem darzustellen.

---

3. Abschnitt.

Figuren auf krummen Flächen.

18. Glied. Figuren auf der Kugelfläche.

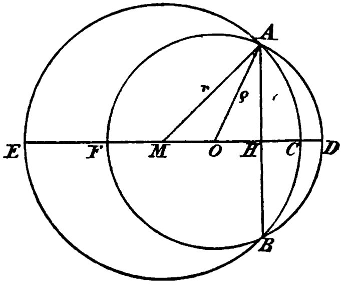
1. Einleitung. Lehrsätze. 1) Durch die Endpunkte eines Kugeldurchmessers lassen sich unzählig viele Hauptkreise legen, aber kein Nebenkreis. (**15**, 7, 1.)

2) Durch zwei Punkte der Kugelfläche, welche nicht Endpunkte eines Kugeldurchmessers sind, läfst sich nur ein einziger Hauptkreis legen, aber unzählig viele Nebenkreise.

3) Die beiden Bogen, in welche dieser Hauptkreis durch die gegebenen Punkte zerlegt wird, sind von ungleicher Gröfse, weil die zugehörige Sehne kein Durchmesser ist.

4) **Der kleinste und der gröfste unter den Schnittkreisbogen, welche zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Kugelfläche laufen, gehören dem Hauptkreise an.**

Bw. Man drehe die Ebene irgend eines Nebenkreises um die gemeinsame Sehne AB bis in die Ebene des Hauptkreises, und zwar so, dafs sein Mittelpunkt O mit dem Kugelmittelpunkte M auf dieselbe Seite der Sehne AB kommt. Dabei fällt die Mittelsenkrechte HO in HM und es tritt O, weil $\varrho < r$ ist, zwischen den Lotfufspunkt H und M. $MO + \varrho > r$ giebt $MD > MC$. Der Bogen ACB des Hauptkreises wird also vom Bogen ADB des Nebenkreises umschlossen, ist also der kleinere. Zieht man



Figur 182.

$$ACB < ADB$$

von Hauptkreis > Nebenkreis

ab, so bleibt
$$AEB > AFB.$$

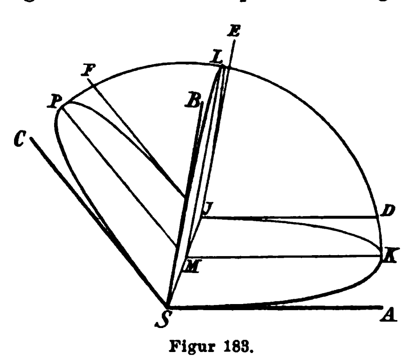
Da der Nebenkreis ein beliebiger war, so gilt das Ergebnis für alle: der Bogen ACB des Hauptkreises ist der kleinste, und AEB der gröfste von allen zwischen A und B auf der Kugelfläche laufenden Bogen.

2. Der kleinere Hauptkreisbogen entspricht in seiner Eigenschaft, auf der Kugelfläche der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten zu sein,

der geraden Linie in der Ebene. Sollen daher auf der Kugelfläche Figuren gebildet werden, welche denen in der Ebene entsprechen, so müssen Bogen von Hauptkreisen statt der geraden Linien eintreten.

Die zwischen drei beliebigen Punkten laufenden Hauptkreisbogen begrenzen ein Stück der Kugelfläche, welches ein Kugeldreieck genannt wird. (Die drei Punkte der Kugelfläche dürfen nicht auf demselben Hauptkreise liegen, auch nicht zwei die Endpunkte eines Kugeldurchmessers sein, wenn ein Kugeldreieck entstehen soll.) Ebenso zeichnet man auf der Kugelfläche Kugelvierecke und Kugelvielecke. Die auf der Kugelfläche gewählten Punkte sind die Eckpunkte, die sie verbindenden Hauptkreisbogen die Seiten des Kugelvielecks.

3. Die die Endpunkte eines Kugeldurchmessers verbindenden Hälften irgend zweier Hauptkreise begrenzen ein Stück der Kugelfläche, welches nur zwei Ecken hat, also ein Kugelzweieck ist. In Figur 183 laufen auf der Kugelfläche um *M* von dem einen Endpunkte des Durchmessers *SJ* zum andern die Halbkreise *SKJ* und *SPJ*; sie begrenzen das Zweieck *SKJPS*. Die Richtung, in welcher der Kreisbogen *SK* aus *S* abläuft, wird durch die Berührungslinie *SA* fortgesetzt; die Berührungslinie *SC* zeigt die Richtung, welche der Kreisbogen *SP* bei seinem Ablaufen aus *S* einschlug; es stellt der Winkel *ASC* mit seinen verlängerten Schenkeln deutlich vor Augen den Winkel, welchen die Bogen *SK* und *SP* am Scheitelpunkte *S* bilden, und der Scheitelwinkel von *DJF* giebt den Winkel an, unter welchem die Kreisbogen *KJ* und *PJ* im Punkte *J* zusammengetroffen sind. Die Winkel *ASC* und *DJF* sind als Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln gleich. Die beiden Winkel eines Zweiecks sind gleich. Sie sind Neigungswinkel des Flächenwinkels, welchen die Ebenen der Halbkreise *SKJ* und *SPJ* einschliefsen. Ihre Gröfse wird auch von dem Neigungswinkel *KMP* angegeben, dessen Schenkel die nach den Halbierungspunkten *K* und *P* der Halbkreise gehenden Kugelhalbmesser bilden.



Figur 183.

4. Ls. Zweiecke derselben Kugel verhalten sich wie ihre Winkel.

Bw. Die Figur 183 zeigt noch ein anderes Zweieck, *SKJLS*, dessen Winkel bei *S* *ASB* ist. Sein Flächeninhalt giebt mit dem des zuerst besprochenen grofsen Zweiecks einen ebenso grofsen Bruchwert, wie $\angle$ *ASB* und *ASC*. Dies ist sogleich zu ersehen, wenn man diese Figur mit Figur 89 in **9**, 4 vergleicht. Figur 183 ist die dortige Figur, in welcher nur um die Kante *SJ* als Durchmesser eine Kugel beschrieben wurde. Denkt man sich diese Kugel in Figur 89, so erkennt man, dafs die Zwischenebenen die beiden Zweiecke in schmale Zweiecke zerlegen, welche wegen Gleichheit ihrer Winkel α deckbar sind. Daher pafst der dort für die Flächenwinkel geführte Beweis auch für die Zweiecke, mögen die Winkel *ASB* und *ASC* ein

gemeinsames Mafs haben, oder nicht, wie aus dem Beweise bei Figur 90 ebenso hervorgeht.

5. Der Flächeninhalt eines Zweiecks mit dem Winkel α ist

20. $$Z = \frac{\alpha^0}{90^0}\pi r^2.$$

Bw. Man denke sich zum gegebenen Zweiecke $SKJLS$ ein zweites, welches dadurch entsteht, dafs man in SJ auf der Ebene SKJ eine Ebene senkrecht stellt. Diese halbiert die Halbkugelfläche über dem zu SKJ gehörenden ganzen Kreise. Das zweite Zweieck ist also der vierte Teil der Kugelfläche; sein Inhalt ist πr^2. (Formel 14 in **15,** 15, 1.) Mithin hat man nach Nr. 4

$$\frac{Z}{\pi r^2} = \frac{\alpha^0}{90^0} \qquad \text{also} \qquad Z = \frac{\alpha^0}{90^0}\pi r^2.$$

6. Die Ebenen derjenigen Hauptkreisbogen, welche Seiten eines Kugeldreiecks sind, bilden am Kugelmittelpunkte eine dreiseitige Ecke, welche durch ihre Seitenwinkel und Flächenwinkel Aufschlufs giebt über Seiten und Winkel des Kugeldreiecks. Durch die Sätze über die dreiseitige Ecke (**10,** 5 bis 9) hat man sogleich folgende Sätze über Kugeldreiecke:

1) Gleichen Seiten eines Kugeldreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber. Ein gleichseitiges Kugeldreieck hat auch die drei Winkel gleich.

2) Gleichen Winkeln eines Kugeldreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. Ein Kugeldreieck mit drei gleichen Winkeln ist gleichseitig.

3) Die gröfsere von zwei Seiten eines Kugeldreiecks hat den gröfseren Gegenwinkel. Der gröfsten Seite eines Kugeldreiecks liegt der gröfste Winkel gegenüber.

4) Der gröfsere von zwei Winkeln eines Kugeldreiecks hat die gröfsere Gegenseite. Dem gröfsten Winkel eines Kugeldreiecks liegt die gröfste Seite desselben gegenüber.

5) In einem Kugeldreieck (in welchem jede Seite kleiner als 180^0 ist) ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte, und der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

6) Der Umfang eines Kugeldreiecks (in welchem jede Seite kleiner als 180^0 ist) ist kleiner als ein Hauptkreis.

Anmerkung. Ergänzt man eine Seite eines Kugeldreiecks zu einem Hauptkreise und nimmt das gegebene Dreieck von der Halbkugel fort, so bleibt ein Kugeldreieck, welches in den beiden letzten Sätzen ausgeschlossen wurde. Derartige Dreiecke sollen auch im Folgenden aufser Betracht bleiben. Denn die Stücke solches Dreiecks werden durch die des erstgedachten Dreiecks bekannt.

7. Polardreiecke. 1) Denkt man in Figur 108 in **10,** 11 vom Punkte O aus die den Kanten der Ecke P gleichgerichteten Geraden gezogen, so hat die durch die drei Linien als Kanten bestimmte neue Ecke die Seitenwinkel entsprechend gleich denen der Ecke P, stimmt also mit dieser in allen Stücken überein. (**10,** 16, 3.) Beschreibt man nun um O eine Kugel, so schneiden aus deren Fläche die Seitenebenen der neuen Ecke ein Kugeldreieck heraus, welches zu dem Kugeldreieck ABC der alten Ecke O die

Beziehungen erhält, welche in **10**, 12 und 13 von den Polarecken angegeben sind; nämlich: da jede zum Kugelhalbmesser gewordene Kante der einen Ecke senkrecht steht auf der Hauptkreisebene der Gegenseite der andern Ecke, so sind die Eckpunkte des einen Dreiecks Pole zu den Seiten des andern. Deshalb heifsen zwei so zusammengehörige Kugeldreiecke Polardreiecke.

2) Für die Polardreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ lauten die in **10**, 13 abgeleiteten Gleichungen (mit 180° statt dort 2 R)

$$a + \alpha_1 = 180^0 \qquad \text{und} \qquad a_1 + \alpha = 180^0$$

und ebenso für b, β und c, γ. Daher der wichtige Lehrsatz:

In Polardreiecken ergänzt jeder Winkel des einen Dreiecks die gegenüberliegende Seite des andern Dreiecks zu 180°.

8. Der Lehrsatz **10**, 14 ergiebt

Die Summe der Winkel eines Kugeldreiecks beträgt mehr als 180° und weniger als dreimal 180°.

Durch zwei Winkel eines Kugeldreiecks ist der dritte noch nicht bestimmt; weil die Summe der drei Winkel keine feste Zahl, wie beim ebenen Dreiecke, ist.

Man denke den wagerecht liegenden Hauptkreis einer Kugel, teile diesen in 3 ziemlich gleiche Teile, nehme nur wenig über jedem Teilpunkte auf der Kugelfläche einen Punkt an und lege vom Kugelmittelpunkte aus durch je zwei der gewählten Punkte A, B und C eine Ebene; dann entsteht ein Kugeldreieck ABC, dessen Seiten sich nur sehr schwach aufbiegen über dem ersten Hauptkreise, so dafs jeder der drei Winkel dieses Kugeldreiecks nahe an 180° ist. Erst wenn die Eckpunkte A, B und C ganz in die Teilpunkte des Hauptkreises zurücktreten, geht die Winkelsumme in dreimal 180° über; dann ist aber das Kugeldreieck zur Halbkugel geworden, also kein Dreieck mehr. Man sieht: in einem Kugeldreiecke kann die Winkelsumme bis an dreimal 180° steigen.

9. Die 6 Deckbarkeitssätze. Aus **10**, 17 geht hervor:

Kugeldreiecke (auf derselben Kugelfläche) **sind übereinstimmend oder rückwärts stimmend,** wenn sie entsprechend gleich haben

1) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel,

2) zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel,

3) die drei Seiten,

4) die drei Winkel,

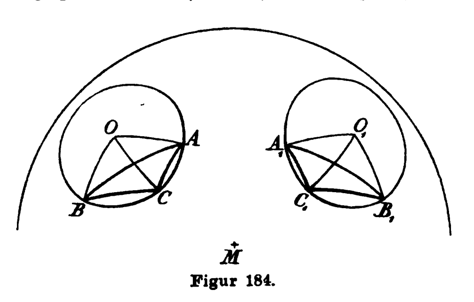
5) zwei Seiten, einen gegenüberliegenden Winkel und wenn die andern gegenüberliegenden Winkel nicht zusammen 180° betragen,

6) zwei Winkel, eine gegenüberliegende Seite und wenn die andern gegenüberliegenden Seiten nicht zusammen 180° betragen.

10. Ls. **Rückwärts stimmende Kugeldreiecke** (auf derselben Kugelfläche) **haben gleichen Flächeninhalt.**

Bw. (Figur 184.) Man lege durch die drei Eckpunkte jedes der beiden Dreiecke eine Ebene. Die auf der Kugelfläche entstehenden Schnittkreise

sind gleich, weil sie die umbeschriebenen Kreise sind von den deckbaren Sehnendreiecken ABC und $A_1B_1C_1$. Fällt man vom Kugelmittelpunkte M auf beide Schnittkreise die Senkrechten, so treffen sie deren Mittelpunkte Q und Q_1 (welche in der Figur nicht angegeben sind) und, verlängert, die Kugelfläche in O und O_1. Aus Übereinstimmung der 6 Dreiecke AQM, BQM, ... C_1Q_1M folgt die Gleichheit der Winkel AMO, BMO, ... C_1MO_1 und daraus, daſs Bogen $OA = OB = OC = O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1$ ist. Die gleichschenkligen Kugeldreiecke OAB und $O_1A_1B_1$ sind also wegen Gleichheit der entsprechenden drei Seiten deckbar, und ebenfalls die beiden andern Paare von Kugeldreiecken. Zieht man von der Summe dieser beiden Dreiecke $\triangle\ OAB = O_1A_1B_1$ ab, so bleibt $\triangle\ ABC = A_1B_1C_1$.

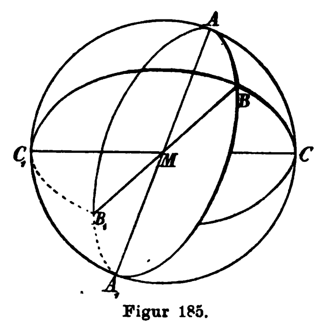


Figur 184.

11. In Figur 184 sind OA, OB, OC die zur Kugelfläche passend gebogenen Halbmesser des um das Kugeldreieck ABC beschriebenen Kreises. Wie auf der Ebene mit geradlinigen Halbmessern, kann man auf der Kugelfläche mit Bogenhalbmessern verfahren, um die Winkel eines Kugeldreiecks zu halbieren oder auf seinen Seiten die Mittelsenkrechten zu erhalten. Mit Anwendung der Sätze über rückwärts stimmende Kugeldreiecke (Nr. 9) werden die für ebene Dreiecke geführten Beweise ebenso bei den Sätzen: die Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkte, die Mittelsenkrechten ebenfalls. Also hat auch ein Kugeldreieck einen einbeschriebenen Kreis und drei anbeschriebene Kreise; der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises. Vergl. die Sätze von dreiseitigen Ecken **10**, 18, 8) und 9).

12. Ls. Vervollständigt man die drei Seiten eines Kugeldreiecks zu ganzen Hauptkreisen, so wird die Kugelfläche durch sie in 8 Kugeldreiecke geteilt, von denen je zwei gegenüberliegende rückwärts stimmend, also einander gleich sind.

Bw. durch die Scheitelecken bei M. (**10**, 15.)



Figur 185.

13. Der Inhalt eines Kugeldreiecks ist, wenn sein Winkelüberschuſs (über 180^0) **mit 2ε bezeichnet wird,**

$$21. \qquad \triangle = \frac{\varepsilon^0}{90^0}\,\pi r^2.$$

Für die Ausrechnung ist es, wenn die Winkel bis in die Sekunden gehen, bequemer, ε^0 und 90^0 in Sekunden zu verwandeln. (Vergl. Formel 20 in Nr. 5.)

Bw. Die durch Vervollständigung der Dreiecksseiten zu ganzen Hauptkreisen entstehenden 8 Dreiecke machen zusammen die ganze Kugelfläche aus, also das gegebene Dreieck ABC mit den drei an seinen Seiten hängenden die Hälfte, $2\pi r^2$. (Nr. 12.) Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks ABC

mit $\triangle$, den des Dreiecks BCA_1, welches an seiner Seite a hängt, mit $\triangle_a$ und entsprechend die beiden andern, so hat man durch die Zweiecke (Nr. 5)

$$\triangle + \triangle_a = \frac{\alpha^0}{90^0}\,\pi r^2$$

$$\triangle + \triangle_b = \frac{\beta^0}{90^0}\,\pi r^2$$

$$\triangle + \triangle_c = \frac{\gamma^0}{90^0}\,\pi r^2$$

$$2\triangle + 2\pi r^2 = \frac{180^0 + 2\varepsilon^0}{90^0}\,\pi r^2$$

$$\triangle + \pi r^2 = \pi r^2 + \frac{\varepsilon^0}{90^0}\,\pi r^2$$

$$\triangle = \frac{\varepsilon^0}{90^0}\,\pi r^2.$$

Der Inhaltsausdruck für ein Kugeldreieck ist völlig anders, als für ein ebenes Dreieck. — Man mache die Probe mit einem der 8 Dreiecke, in welche die Kugelfläche zerlegt wird durch drei im Mittelpunkte sich rechtwinklig schneidende Ebenen.

14. Übungen.

1) Wie lauten die Sätze, welche für Kugeldreiecke hervorgehen aus den Sätzen **10**, 18, 10 und 11 für dreiseitige Ecken?

2) Der Körper $MABC$ (Figur 185) ist eine auf einem Kugeldreiecke stehende Pyramide, welche die Bezeichnung Kugelpyramide führt. Durch eine Entwicklung, welche der in Nr. 13 nachzubilden ist, zeige man, dafs der Inhaltsausdruck der dreiseitigen Kugelpyramide entspricht der Form $J = {}^1/_3\,Gh$, und dafs folglich für eine $n$seitige Kugelpyramide dasselbe gilt. (Vergl. **14**, 15, Anm.) Daraus ergiebt sich sehr leicht, dafs sogar die durch eine innere Kugel um M abgestumpfte Kugelpyramide (ein Stück einer Kugelschale) einen Inhaltsausdruck hat, welcher mit dem des Pyramidenstumpfes auf ebener Grundfläche ganz übereinstimmt. (Formel 3 in **12**, 11.) Da das Ergebnis von der Seitenzahl n unabhängig ist, darf der Mantel des Körpers auch der eines beliebig gestalteten Kegels mit der Spitze M sein, wovon der einfachste Fall der Kugelausschnitt ist. (**15**, 17, vor Formel 16.)

---

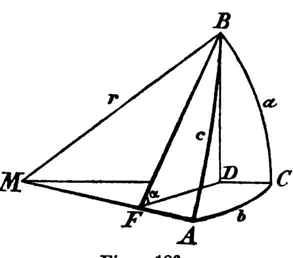
19. Glied. Kugeldreiecksrechnung.
(Sphärische Trigonometrie.)

a. Das rechtwinklige Kugeldreieck.

1. Die Neperschen Gleichungen.*) Man fälle vom Eckpunkte B des bei C rechtwinkligen Kugeldreiecks ABC auf die nach den beiden

*) Neper (Napier), Baron von Merchiston, geb. 1550, gest. 1617 April 3 (alten Stils) zu Merchiston-Castle unweit Edinburgh.

andern Eckpunkten gehenden Kugelhalbmesser die Senkrechten BD und BF und verbinde deren Fufspunkte D und F. Der entstandene Neigungswinkel BFD zwischen den Ebenen BAM und CAM giebt die Gröfse α des Winkels BAC an. (**18**, 3.) Das rechtwinklige Dreieck BDF liefert die Werte der Funktionen des Winkels $BFD = \alpha$. Nach Aufstellen jedes dieser Brüche dividiere man Zähler und Nenner durch die Linie, welche vom Mittelpunkte nach dem Treffpunkte der beiden gebrauchten Seiten geht.



Figur 186.

$$1)\quad \sin\alpha = \frac{BD}{BF} = \frac{BD:r}{BF:r} = \frac{\sin BMD}{\sin BMF} = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

$$2)\quad \cos\alpha = \frac{DF}{BF} = \frac{DF:MF}{BF:MF} = \frac{\operatorname{tg} DMF}{\operatorname{tg} BMF} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{DF} = \frac{BD:MD}{DF:MD} = \frac{\operatorname{tg} BMD}{\sin DMF} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

Nun werde mit der zuletzt benutzten Linie MD der Zähler beim Kosinus der gröfsten Seite c dividiert und multipliziert:

$$\cos c = \cos BMF = \frac{MF}{r} = \frac{MF:MD \cdot MD}{r}$$

$$4)\quad \cos c = \cos DMF \cdot \cos BMD = \cos b \cdot \cos a.$$

Aus diesen Formeln gehen durch Umformung neue hervor. Das Ergebnis von 2) liefert

$$\cos\alpha = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos b}.$$

Der erste Bruch bedeutet, gemäfs 1), $\sin\beta$ und der zweite nach 4) $\cos a$; also hat man

$$5)\quad \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos a \quad \text{und entsprechend}$$
$$\cos\beta = \sin\alpha \cdot \cos b; \quad \text{daraus folgt durch Multiplizieren}$$
$$\cos\alpha\,\cos\beta = \sin\alpha\,\sin\beta \cdot \cos b\,\cos a; \quad \text{daher nach 4)}$$
$$6)\quad \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta = \cos c.$$

Den 6 Formeln giebt man, um sie leichter im Gedächtnis behalten zu können, andere Gestalt. Man beseitigt die Nenner und setzt für die kleinen Seiten ihre Ergänzung zu 90°. Nach den dadurch entstehenden Formen treten sie in 2 Gruppen zusammen:

I.	II.
1) $\cos(90^0 - a) = \sin\alpha\,\sin c$	2) $\cos\alpha = \operatorname{ctg}(90^0 - b)\,\operatorname{ctg} c$
4) $\cos c = \sin(90^0 - b)\,\sin(90^0 - a)$	3) $\cos(90^0 - b) = \operatorname{ctg}(90^0 - a)\,\operatorname{ctg}\alpha$
5) $\cos\alpha = \sin\beta\,\sin(90^0 - a)$	6) $\cos c = \operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{ctg}\beta$.

Schreibt man nach der Figur die Seiten und Winkel des Kugeldreiecks mit Fortlassen des bekannten rechten Winkels heraus, so ersieht man aus der Anordnung

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ c & & a \\ & \alpha \quad b & \end{array}$$

dafs in Gruppe I auf der rechten Seite immer zwei zusammenliegende Stücke auftreten und links das von ihnen getrennte, in jeder Formel der Gruppe II aber drei nebeneinander liegende, deren mittleres links steht. Bezeichnet man deshalb die **z**usammenliegenden Stücke mit z und z', das **g**etrennt liegende mit g, das **m**ittlere mit m, und die **n**ebenliegenden mit n und n', so hat man nur 2 Formeln zu merken

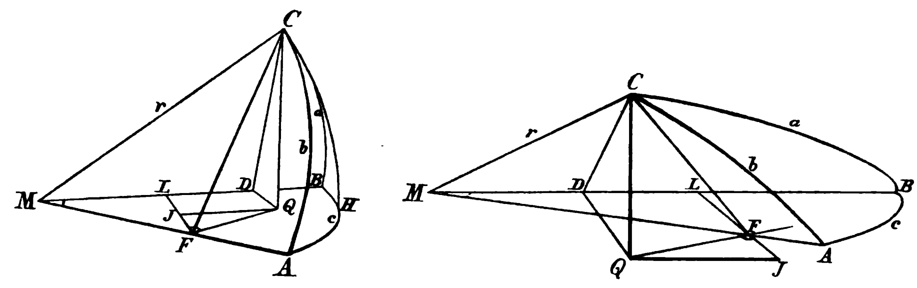
1. I. $\cos g = \sin z \cdot \sin z'$ und II. $\cos m = \operatorname{ctg} n \cdot \operatorname{ctg} n'$

wo **statt der kleinen Seiten** ihre **Ergänzungen zu 90°** zu nehmen sind.

I und II sind die beiden **Neperschen Gleichungen.**

b. Das schiefwinklige Kugeldreieck.

2. Der Sinussatz. Man fälle vom dritten Eckpunkte C des schiefwinkligen Kugeldreiecks ABC auf die Grundebene MAB die Senkrechte CQ,



Figur 187. $\angle A$ ist spitz. Figur 188. $\angle A$ ist stumpf.

sowie auf die Halbmesser MB und MA die Senkrechten CD und CF, und verbinde deren Fufspunkte D und F mit Q. Von den entstandenen Neigungswinkeln ist $CDQ = \beta$ des Kugeldreiecks und $CFQ = \alpha$, wenn α spitz ist, und $= 180^0 - \alpha$, wenn α ein stumpfer Winkel ist.

Die erste Senkrechte CQ, auf zwei Weisen durch r und Winkelfunktionen ausgedrückt, giebt in beiden Fällen (mittels CD und CF)

$$CQ = r \sin a \cdot \sin\beta = r \sin b \cdot \sin\alpha$$

und durch Dividieren mit $\sin\alpha \; \sin\beta$ folgt

2. der **Sinussatz** $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta}$.

Anmerkung. Wie CQ kann man auch die Höhe CH des Kugeldreiecks benutzen mit der ersten Neperschen Gleichung.

3. Der **Kosinussatz für die Seiten.** Nun werde auch von dem auf MA liegenden Fufspunkte F die Senkrechte FL auf MB gefällt und bis zu ihr von Q aus die mit MB gleichlaufende Gerade gezogen, welche sie in J trifft. Weil $\angle MFL$ (und im andern Falle mit seinem Scheitelwinkel) jeden der beiden Winkel zu einem Rechten ergänzt, ist

$$\angle QFJ = FML = c.$$

Ist $\angle \alpha$ spitz, so ist $MD = ML + JQ$, und wenn man diese Linien der Reihe nach durch r und Winkelfunktionen ausdrückt, steht da

$$r \cos a = r \cos b \cdot \cos c + r \sin b \cdot \cos\alpha \cdot \sin c.$$

Ist $\angle \alpha$ stumpf, so wird $MD = ML - JQ$ und das ist

$$r \cos a = r \cos b \cdot \cos c - r \sin b \cdot \cos(180^0 - \alpha) \cdot \sin c.$$

Folglich lautet in beiden Fällen der **Kosinussatz für die Seiten**

$$3. \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cdot \cos \alpha.$$

[Man denke, zum leichteren Behalten dieser Gleichung, an die Hauptformel für Kosinus: $\cos(b - c) = \ldots\ldots$]

4. Der **Kosinussatz für die Winkel.** Wendet man die eben entwickelte Formel auf die Seiten des zum Dreieck ABC gehörigen Polardreiecks $A_1B_1C_1$ an, so hat man die Gleichung

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cdot \cos \alpha_1.$$

Es ist aber nach **18**, 7, 2) $a_1 = 180^0 - \alpha$, $b_1 = 180^0 - \beta$, $c_1 = 180^0 - \gamma$ und $\alpha_1 = 180^0 - a$. Durch Einsetzen dieser Werte entsteht

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cdot \cos a$$

oder nach Umkehren der Vorzeichen

der **Kosinussatz für die Winkel**

$$4. \qquad \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cdot \cos a$$

welcher sich vom Kosinussatz für die Seiten durch das rechts vorangehende Minuszeichen wesentlich unterscheidet.

5. Nepers Tangens-Formeln (Analogien).*)

Aus dem Sinussatz in der Form $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ liefert der Satz von gleichen Brüchen (**3**, 10, unter 7)

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}.$$

Nach dem Einsetzen der Werte ziehe man links zusammen, rechts nicht:

$$\text{I.} \qquad \frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 (a + b)}{\operatorname{tg} {}^1/_2 (a - b)} = \frac{\sin {}^1/_2 (\alpha + \beta) \cos {}^1/_2 (\alpha - \beta)}{\cos {}^1/_2 (\alpha + \beta) \sin {}^1/_2 (\alpha - \beta)}.$$

Aus dem Kosinussatz für die Seite a und für die Seite b hat man

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cdot \cos \alpha$$
$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cdot \cos \beta$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so entsteht

$$\cos b - \cos a + (\cos b - \cos a) \cos c \quad \text{oder zusammengezogen}$$
$$(\cos b - \cos a)(1 + \cos c) = \sin c (\sin a \cos \beta - \sin b \cos \alpha)$$

und durch Zusammenzählen der beiden Gleichungen folgt ebenso

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c (\sin a \cos \beta + \sin b \cos \alpha).$$

Es fällt der Faktor $\sin c$ fort, wenn man die vorletzte Gleichung durch die letzte dividiert:

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} \cdot \frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \frac{\sin a \cos \beta - \sin b \cos \alpha}{\sin a \cos \beta + \sin b \cos \alpha}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches durch $\sin b$, so kann man für $\frac{\sin a}{\sin b}$ nach dem Sinussatze $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ setzen. Beseitigt man

---

*) „Analogie" ist der alte Ausdruck für Verhältnisgleichung.

dann wieder den Nenner $\sin\beta$ durch Multiplizieren, so wird der Bruch zu $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$, den man, weil links halbe Winkel entstehen, auch zerlegen wird:

$$\frac{2\sin{}^1/_2(a+b)\sin{}^1/_2(a-b)}{2\cos{}^1/_2(a+b)\cos{}^1/_2(a-b)} \cdot \frac{2\cos^2{}^1/_2 c}{2\sin^2{}^1/_2 c} = \frac{2\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)}{2\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)}, \text{ also}$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{tg}{}^1/_2(a+b)\cdot\operatorname{tg}{}^1/_2(a-b) = \operatorname{tg}^2{}^1/_2 c \cdot \frac{\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)}{\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)}.$$

Multipliziert man die Gleichungen I und II mit einander, so kommen lauter quadratische Gröfsen und es ergiebt das Wurzelausziehen

$$5.\qquad \operatorname{tg}{}^1/_2(a+b) = \operatorname{tg}{}^1/_2 c \cdot \frac{\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)}{\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)}.$$

Dividiert man die II. Gleichung durch diese, so hat man

$$6.\qquad \operatorname{tg}{}^1/_2(a-b) = \operatorname{tg}{}^1/_2 c \cdot \frac{\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)}{\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)}.$$

Entsprechende Formeln für $\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha+\beta)$ und $\operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha-\beta)$ könnte man ebenso ableiten aus dem Sinussatz und aus dem Kosinussatz für die Winkel. Man kommt aber leichter dazu, wenn man die Formeln 5. und 6. auf das Polardreieck anwendet und durch $a_1 = 180^0 - \alpha$, $b_1 = 180^0 - \beta$ u. s. w. zu dem ersten Dreieck zurückkehrt. Dabei ist

$^1/_2(a_1+b_1) = 180^0 - {}^1/_2(\alpha+\beta)$, $\quad {}^1/_2(\alpha_1-\beta_1) = -{}^1/_2(a-b)$
$^1/_2(a_1-b_1) = -{}^1/_2(\alpha-\beta)$, $\quad {}^1/_2 c_1 = 90^0 - {}^1/_2\gamma$, $\quad {}^1/_2(\alpha_1+\beta_1) = 180^0 - {}^1/_2(a+b)$.

Hierdurch wird in beiden Formeln die linke Seite negativ, aber auch die rechte, in 5. durch den Nenner und in 6. durch den Zähler, so dafs die Minuszeichen sich aufheben und dasteht:

$$7.\qquad \operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha+\beta) = \operatorname{ctg}{}^1/_2\gamma \cdot \frac{\cos{}^1/_2(a-b)}{\cos{}^1/_2(a+b)}$$

$$8.\qquad \operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha-\beta) = \operatorname{ctg}{}^1/_2\gamma \cdot \frac{\sin{}^1/_2(a-b)}{\sin{}^1/_2(a+b)}.$$

Dies sind **Nepers Tangens-Formeln,** und zwar 5. und 6. für die Seiten, 7. und 8. für die Winkel; denn durch jene findet man aus einer Seite und den anliegenden Winkeln die beiden andern Seiten, und durch diese aus zwei Seiten und deren Zwischenwinkel die beiden andern Winkel. Zu beachten ist, dafs in den Formeln für die Winkel rechts **ctg** eingetreten ist. Welche Funktion in den rechts stehenden Brüchen auftritt, sagt das auf der linken Seite gebrauchte Vorzeichen durch den Gleichklang: bei Minus kommt Sinus.

Anmerkung. Läfst man bei unveränderter Seitenlänge den Kugelmittelpunkt weiter und weiter vom Dreieck abrücken, so gehen, wenn die Seiten im Vergleich zu dem aufserordentlich grofsen Kugelhalbmesser sehr klein sind, sin und tg der Seiten in die Bogen über (7, 7, 2) und diese strecken sich, wenn der Kugelhalbmesser unendlich grofs wird, zu geraden Linien. So verwandeln sich die Formeln für Kugeldreiecke in die für ebene Dreiecke, mit Ausnahme des Kosinussatzes für die Seiten, dessen Form nichts Gleichartiges in der Ebene hat und in $1 = 1$ übergehen würde.

c. Die sechs Hauptaufgaben,

geordnet nach den 6 Deckbarkeitssätzen. (18, 9.)

6. Erste Aufgabe. **1 Seite und die beiden anliegenden Winkel. Von einem Kugeldreiecke sind gegeben c, α und β; man soll die beiden andern Seiten und den dritten Winkel berechnen.**

Ausführung. Zwei Behandlungsweisen. 1) Die Seiten a und b erhält man durch Nepers Tangens-Formeln für die Seiten (Formel 5 und 6) und aus einer der beiden für die Winkel (7 oder 8) den dritten Winkel γ

entweder $$\operatorname{ctg} {}^1\!/_2\,\gamma = \operatorname{tg} {}^1\!/_2(\alpha + \beta)\,\frac{\cos {}^1\!/_2(a+b)}{\cos {}^1\!/_2(a-b)}$$

oder $$\operatorname{ctg} {}^1\!/_2\,\gamma = \operatorname{tg} {}^1\!/_2(\alpha - \beta)\,\frac{\sin {}^1\!/_2(a+b)}{\sin {}^1\!/_2(a-b)}$$

und zwar nimmt man, wenn α und β wenig ungleich sind, die erste, bei erheblicher Ungleichheit, die ${}^1\!/_2(a-b) > 45^0$ macht, die zweite; denn das Zahlenergebnis wird ungenau, wenn der Nenner ein kleiner Bruch ist. (Wollte man γ mittels des Sinussatzes berechnen, so hätte man in der Logarithmentafel zu viel zu blättern; für vorstehende Formeln stehen die Logarithmen mit den schon aufgesuchten in derselben Zeile; man schreibt sie für diesen Teil der Rechnung sogleich mit heraus.)

2) Weniger gut ist es, wenn man erst den dritten Winkel und dann die Seiten berechnet. Dabei hat man den Kosinussatz für die Winkel (Formel 4) durch Einführen eines Hilfswinkels zur logarithmischen Rechnung bequemer einzurichten. Man zieht auf der rechten Seite der Gleichung

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

$\cos\beta$ wie einen gemeinsamen Faktor heraus

$$\cos\gamma = -\cos\beta\,(\cos\alpha - \sin\alpha\operatorname{tg}\beta\cos c)$$

und setzt $$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\beta\cos c$$

und hat $$\cos\gamma = -\frac{\cos\beta\,\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}$$

endlich die Seiten aus dem Sinussatz

$$\sin a = \frac{\sin c}{\sin\gamma}\sin\alpha \qquad \text{und} \qquad \sin b = \frac{\sin c}{\sin\gamma}\sin\beta.$$

Anmerkung. Auf der Kugelfläche könnte noch das Dreieck in Betracht gezogen werden, welches die Gegenpunkte der Eckpunkte des gefundenen zu Eckpunkten hat. (Figur 185 in **18,** 12.) Es hat die gegebenen und die berechneten Stücke von gleicher Gröfse, aber in umgekehrter Reihenfolge. Man wird dieses Dreieck nicht als ein wesentlich anderes Dreieck, als ein zweites, rechnen. Für die folgenden Aufgaben gilt dasselbe.

7. Zweite Aufgabe. **2 Seiten und der Zwischenwinkel. Von einem Kugeldreiecke sind gegeben a, b und γ; die übrigen Stücke sind zu berechnen.**

Die beiden Behandlungsweisen entsprechen denen der ersten Aufgabe.

8. Dritte Aufgabe. **3 Seiten. Aus den drei Seiten eines Kugeldreiecks die Winkel zu berechnen.**

Ausführung. Aus dem Kosinussatze für die Seiten (Formel 3) erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

Diese Gleichung wird, weil sie zur logarithmischen Rechnung ungeeignet ist, von $1 = 1$ abgezogen und, nachdem $\sin {}^1/_2 \alpha$ gefunden ist, auch zu $1 = 1$ hinzugefügt, um auch $\cos {}^1/_2 \alpha$ zu haben. Dabei wird der Umfang des Dreiecks $2s = a + b + c$ eingeführt. Man findet

$$\sin {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin b\,\sin c}}$$

$$\cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{\sin s\,\sin(s-a)}{\sin b\,\sin c}}.$$

Man hat, wenn alle drei Winkel zu berechnen sind, weniger Logarithmen aufzuschlagen, wenn man die in beiden Ergebnissen übereinstimmenden Nenner durch Dividieren beseitigt:

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-a)}}.$$

Um den Zähler für alle drei Winkel gleichlautend zu machen, erweitert man den Bruch mit dem im Zähler fehlenden $\sin(s-a)$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha = \frac{1}{\sin(s-a)} \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin s}}.$$

Für diese bei allen drei Winkeln auftretende Quadratwurzel werde $\operatorname{tg} \varrho$ geschrieben; dann ist

$$\textbf{9.}\quad \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varrho}{\sin(s-a)},\quad \operatorname{tg} {}^1/_2 \beta = \frac{\operatorname{tg} \varrho}{\sin(s-b)},\quad \operatorname{tg} {}^1/_2 \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varrho}{\sin(s-c)}.$$

Beim Rechnen wird man die Zahlen genau untereinander setzen, um vom $\log \operatorname{tg} \varrho$ die darüberstehenden Logarithmen, ohne sie noch einmal zu schreiben, bequem abziehen zu können.

Anmerkung 1. Zieht man aufser den Winkelhalbierenden noch nach den Berührungspunkten des dem Kugeldreiecke einbeschriebenen Kreises die Bogenhalbmesser ϱ, so folgt aus den paarweise rückwärts stimmenden Dreiecken (**18**, 9, 6), dafs die an demselben Eckpunkte liegenden Seitenabschnitte, wie bei den ebenen Dreiecken, einander gleich sind. Bezeichnet man die bei A liegenden mit x, die bei B mit y und die bei C mit z, so liefert der Umfang $2s$ $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. Aus einem der rechtwinkligen Dreiecke bei A giebt die zweite Nepersche Gleichung (Nr. 1)

$$\sin x = \operatorname{ctg} {}^1/_2 \alpha \operatorname{tg} \varrho$$

woraus

$$\operatorname{tg} \varrho = \sin(s-a) \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha$$

und wenn man für $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha$ obigen Ausdruck mit der Quadratwurzel einsetzt,

$$\textbf{10.}\quad \operatorname{tg} \varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin s}}.$$

Dies zeigt, dafs bei der vorhin für die Berechnung eingeführten Bezeichnung ϱ den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises bedeutete.

Anmerkung 2. Läfst man bei unveränderter Länge der Seiten den Kugelmittelpunkt vom Dreiecke fort bis ins Unendliche rücken, so gehen alle diese Formeln in die entsprechenden für geradlinige Dreiecke über. (**5**, 6, 8 und **5**, 4.)

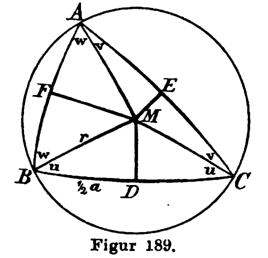
9. Vierte Aufgabe. **3 Winkel. Aus den drei Winkeln eines Kugeldreiecks die Seiten zu finden.**

Ausführung. Anstatt die Entwicklung aus dem Kosinussatz für die Winkel ganz ebenso zu machen, wenden wir die Formeln 10 und 9 auf das Polardreieck des gegebenen an und kehren durch $a_1 = 180^0 - \alpha$, $\alpha_1 = 180^0 - a$ zu ihm zurück. Dabei wird $2s_1 = 2 \cdot 180^0 - (\alpha + \beta + \gamma - 180^0)$ oder mit der zweckmäfsigen Bezeichnung des Winkelüberschusses durch 2ε, $2s_1 = 2 \cdot 180^0 - 2\varepsilon$, also $s_1 = 180^0 - \varepsilon$, daher $s_1 - a_1 = \alpha - \varepsilon$, $s_1 - b_1 = \beta - \varepsilon$, $s_1 - c_1 = \gamma - \varepsilon$. So bringen die Formeln 10 und 9

$$\operatorname{tg}\varrho_1 = \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)\sin(\beta - \varepsilon)\sin(\gamma - \varepsilon)}{\sin\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \operatorname{ctg}{}^1/_2 a = \frac{\operatorname{tg}\varrho_1}{\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Die nach den Eckpunkten gehenden Bogenhalbmesser des umbeschriebenen Kreises zerlegen das Dreieck in gleichschenklige Kugeldreiecke, deren Grundwinkel liefern

$$2u + 2v + 2w = \alpha + \beta + \gamma = 180^0 + 2\varepsilon$$
$$u + v + w = 90^0 + \varepsilon, \qquad u + \alpha = 90^0 + \varepsilon$$
$$u = 90^0 - (\alpha - \varepsilon).$$



Figur 189.

Daher hat man aus dem rechtwinkligen Dreiecke BDM durch die 2. Nepersche Gleichung

$$\cos u = \operatorname{ctg} r \operatorname{tg}{}^1/_2 a, \quad \text{also} \quad \operatorname{ctg} r = \operatorname{ctg}{}^1/_2 a \sin(\alpha - \varepsilon),$$

und wenn man für $\operatorname{ctg}{}^1/_2 a$ den obigen Wert einsetzt, ergiebt sich

$$\operatorname{ctg} r = \operatorname{tg}\varrho_1 = \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)\sin(\beta - \varepsilon)\sin(\gamma - \varepsilon)}{\sin\varepsilon}}$$

und damit wird

$$\operatorname{ctg}{}^1/_2 a = \frac{\operatorname{ctg} r}{\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Zum Rechnen sind bequemer die umgekehrten Werte

$$\textbf{11.} \qquad \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha - \varepsilon)\sin(\beta - \varepsilon)\sin(\gamma - \varepsilon)}}$$

$$\textbf{12.} \quad \operatorname{tg}{}^1/_2 a = \operatorname{tg} r \sin(\alpha - \varepsilon), \ \operatorname{tg}{}^1/_2 b = \operatorname{tg} r \sin(\beta - \varepsilon), \ \operatorname{tg}{}^1/_2 c = \operatorname{tg} r \sin(\gamma - \varepsilon).$$

Die letzten drei Ausdrücke, 12., gehen, wenn der Kugelhalbmesser ins Unendliche wächst, über in ${}^1/_2 a = r \sin\alpha$, oder $b = 2r \sin\beta$, oder $\frac{c}{\sin\gamma} = d$, wie es der Sinussatz für ebene Dreiecke verlangt. (Dabei sagt der Ausdruck $\operatorname{tg} r$ weiter nichts, als dafs der Kreishalbmesser r im Vergleich zum unendlich grofs werdenden Kugelhalbmesser verschwindend klein ist.)

Anmerkung. Wendet man den Ausdruck für $\operatorname{ctg} r$ auf das Polardreieck an, so liefert

$$\operatorname{ctg} r_1 = \sqrt{\frac{\sin(\alpha_1 - \varepsilon_1)\sin(\beta_1 - \varepsilon_1)\sin(\gamma_1 - \varepsilon_1)}{\sin\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin s}}$$

also nach Formel 10 auch $\operatorname{ctg} r_1 = \operatorname{tg}\varrho$. Aus beiden Ergebnissen folgt

$$r = 90^0 - \varrho_1 \quad \text{und} \quad r_1 = 90^0 - \varrho$$

also

$$2r + 2\varrho_1 = 180^0 \quad \text{und} \quad 2r_1 + 2\varrho = 180^0.$$

Dies lehrt: Wie jede Seite des einen Dreiecks den entsprechenden Winkel des andern zu 180^0 ergänzt, so **betragen in Polardreiecken auch der**

Durchmesser des dem einen umbeschriebenen Kreises und der Durchmesser des dem andern einbeschriebenen Kreises zusammen 180°.

10. Fünfte Aufgabe. **Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel. Für ein Kugeldreieck sind gegeben a, b und α; die übrigen Stücke sind zu bestimmen.**

Ausführung. Der Sinussatz liefert durch

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin a}\sin b$$

zwei Winkel, β und $\beta_1 = 180^0 - \beta$. Also können zwei verschiedene Kugeldreiecke die drei gegebenen Stücke enthalten. Jeder der beiden Winkel, β und β_1, bringt aus den folgenden Formeln die zu seinem Dreiecke gehörige dritte Seite und den dritten Winkel, also doppelte Rechnung.

Durch Nepers Tangens-Formeln hat man

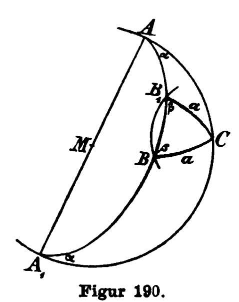
$$\begin{aligned}\operatorname{tg} {}^1\!/_2\, c &= \operatorname{tg} {}^1\!/_2 (a+b)\frac{\cos {}^1\!/_2(\alpha+\beta)}{\cos {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}\\ &= \operatorname{tg} {}^1\!/_2 (a-b)\frac{\sin {}^1\!/_2(\alpha+\beta)}{\sin {}^1\!/_2(\alpha-\beta)}\\ \operatorname{ctg} {}^1\!/_2\, \gamma &= \operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\alpha+\beta)\frac{\cos {}^1\!/_2(a+b)}{\cos {}^1\!/_2(a-b)}\\ &= \operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\alpha-\beta)\frac{\sin {}^1\!/_2(a+b)}{\sin {}^1\!/_2(a-b)}\end{aligned}$$

davon wählt man, wenn a und b nicht allzuverschieden grofs sind, die ersten Ausdrücke, bei erheblicher Ungleichheit aber die zweiten, damit die Nenner möglichst grofse Brüche sind.

Abschlufs. Grenzbedingung $\sin a \geqq \sin b \sin\alpha$.

Anmerkung 1. Um die beiden Kugeldreiecke, welche a, b und α von der gegebenen Gröfse enthalten, zu zeichnen, wird man verfahren, wie Figur 33 (in **5,** 2) für die entsprechende Aufgabe bei ebenen Dreiecken zeigt.

Anmerkung 2. Um eines dieser beiden Kugeldreiecke mit denselben drei gegebenen Stücken auszuschliefsen beim Vergleiche beider mit einem andern Kugeldreiecke in Bezug auf Übereinstimmen oder Rückwärtsstimmen. mufste beim fünften Satze die Bedingung hinzugefügt werden, dafs die andern gegenüberliegenden Winkel, β oder β_1, mit dem Winkel β_2 des andern Kugeldreiecks nicht zusammen 180° betragen. (**18,** 9, 5.)



Figur 190.

11. Sechste Aufgabe. **Zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite. Für ein Kugeldreieck sind gegeben α, β und a; die übrigen Stücke sind zu berechnen.**

Ausführung. Nachdem aus $\sin b = \frac{\sin a}{\sin\alpha}\sin\beta$ **zwei** Werte gefunden sind, b und $b_1 = 180^0 - b$, erfolgt die Berechnung von c und c_1, von γ und γ_1 mittels der unter Nr. 10 angegebenen Formeln nach der zur Auswahl angestellten Überlegung.

Die beiden möglichen Dreiecke sind ABC und A_1B_1C in Figur 190. Dabei ist A_1 von A der Gegenpunkt auf der Kugelfläche.

Abschlufs. Grenzbedingung $\sin\alpha \geqq \sin a \sin\beta$.

Schlufsbemerkung. Aus den Behandlungsweisen tritt deutlich hervor, dafs die den 6 Deckbarkeitssätzen entsprechenden 6 Hauptaufgaben paarweise zusammengehören.

12. Übungen.

a. Das rechtwinklige Kugeldreieck.

1) Martus, Aufgaben 375—377, 381.

2) Von einem rechtwinkligen Kugeldreiecke ist ein Winkel α und der Unterschied u der ihn einschliefsenden Seiten gegeben. Man soll die Seiten des Dreiecks berechnen. $\alpha = 71^0 40'$, $u = 9^0 20'$.

Ergebnis. Aus $\sin(z + y) = \sin u \operatorname{ctg}^2 {}^1/_2\, \alpha$ gehen 2 Werte hervor. Es wird die Gegenseite des gegebenen Winkels (welche nicht nur der Eindeutigkeit wegen, sondern auch der Genauigkeit halber aus tg zu berechnen ist) im ersten Dreieck $x_1 = 13^0 1' 4''$ und im zweiten $x_2 = 71^0 9' 53''$.

3) Inhalt eines Kugeldreiecks: M., Aufgaben 378*b*, 379*a* und *b*, 378*a*.

4) Es soll ein regelmäfsiges Kugelvieleck bestimmt werden, welches den $n$ten Teil der Kugelfläche einnimmt und dessen Winkel denen des ebenen regelmäfsigen n-Ecks gleich sind. Wieviele Seiten mufs das regelmäfsige Vieleck erhalten? wie grofs werden dieselben und der Bogenhalbmesser des umbeschriebenen Kreises? (Die Figur sieht aus wie ein aufgespannter Regenschirm. Vergl. Figur 203.) Hier kommt aber der Kosinus zu nahe an 1. Deshalb sind die beiden Formeln umzugestalten; man mufs den Kosinus des Bogens durch den Sinus des halben Bogens ausdrücken. Beispiele: 1) $n = 12$, 2) $n = 50$.

Ergebnis. Das Kugelvieleck mufs 2 Seiten weniger erhalten, als das ebene regelmäfsige n-Eck. Beim ersten Beispiele wird $a = 20^0 7' 58''$ und $r = 34^0 26' 45''$; beim zweiten $a = 2^0 6' 5''$ und $r = 16^0 16' 56''$.

5) Unter allen auf derselben Kugel befindlichen regelmäfsigen Vielecken von gegebener Seitenzahl n dasjenige durch seine Winkel zu bestimmen, bei welchem zwischen dem um- und einbeschriebenen Kreise die gröfste Zone liegt. Der Polabstand der Grenzkreise, die Höhe und die Bogenbreite der gröfsten Zone auf der Kugel vom Halbmesser R für $n = 5$ werde als Beispiel berechnet.

Ergebnis. Der halbe Winkel des betreffenden Vielecks geht hervor aus $\sin {}^1/_2\, \alpha = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{n}}$. Die gröfste Zone hat einen Polabstand von $51^0 51' 49''$ bis $57^0 34' 36''$, ihre Höhe ist $h = 0{,}08\,137\,R$ und ihre Breite $b = 0{,}09\,971\,R$.

b. Das schiefwinklige Kugeldreieck.

6) M., Aufgaben 383*a*, *b* und *c*, 385, 386; 384. Benutzung der Figur 187 für Aufgabe 404.

7) Zwei gegen eine wagerechte Ebene unter den Winkeln $\delta = 20^0 10' 41''$ und $\varepsilon = 9^0 42' 24''$ geneigte gerade Linien bilden mit einander den Winkel $w = 47^0 45' 39''$. Wie grofs ist der Winkel zwischen den Ablotungen der Geraden in der Ebene? [$\alpha = 48^0 24' 56''$.]



8) Man stelle aus den Formeln, durch welche die halben Winkel eines Kugeldreiecks aus seinen Seiten bestimmt werden, eine einfache Formel für das Produkt $\operatorname{tg} {}^1/_2\, \alpha \cdot \operatorname{ctg} {}^1/_2\, \beta$ auf und berechne dann mit Hilfe dieser Formel die Stücke eines Kugeldreiecks, von welchem $b + c - a = 2(s - a) = 70^0\,34'\,20''$, $\alpha = 38^0\,18'$ und $\beta = 27^0$ gegeben sind.

Ergebnis. Zwei Dreiecke besitzen die gegebenen Gröfsen. Deren übrige Stücke sind

$c = 91^0\,57'\,32{,}5''$	$c_1 = 158^0\,36'\,47{,}5''$
$a = 61\;\;25\;\;21$	$a_1 = 124\;\;56\;\;35$
$b = 40\;\;2\;\;8$	$b_1 = 36\;\;54\;\;7$
$\gamma = 135\;\;8\;\;32$	$\gamma_1 = 163\;\;59\;\;43.$

9) M., Aufgaben $380a$ und b, $382a$ und b, $380c$.

10) Zwei Orte auf der Erdkugel, deren Längenunterschied $\gamma = 28^0\,40'$ beträgt, sind 3000 und 4000 Kilometer vom Nordpol entfernt. Wie grofs ist das Viereck zwischen den Meridianen der Orte, dem Äquatorbogen und dem die Orte verbindenden Bogen des Hauptkreises? $r = 6\,370$ km.

Ergebnis. $J = \frac{\gamma'' - 2\,\varepsilon''}{648\,000''}\,\pi r^2.$ $J = 17\,464\,000$ qkm.

c. Aufgaben aus der astronomischen Geographie.

11) Für Orte welches Breitenkreises geht die Sonne am längsten Tage in Nordwesten unter? ($\varepsilon = 23^0\,27'$.)

Ergebnis. Dem Werte $\varphi = 55^0\,45'\,6''$ entspricht Kopenhagen ($55^0\,41'$) und Moskau ($55^0\,45'$).

12) M., Aufgaben $389a$, $390a$, 391, 387; $392a$, 393, 398.

13) Welche Höhe erreicht die Sonne eine Stunde nach ihrem Aufgange am 21. März in Berlin, wo die Polhöhe $\varphi = 52^0\,30'$ ist? und welchen Winkel bildet dann auf wagerechtem Boden der Schatten eines senkrecht stehenden Stabes mit der Richtung nach Norden? [$h = 9^0\,3'\,55''$, $x = 77^0\,59'\,55''$.]

14) In welcher Höhe sieht ein am Äquator reisender Beobachter die Sonne am 21. Juni vormittags 9 Uhr 10 Minuten ($\delta = 23^0\,27'$), und um welche Nachmittagsstunde erreicht auf wagerechtem Erdboden der Schatten des Reisenden gleiche Gröfse mit ihm selber?

Ergebnis: $h = 42^0\,33'\,42''$; um $2^h\,38^m\,18^s$ nachmittags.

15) Wie lange dauert das Durchgehen der Sonne durch den Mittagskreis, wenn ihre Deklination δ ist? Beispiele: 1) Am längsten Tage ist der scheinbare Halbmesser der Sonne $\varrho = 15'\,45''$ und $\delta = \varepsilon = 23^0\,27'$. 2) Am 23. September $\varrho = 15'\,58{,}5''$ und $\delta = 0$. Sternzeit wird in mittlere Zeit verwandelt durch Multiplizieren mit $1 - 0{,}00\,273$.

Ergebnis. 1) Am längsten Tage $2\mathrm{t} = 2^m\,16{,}95^s$ mittlerer Zeit. 2) Zu Anfang des Herbstes $2\mathrm{t} = 2^m\,7{,}45^s$ mittl. Zeit.

16) In welcher Entfernung vom Zenit und unter welchem Winkel schneidet den ersten Vertikal der Kreis, welcher die Polhöhe, $\varphi > 45^0$, zum Halbmesser hat, und wie grofs ist der Stundenwinkel eines Schnittpunktes? Beispiel: $\varphi = 52^0\,31'$.*)

*) Der „erste Vertikal" ist derjenige Kreis an der Himmelskugel, dessen Ebene in der Ost-West-Linie auf der Grundebene senkrecht steht.

Ergebnis. Bogen und Winkel haben gleiche Zahl von Graden, Minuten und Sekunden; im Beispiele $x = y = 39^0\,55'\,36''$ und $t = 53^0\,58'\,43''$ oder in Zeit $3^h\,35^m\,54{,}9^s$.

17) M., Aufgaben 392*b*, 395.

---

18) M., Aufgaben 396, 397; 388, 389*b*, 390*b*, 394*a* und *b*; 399, 400.

19) In der heifsen Zone tritt nach Sonnenuntergang das Dunkel der Nacht schneller, als bei uns, ein. Um hiervon eine Vorstellung zu bekommen, werde berechnet, wieviel Minuten nach ihrem Untergange die Sonne an einem Orte des Äquators ebenso tief senkrecht unter dem Horizonte steht, wie hier bei $52^0\,30'$ nördlicher Breite eine Stunde nach Sonnenuntergang, und zwar 1) am 21. Juni bei der Deklination der Sonne $\delta = 23^0\,27'$ und 2) am 23. September bei $\delta = 0$. (Drei Figuren sind zu zeichnen. Man benutze den zuerst bestimmten Ausdruck für den Stundenwinkel t des halben Nachtbogens, um die Gleichung für den Stundenwinkel $(90^0 + x)$ zusammenzuziehen.)

Ergebnis. $\sin x = 2 \cos\varphi \, \sin(t - 7^1/_2{}^0) \sin 7^1/_2{}^0$ ergiebt 1) am 21. Juni $27^m\,9{,}7^s$ und 2) am 23. Sept. $36^m\,15{,}7^s$. Unsere langen Sommerabende verkürzen sich am Äquator auf die Hälfte der Zeit. Aber das Geniefsen der Abendruhe wird noch weit mehr vermindert durch den bei der Klarheit des tropischen Himmels schnell vorgehenden Wärmeverlust, der die Menschen bald ins Zimmer treibt.

20) Wie grofs ist die südliche Deklination der Sonne an dem Tage, an welchem durch die Strahlenbrechung der erste Sonnenstrahl genau im Ostpunkte erscheint? Bei welchem Azimute (vom Nordpunkte an gezählt) sieht man mittels der Strahlenbrechung dann den Sonnenmittelpunkt aufgehen? Die Strahlenbrechung $\beta = 35'$, der scheinbare Sonnenhalbmesser $\varrho = 16'$ und die Polhöhe $\varphi = 52^0\,31'$. (Zwei Figuren sind zu zeichnen).

Ergebnis. Die südliche Deklination (ohne Vorzeichen) erhält man aus $\sin\delta = \sin(\beta + \varrho)\sin\varphi$ und mit $s = {}^1/_2\,[90^0 + \delta + (\varphi + \beta)]$ und $u = {}^1/_2\,[90^0 + \delta - (\varphi + \beta)]$ das Azimut aus $\sin {}^1/_2\, a = \sqrt{\dfrac{\sin s \sin u}{\cos\varphi \cos\beta}}$. $\delta = 0^0\,40'\,28''$, $a = 90^0\,20'\,55''$. Der Sonnenmittelpunkt wird sichtbar erst 1,3 des scheinbaren Sonnenhalbmessers rechts vom Ostpunkte.

21) Wie lange dauert für einen Ort auf dem 80sten Breitenkreise nach der langen Polarnacht die Tageshelle an dem Tage, an welchem die Sonne mittags durch die Strahlenbrechung zum ersten Male wieder ganz sichtbar wird? Bei welchem Azimut erscheint der erste und bei welchem verschwindet der letzte Strahl? Die Zwischenzeit ist als Dauer der Tageshelle zu nehmen. Die Strahlenbrechung am Horizonte ist $\beta = 35'$ und der Halbmesser der Sonnenscheibe $\varrho = 16'$. Zur Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit ist mit $1 - 0{,}00273$ zu multiplizieren.

Ergebnis. Ohne Vorzeichen $\delta = 90^0 - \varphi + \beta - \varrho$,

$$\sin {}^1/_4\, t = \sqrt{\frac{\cos\beta \sin\varrho}{\cos\varphi \cos\delta}}, \qquad \sin a = \frac{\cos\delta}{\cos(\beta + \varrho)} \sin {}^1/_2\, t.$$

Dauer der Tageshelle $2^h\,31^m\,35^s$ mittlerer Zeit; Azimut, vom Südpunkte aus, $a = \mp 18^0\,41'\,1''$. Die Tageshelle dauert also doch schon $2^1/_2$ Stunden, und der Aufgangspunkt des ersten Strahles ist nur 4^0 von Süd-Südost entfernt.

22) Wie lange dauert an einem Orte auf φ^0 Breite das Untergehen der Sonne, wenn die Deklination ihres Mittelpunktes δ und ihr scheinbarer Halbmesser ϱ ist?

Die Strahlenbrechung beträgt für Punkte dicht unter dem Horizonte $\beta = 36'$. Man berechne nicht die Zeit des Anfanges und Endes, sondern entwickle eine Formel für die Zeitdauer. Beispiele: $\varphi = 52^0\,31'$, und 1) für den 21. Juni $\delta = 23^0\,27'$, $\varrho = 15'\,45{,}6''$ und 2) für den 23. September $\delta = 0$, $\varrho = 15'\,58''$.

Ergebnis. Zur Abkürzung sei

$$\tfrac{1}{2}\,[90^0 + \beta + (\varphi - \delta)] = a \qquad \tfrac{1}{2}\,[90^0 + \beta + (\varphi + \delta)] = c$$
$$\tfrac{1}{2}\,[90^0 + \beta - (\varphi - \delta)] = b \qquad \tfrac{1}{2}\,[90^0 + \beta - (\varphi + \delta)] = d$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\,(t_2 - t_1) = \frac{\cos\beta \sin\varrho}{2\sqrt{\sin a \sin b \cos c \cos d}}.$$

Für das zweite Beispiel vereinfacht sich der Nenner. Es dauert das Untergehen der Sonne

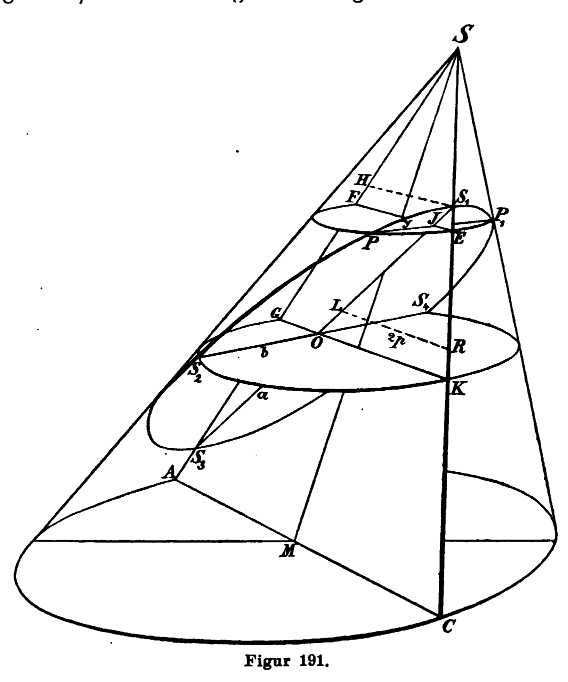
am 21. Juni	$4^m\ 38{,}3^s$
am 23. Sept.	3 29,9
Unterschied	$1^m\ \ 8{,}4^s$.

Hauptsächlich durch den vom Himmelsäquator fernen Stand der Sonne (zwischen den Himmelsmeridianen) zu Anfang des Sommers und Winters verlängert sich (für Berlin) das Auf- und Untergehen der Sonne um ein Drittel der Zeitdauer bei Anfang des Frühlings und Herbstes.

---

20. Glied. Kegelschnitte.

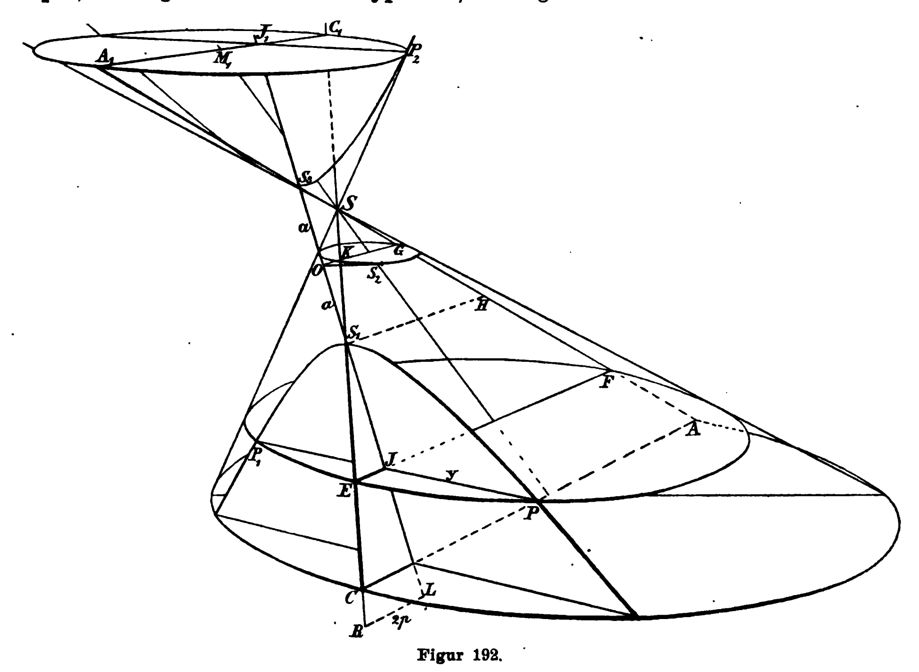
In derselben einfachen Weise, in welcher die Gleichung der Ellipse am Kegel selbst abgelesen wurde (14, 10), wollen wir nun, von beliebigem Achsenschnitte ausgehend, die Gleichungen der Kegelschnitte ableiten.



Figur 191.

1. Einleitung. Die Figuren 191—193 sind so entworfen, dafs der in der Zeichenebene liegende Achsenschnitt des schiefen Kegels der senkrechte ist; der Achsenschnitt SAC steht also schief auf dem Grundkreise des Kegels. Dieser schneidet den der Grundfläche gleichlaufenden Schnittkreis EPF in einem Durchmesser EF; und es wird durch irgend einen Punkt J desselben die auf dem Durchmesser EF rechtwinklige Sehne PP_1 gelegt. Nun werden im Achsenschnitte SAC drei gerade Linien gezogen: die erste JS_3 (Figur 191) schneidet die Seitenlinie SA selbst, die zweite JS_3 (Figur 192) trifft sie in der Verlängerung SA_1 im Scheitelkegel, die dritte JL (Figur 193) ist mit SA

gleichlaufend. Die durch die Gerade und die Sehne PP_1 bestimmte Ebene schneidet die Kegelfläche in drei verschiedenen krummen Linien, bei Figur 191 in einer **Ellipse**, bei Figur 192 in einer **Hyperbel**, bei Figur 193 in einer **Parabel**.



Figur 192.

2. Mittelpunktsgleichung der Ellipse und Hyperbel. Aus dem Kreise EPF hat man $PJ^2 = JE \cdot JF$.

Legt man durch den Halbierungspunkt O der gezogen Geraden S_1S_3 die der Grundfläche gleichlaufende Ebene, welche vom Achsenschnitt SAC in dem Durchmesser GK geschnitten wird, so liefert der Verhältnissatz

$$\frac{JE}{OK} = \frac{JS_1}{OS_1}$$

$$\frac{JF}{OG} = \frac{JS_3}{OS_3}$$

daher durch Multiplizieren

$$\frac{PJ^2}{OK \cdot OG} = \frac{JS_1 \cdot JS_3}{OS_1{}^2}.$$

In Figur 191 ist, als Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln, $\angle S_2OK = PJE = R$, also $OK \cdot OG = OS_2{}^2$, und in Figur 192 ist von O an den Kreis KG die Berührungslinie OS_2 zu legen, um auch zu haben $OK \cdot OG = OS_2{}^2$; mithin

$$\frac{PJ^2}{OS_2{}^2} = \frac{JS_1 \cdot JS_3}{OS_1{}^2}.$$

Bezeichnet man nun die Ordinate PJ mit y, die Abscisse JO mit x, ferner die Halbmesser OS_1 und OS_3 mit a, OS_2 mit b, so lautet diese Gleichung

für die Ellipse

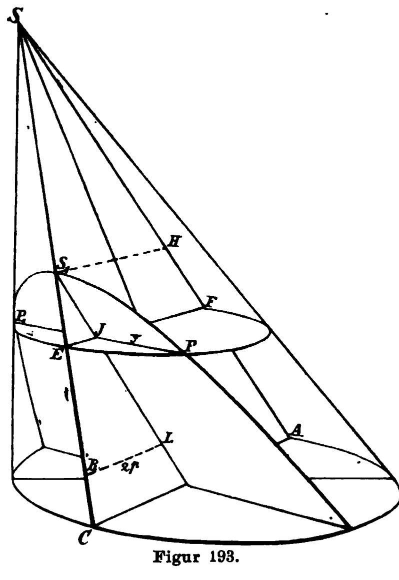
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{(a-x)(a+x)}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

für die Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{(x-a)(x+a)}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

also ist die **Gleichung der Ellipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

und die **Gleichung der Hyperbel** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$



Figur 193.

3. Scheitelgleichungen der drei Kegelschnitte. Man ziehe vom Scheitel S_1 aus $S_1H \parallel CA$, trage diese Strecke S_1H von S_1 aus auf dem Durchmesser S_1S_3 als S_1L ab*) und ziehe auch $LR \parallel AC$ bis zu der Seitenlinie SC, auf welcher der Scheitel S_1 liegt. Dann hat man durch den Verhältnissatz

$$JE = LR \cdot \frac{S_1J}{S_1L}$$

$$JF = S_1H \cdot \frac{S_3J}{S_3S_1}$$

und in Figur 193 nur $JF = S_1H$ also, da beim Multiplizieren S_1H gegen S_1L sich forthebt,

$$PJ^2 = LR \cdot \frac{S_1J \cdot S_3J}{S_3S_1}$$

und bei der Parabel $PJ^2 = LR \cdot S_1J.$ Bezeichnet man wieder PJ mit y, aber nun, vom Scheitel S_1 an, S_1J mit x, ferner LR mit $2p$ und S_3S_1 wie vorher mit $2a$, so wird die Gleichung

nach Figur 191 $\quad y^2 = 2p \cdot \frac{x(2a - x)}{2a}$

„ „ 192 $\quad y^2 = 2p \cdot \frac{x(2a + x)}{2a}$

„ „ 193 $\quad y^2 = 2p \cdot x$

also lautet die

Scheitelgleichung der Ellipse $\quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$

„ „ **Hyperbel** $\quad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$

„ „ **Parabel** $\quad y^2 = 2px.$

Anmerkung 1. Durch das Fehlen des zweiten Gliedes, $\frac{p}{a}x^2$, in der Parabelgleichung spricht sich das Übergehen der Ellipse durch die Parabel in die Hyperbel aus. Denn dreht man die Gerade S_1S_3 um S_1 so, dafs S_3 auf SA in der unter den Grundkreis sich fortsetzenden Kegelfläche in die Ferne rückt (Figur 191), so streckt sich die Ellipse immer länger, und es wird, wenn $S_1S_3 = 2a$ in gleiche Richtung mit SA übergeht, der Durchmesser $2a$, also auch a, unendlich grofs und macht

*) Die in den drei Figuren verkürzt sich darstellende Strecke S_1H ist ihrer wirklichen Länge nach als S_1L abgetragen.

den Bruch $\frac{p}{a}$ verschwindend klein und dadurch $\frac{p}{a}x^2$ zu Null; was notwendig ist, damit die Gröfse $\frac{p}{a}x^2$ aus dem Negativen ins Positive übergehen könne. Bei weiterem Drehen kommt der Schnittpunkt S_3 von oben her aus unendlicher Ferne auf A_1S (Figur 192) wieder heran; der anfangs aufserordentlich kleine Bruch $\frac{p}{a}$ läfst das Glied $\frac{p}{a}x^2$ aus Null nur sehr langsam heraus wachsen. Dreht man, von Figur 192 ausgehend, S_1S_3 in der Ebene des Achsenschnitts entgegengesetzt herum, so geht die Hyperbel durch die Parabel in die Ellipse über.

Anmerkung 2. Legt man in Figur 192 durch den Scheitel S des Kegels die der Hyperbelebene gleichlaufende Ebene, so schneidet sie die Kegelfläche in zwei Seitenlinien, welche der Hyperbelebene gleichlaufend sind. (**9**, 19, 1.)

Eine Schnittebene der Kegelfläche kann gleichlaufend sein 1) keiner Seitenlinie, 2) einer, 3) zwei Seitenlinien. Im ersten Falle schneidet sie alle Seitenlinien, ist also eine geschlossene krumme Linie, eine Ellipse; im zweiten ist sie in Richtung jener einen Seitenlinie offen, sie ist eine Parabel; im dritten Falle schneidet sie die jenseit jener zwei liegenden Seitenlinien erst in ihren Verlängerungen im Scheitelkegel; sie ist eine aus zwei getrennten Teilen bestehende krumme Linie, eine Hyperbel. Dreien sich schneidenden geraden Linien, die nicht in einer Ebene liegen, kann keine Ebene gleichlaufend sein; (**9**, 15) mehr als jene drei Fälle sind nicht möglich.

4. Grundeigenschaften der Kegelschnitte.

1) Legt man in jeder der drei Figuren 191—193 durch den Kegelschnitt noch mehrere der Kegelgrundfläche gleichlaufende Ebenen, so sind die neuen Winkel EJP als Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln dem gezeichneten Winkel EJP gleich, also auch Rechte; mithin wird jede Kreissehne PP_1 in ihrem Punkte J halbiert. Daher hat man den für alle drei Kegelschnitte geltenden Satz:

Die Mitten gleichlaufender Sehnen liegen in einem Durchmesser.

Anmerkung. Wenn Ellipse und Hyperbel durch die Parabel in einander übergehen, ist der Mittelpunkt O in unendliche Ferne gerückt. Nach diesem unendlich fernen Punkte ist die die gleichlaufenden Parabelsehnen halbierende Gerade S_1J gerichtet; sie kann daher auch ein „Durchmesser“ der Parabel genannt werden.

2) Zieht man bei der Ellipse oder Hyperbel durch P die dem Durchmesser S_1S_3 gleichlaufende Gerade, bis sie die Kurve in einem zweiten Punkte P_2 (Figur 192) schneidet und von dort $P_2J_1 \parallel PJ$ bis zum Durchmesser S_1S_3, so ist in der entstandenen Raute JPP_2J_1 $P_2J_1 = PJ = y$; mithin geht aus der Mittelpunktsgleichung für OJ_1 ein ebenso grofser Wert hervor, wie für OJ; also ist O die Mitte von JJ_1. Bei der Ellipse läuft der Durchmesser OS_2 in der Richtung der Gegenseiten JP und J_1P_2, ist also die Mittellinie der Raute und halbiert die Sehne PP_2. Bei der Hyperbel ist die Mittelinie von O her in Richtung der JP und J_1P_2 erst noch zu ziehen, welche auch hier die Sehne PP_2 halbiert. Da die Mittellinie durch den Mittelpunkt O der Hyperbel geht, hat man auch ihr die Bezeichnung „Durchmesser“ gegeben, wiewohl diese Gerade zwischen beiden Zweigen hindurch geht, also keine Sehne der Hyperbel ist.

Daher giebt es in der Ellipse und Hyperbel je zwei zusammengehörige Durch-

messer, von denen jeder die dem andern gleichlaufenden Sehnen halbiert. Zwei so zusammengehörige Durchmesser heifsen zugeordnete Durchmesser.*)

Von zwei zugeordneten Durchmessern der Ellipse oder Hyperbel halbiert jeder die dem andern gleichlaufenden Sehnen.

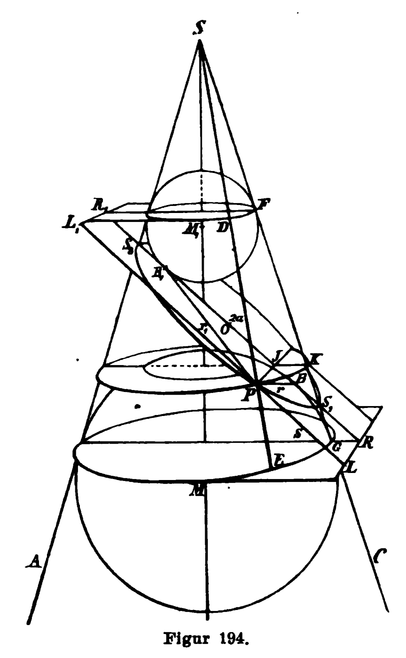
3) Von welchem Achsenschnitte des Kegels mufs man ausgehen, wenn die zugeordneten Durchmesser sich rechtwinklig scheiden sollen?

Wenn der Durchmesser S_2S_4 (Figur 191) den Durchmesser S_1S_3 rechtwinklig schneiden soll, so mufs die ihm gleichlaufende Sehne PP_1 es auch thun. Dann steht PJ nicht nur auf EF, sondern auch auf S_1S_3, also auf der Ebene SAC senkrecht, deshalb auch die durch PJ gehende Kreisebene EPF; oder, umgekehrt ausgesprochen: dann steht der Achsenschnitt SAC auf der Kreisebene, folglich auch auf der Grundfläche des Kegels senkrecht.

Der senkrechte Achsenschnitt giebt die sich rechtwinklig schneidenden zugeordneten Durchmesser.

Diese beiden Durchmesser heifsen die Achsen der Ellipse oder der Hyperbel.

4) Zieht man an zwei getrennt liegende Kreise die beiden äufseren Berührungslinien und dreht die Figur um die Achse MM_1, so entsteht ein gerader Kegel. Zieht man in dem in der Zeichenebene liegenden Achsenschnitte eine innere Berührungslinie RR_1 und errichtet in ihr die auf dem Achsenschnitte senkrechte Ebene, so wird sie eine Berührungsebene beider Kugeln und schneidet die Kegelfläche in einer Ellipse. (Ein Kreis kann die Schnittfigur nicht sein, weil die Wechselschnitte im geraden Kegel mit der Grundfläche gleichlaufend sind.) Man verbinde irgend einen Punkt P der Ellipse mit den Berührungspunkten der Kugeln und mit der Spitze des Kegels und verlängere diese Seitenlinie SP, bis sie den Berührungskreis der Kugel um M in E trifft; durch den Berührungskreis der Kugel um M_1 geht sie im Punkte D. Dann sind, als Berührungslinien von einem Punkte an eine Kugel, PB_1 und PD gleich; ebenso PB und PE; mithin



Figur 194.

$$PB_1 + PB = DE = FG.$$

Es ist aber der zwischen den äufseren Berührungslinien liegende Abschnitt S_1S_3 der inneren Berührungslinie gleich der Strecke der äufseren zwischen den Berührungspunkten F und G (1. T., **13**, 6) und S_1S_3 ist die grofse Achse $2a$ der Ellipse; mithin hat man

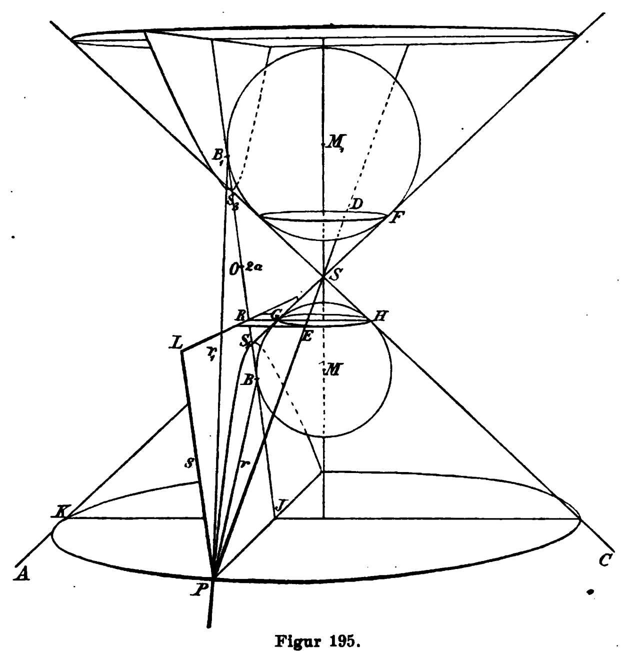
$$r_1 + r = 2a.$$

Da P ein beliebiger Punkt der Ellipse war, so ist bei jedem die Summe seiner Ent-

*) Konjugierte Durchmesser sind zugeordnete Durchmesser. (Von conjugare, zusammenjochen, verbinden.)

fernungen von B_1 und B dieselbe Gröfse $2a$. Mithin sind die Berührungspunkte B_1 und B der Kugeln die Brennpunkte der Ellipse.

Legt man an die beiden getrennt liegenden Kreise um M und M_1 (Figur 195) die beiden inneren Berührungslinien, so beschreiben sie bei Umdrehung der Figur um die Achse MM_1 eine Scheitelkegelfläche. Zieht man nun in dem in der Zeichenebene liegenden Achsenschnitte eine äufsere Berührungslinie und errichtet in ihr die auf dem Achsenschnitte SAC senkrechte Ebene, so wird sie eine Berührungsebene beider Kugeln und schneidet die Scheitelkegelfläche in einer Hyperbel. Verbindet man auch hier irgend einen Punkt P der Hyperbel mit den Berührungspunkten B_1 und B der Kugeln und mit der Spitze S des Kegels, so hat man ebenso $PB_1 = PD$ und $PB = PE$. Hier aber mufs man die zweite Gleichung von der ersten abziehen, um auf den zwischen den Berührungskreisen befindlichen Abschnitt der Seitenlinie zu kommen:



Figur 195.

$$PB_1 - PB = DE = FG$$

und dieser Strecke zwischen den Berührungspunkten ist der zwischen den inneren Berührungslinien liegende Abschnitt der äufseren Berührungslinie gleich: $S_1S_3 = FG$.*) Die beide Hyperbelzweige verbindende Hauptachse S_1S_3 wird mit $2a$ bezeichnet. Also hat sich ergeben

$$r_1 - r = 2a.$$

Bei jedem Hyperbelpunkte ist der Unterschied der Entfernungen von zwei festen Punkten dieselbe Gröfse, nämlich die Hauptachse $2a$.

Wegen dieser Beziehung zur Ellipse werden die festen Punkte B und B_1 die Brennpunkte der Hyperbel genannt.**)

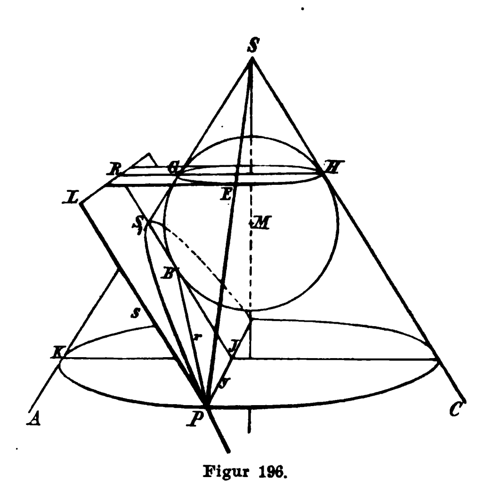
5) Da für einen Parabelschnitt nur eine die Kegelfläche berührende Kugel möglich ist, mufs die Untersuchung für die Parabel abgeändert werden, doch in einer Weise, die auch für die beiden andern Kegelschnitte möglich ist.

---

*) Für das Dreieck SS_1S_3 sind die Kreise um M und M_1 zwei seiner anbeschriebenen Kreise. Die Verlängerung jeder Dreiecksseite bis zum Berührungspunkte des anbeschriebenen Kreises ergänzt sie zum halben Umfange s des Dreiecks. (1. T., 13, 6, 3 mit Figur 99.) Also ist $SF = s - SS_1$ und $SG = SH = s - SS_3$, zusammen $FG = 2s - SS_1 - SS_3 = S_1S_3$.

**) Die unter 4) und 5) angegebenen Entwicklungen rühren vom Belgier Dandelin her; durch Dupin sind sie mehr bekannt geworden.

In Figur 196 ist die Ebene des Berührungskreises bis zur Parabelebene erweitert; ihre Schnittlinie ist RL. Es soll der Abstand eines beliebigen Parabelpunktes P von dieser Schnittlinie mit seinem Abstande vom Kugelberührungspunkte B verglichen werden.



Figur 196.

Bei Umdrehung der Figur um SM beschrieb GH eine zur Kegelachse rechtwinklige Ebene; also steht die Ebene des Berührungskreises auf dem Achsenschnitte SAC senkrecht, die Parabelebene auch; also steht LR auf der Ebene SAC senkrecht; dasselbe gilt von der Schnittlinie PJ, und PL wurde auf RL gefällt; daher ist $PLRJ$ ein Rechteck, also $PL = JR$. Nun ist $PB = PE = KG$ und aus den beiden gleichschenkligen Dreiecken hat man $KG = JR$, und damit $PB = PL$. Bei der Parabel ist der Abstand $r = s$. Die Gerade RL heifst die Richtlinie der Parabel, B ist ihr Brennpunkt.

Jeder Parabelpunkt hat vom Brennpunkte und von der Richtlinie gleichen Abstand.

Bei der Ellipse und Hyperbel werden die Richtlinien RL ebenso erhalten. (Figur 194 und 195.) Bei ihnen ist das Verhältnis $r:s$ zu bestimmen. Für beide folgt aus $r = PE = KG$ und $s = JR$

$$\frac{r}{s} = \frac{KG}{JR} \text{ und nach dem Verhältnissatze ist } \frac{KG}{JR} = \frac{S_1G}{S_1R}$$

also, mit $S_1G = S_1B$

$$\frac{r}{s} = \frac{S_1B}{S_1R}.$$

Diese für alle Punkte des Kegelschnitts geltende Gleichung lautet für den Punkt S_3

$$\frac{S_3B}{S_3R} = \frac{S_1B}{S_1R}, \text{ woraus für die Ellipse}$$

$$\frac{S_3B - S_1B}{S_3R - S_1R} = \frac{S_1B}{S_1R} \text{ und für die Hyperbel } \frac{S_3B + S_1B}{S_3R + S_1R} = \frac{S_1B}{S_1R};$$

also, da man den gegenseitigen Abstand der Brennpunkte B_1B mit $2e$ bezeichnet,

$$\frac{2e}{2a} = \frac{S_1B}{S_1R}$$

mithin ergiebt sich

$$\frac{r}{s} = \frac{e}{a}.$$

Dies lehrt: **Läuft ein Punkt in einer Ebene so, dafs seine Entfernungen von einem festen Punkte und einer nicht durch diesen gehenden geraden Linie stets dasselbe Verhältnis behalten, so beschreibt er einen Kegelschnitt, und zwar, wenn das Verhältnis < 1 ist, eine Ellipse, wenn es $= 1$ ist, eine Parabel, und wenn es > 1 ist, eine Hyperbel.**

6) Bei der Ellipse und Hyperbel ist der Abstand der Richtlinie vom Mittelpunkte $= \frac{a^2}{e}$.

Bw. Aus obiger Gleichung $\frac{S_1B}{S_1R} = \frac{e}{a}$ folgt durch $\frac{S_1B}{e} = \frac{S_1R}{a}$

$$\frac{S_1B + S_1R}{e + a} = \frac{S_1B}{e}, \quad \text{oder} \quad BR = \frac{e + a}{e} S_1B.$$

Bei der Ellipse ist $S_1B = a - e$ und bei der Hyperbel $e - a$; demnach bei der

Ellipse $BR = \frac{a^2 - e^2}{e} = \frac{a^2}{e} - e$, also $OR = \frac{a^2}{e}$ und bei der

Hyperbel $BR = \frac{e^2 - a^2}{e} = e - \frac{a^2}{e}$, also $OR = \frac{a^2}{e}$.

7) Die im Brennpunkte stehende Ordinate der Ellipse und Hyperbel ist

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Dies folgt aus der Mittelpunktsgleichung, da die zugehörige Abscisse $x = e$ ist.

Bezeichnet man bei der Parabel den Abstand des Brennpunktes von der Richtlinie mit p, so ist die im Brennpunkte stehende Ordinate $= p$.

Die doppelte Ordinate, $2p$, also die durch den Brennpunkt in Richtung der Ordinaten zu ziehende Sehne, heifst der Parameter des Kegelschnitts.*)

8) Aus den Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und Hyperbel (Nr. 2) kann man ihre Scheitelgleichungen ableiten, indem man statt des $OJ = x$ (da nun S_1J als Abscisse x genommen werden soll) einsetzt bei der Ellipse (Figur 191) $a - x$, und bei der Hyperbel (Figur 192) $a + x$. Schreibt man dann für $\frac{b^2}{a}$ die in 7) eingeführte Gröfse p, so lautet die

Scheitelgleichung der Ellipse $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$

und " " Hyperbel $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$

und man sieht, dafs die in Figur 191 und 192 im Achsenschnitte hergestellte Strecke LR so grofs ist, wie der Parameter des Kegelschnitts (wenn der Achsenschnitt der senkrechte ist).

Für die Parabel folgt dies aus Figur 196 mittels der Grundeigenschaft $r = s = JR = x + {}^1/_2p$ durch das hier rechtwinklige Dreieck PJB

$$y^2 = (x + {}^1/_2p)^2 - (x - {}^1/_2p)^2 = 2px.$$

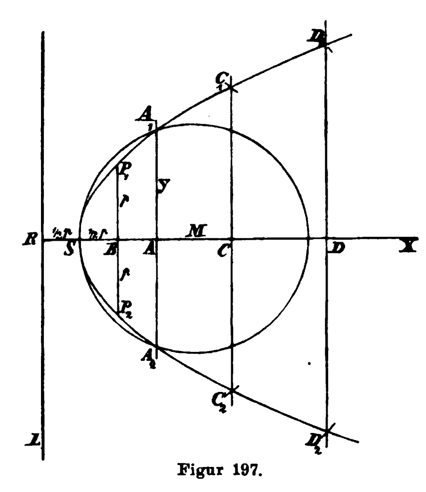
5. Das Zeichnen der als Kegelschnitte erhaltenen krummen Linien.

Zur Herstellung benutzt man ihre Grundeigenschaften: bei der Parabel $r = s$, bei der Ellipse $r_1 + r = 2a$ und bei der Hyperbel $r_1 - r = 2a$.

1) Man zeichnet für die Parabel zuerst die Richtlinie RL, nimmt aufserhalb derselben den Brennpunkt B an und fällt von B auf RL die Senkrechte BR, welche die Achse RX der Parabel wird. Mitten zwischen B und R hat man den Scheitel S

---

*) Im Worte Parameter liegt der Ton auf der drittletzten Silbe, die vorletzte Silbe ist kurz.



Figur 197.

der Parabel. Dann zieht man zwischen S und X beliebig viele mit der Richtlinie gleichlaufende gerade Linien, trägt zunächst auf der durch B gehenden nach beiden Seiten $BR = p$ ab und schneidet dann mittels des Zirkels mit RA vom Brennpunkte B aus in die Senkrechte A bei A_1 und A_2 ein, in die bei C mit RC bei C_1 und C_2 und so hinreichend viele, um aus freier Hand mit gut gespitztem Bleistifte nach der Folge der Schnittpunkte die Parabel zeichnen zu können.

Mifslich für genaue Herstellung ist die Biegung der Parabel beim Scheitel S. Deshalb wollen wir die Krümmung der Parabel beim Scheitel bestimmen.

Um einen Punkt M der Achse, welchen man nicht nahe beim Scheitel gewählt hat, beschreibe man mit seinem Abstande vom Scheitel, $MS = r$, einen Kreis. Diesen berührt die Parabel im Scheitel von innen, und er schneidet sie noch in zwei Punkten mit derselben Abscisse, in A_1 und A_2. Für jede Ordinate y des Kreises gilt die Gleichung $y^2 = x(2r - x)$ und für jede der Parabel $y^2 = 2px$.
Für die den beiden krummen Linien gemeinsamen Punkte ist y dasselbe. Für sie ist also

$$x(2r - x) = 2px$$

aus welcher Gleichung die Abscissen der gemeinsamen Punkte hervorgehen. Die erste Wurzel dieser Bestimmungsgleichung ist $x = 0$; sie giebt den Scheitel als den Berührungspunkt beider an. Die Abscisse der Schnittpunkte hat man in

$$2r - x = 2p.$$

Will man unter jenen beliebigen Kreisen denjenigen zeichnen, welcher durch die Endpunkte P_1 und P_2 des Parameters geht, so hat man $x = {}^1/_2 p$ zu nehmen und findet seinen Halbmesser $r = 1\,{}^1/_4 p$, welcher von S aus auf der Achse abzutragen ist. Sollen die Schnittpunkte so weit an den Scheitel herankommen, dafs ihre Abscisse nur ${}^1/_{100} p$ wird, so vermindert sich der Kreishalbmesser auf $1\,{}^1/_{200} p$. Nun sollen die Schnittpunkte Nachbarpunkte des Scheitels werden; ihr x mufs in Null übergehen. Dabei nimmt r den besonderen Wert ϱ an. Der mit $\varrho = p$ beschriebene Kreis hat dann drei Nachbarpunkte, also zwei Bogenteilchen mit der Parabel gemein, stellt also in seinem gleichmäfsig gekrümmten weiteren Verlaufe die Rundung der Parabel am Scheitel deutlich vor Augen. Der Halbmesser der Krümmung am Scheitel der Parabel ist $\varrho = p$.

Diesem Kreise bleibt die Parabel anfangs so nahe, dafs sie selbst bei feinster und nicht übertrieben grofser Zeichnung, auf etwa 30^0 nach beiden Seiten von S von ihm nicht zu unterscheiden ist. Man wird also beim Zeichnen der Parabel gleich nach Beginn, wo man für BP_1 und BP_2 p im Zirkel hat, $SA = p$ abschneiden und um A den Krümmungskreisbogen von etwa 60^0 beschreiben und nicht weiter, da man an P_1 und P_2 das Fortgehen der Parabel sieht.

2) Auch beim Zeichnen der Ellipse*) und Hyperbel wird man den Halbmesser

*) Die Herstellung der Ellipse mittels eines Fadens (1. T., 1, 5, 2) wird nicht genau genug, weil der Faden beim Spannen sich mehr und mehr reckt, auch die richtige Haltung des Bleistifts sich leicht ändert.

der Krümmung beim Scheitel benutzen und zu seiner Bestimmung die Scheitelgleichung nehmen. (Vergl. Figur 197.) Nachdem aus

$$x(2r - x) = 2px \mp \frac{p}{a}x^2$$

die Wurzel $x = 0$ für den Scheitel als Berührungspunkt beseitigt ist, soll die Abscisse der Schnittpunkte in

$$2r - x = 2p \mp \frac{p}{a}x$$

auch in Null übergehen, wobei r zu einem besonderen Werte ϱ abnimmt. Also ist der Krümmungshalbmesser der beiden Bogenteilchen am Scheitel der Hauptachse in jedem der beiden Kegelschnitte $\varrho = p$.

Zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers beim Scheitel der kleinen Achse der Ellipse (Figur 198) zähle man auf S_4S_2 vom unteren Scheitel S_4 aus die Ordinaten, so dafs z. B. für den Punkt D die Strecke S_4D die Ordinate y ist; dann hat das alte y, OD, den Wert $(y - b)$ und die Mittelpunktsgleichung lautet

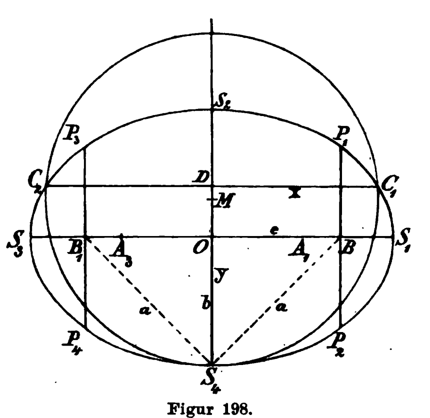
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1,$$

woraus hervorgeht $x^2 = 2\frac{a^2}{b}y - \frac{a^2}{b^2}y^2$

und für jeden Punkt des Kreises um M (auf der oberen Halbachse), den man mit $MS_4 = r$ beschreibt, gilt die Gleichung

$$x^2 = y(2r - y)$$

so dafs die Ordinaten der dem Kreise und der Ellipse gemeinsamen Punkte hervorgehen aus der Gleichung



Figur 198.

$$y(2r - y) = 2\frac{a^2}{b}y - \frac{a^2}{b^2}y^2$$

zunächst $y = 0$ für den Berührungspunkt S_4, und dann soll das in

$$2r - y = 2\frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b^2}y$$

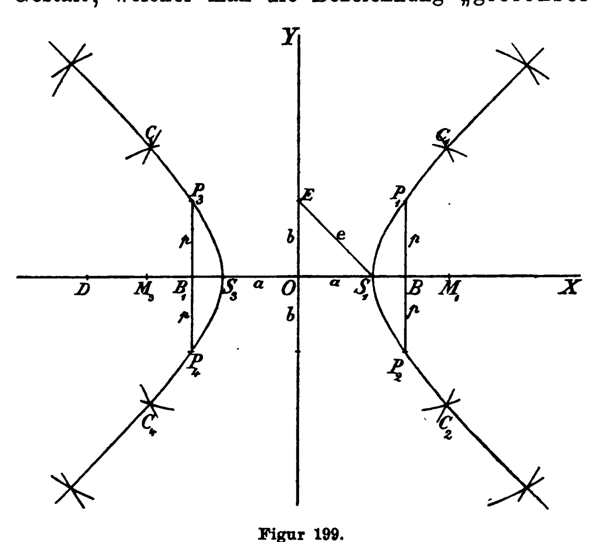
stehende y der Schnittpunkte C_1 und C_2 auch in Null übergehen, damit die Schnittpunkte Nachbarpunkte von S_4 werden. Bei deren Heranrücken vergröfsert sich r bis auf den besonderen Wert ϱ_b und es wird

$$\varrho_b = \frac{a^2}{b}; \text{ während } \varrho_a = p = \frac{b^2}{a} \text{ war. [Nr. 4, 7).]}$$

Der Abstand der Brennpunkte $BB_1 = 2e$ ist beliebig grofs anzunehmen (die beständige Summe $r_1 + r = 2a$ mufs gröfser als $2e$ sein). Setzt man die Brennpunkte zu nahe bei einander, so wird die Ellipse nahe kreisrund und nimmt man sie zu weit von einander, so wird die Ellipse recht platt. Die Ellipse schönster Form ist diejenige, bei welcher die Halbachsen sich wie Eckenlinie und Seite eines Quadrates verhalten, also $a^2 = 2b^2$ ist. (Die in Figur 198 gezeichnete ist eine solche.) Hierdurch erhält diese Ellipse die besondere Eigenschaft, dafs bei ihr $e = \sqrt{a^2 - b^2} = b$ ist, und dafs die Krümmungshalbmesser an ihren Scheiteln $\varrho_b = 2b$ und $\varrho_a = {}^1/_2 a$ werden. Um also eine Ellipse schönster Form zu zeichnen, trägt man auf zwei

sich rechtwinklig schneidenden Geraden vom Schnittpunkte O aus die gewählte kleine Halbachse b ab und hat dadurch die Brennpunkte B und B_1 und die Scheitel S_2 und S_4. Nun beschreibt man um S_2 mit S_2S_4 den Krümmungskreisbogen beim unteren Scheitel etwa 30^0 weit nach rechts und links, darauf ebenso um S_4 bei S_2. Dann schneidet man $S_4B = a$ vom Mittelpunkte O aus nach beiden Seiten als grofse Halbachse ab, (Figur 198) halbiert diese Strecken in A_1 und A_3 und errichtet den halben Parameter solcher Ellipse, $p = {}^1/_2 a$, in den Brennpunkten B und B_1 nach beiden Seiten der grofsen Achse. Diese 4 Endpunkte P lassen erkennen, wie weit man nun um die Krümmungsmittelpunkte A_1 und A_3 mit ${}^1/_2 q$ die Kreisbogen von den Scheiteln S_1 und S_3 aus ziehen darf, und geben an, wie man durch sie hin die Rundung der Ellipse aus dem ersten in den zweiten Kreisbogen mit dem Bleistift überzuführen hat. Bei einer so gestalteten Ellipse braucht man um die Brennpunkte B und B_1 mit r und r_1 gemäfs $r_1 + r = 2a$ gar keine Kreuzbogen zu schlagen, was bei der Hyperbel immer stattfinden mufs.

3) Wählt man beim Zeichnen einer Hyperbel $b = a$, so entsteht eine besondere Gestalt, welcher man die Bezeichnung „gleichseitige" Hyperbel gegeben hat. Durch $b = a$ entspricht sie dem Kreise unter den Ellipsen, und durch $e = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$ wird sie die Hyperbel schönster Form. (Eine solche ist in Figur 199 gezeichnet.) Bei ihr wird der Halbmesser der Krümmung an den Scheiteln $p = \frac{b^2}{a} = a$. Nachdem man a und b von O aus auf den sich rechtwinklig schneidenden Achsen abgetragen und durch $ES_1 = e$ B und B_1 angegeben hat, errichtet man p in diesen Punkten, macht S_1M_1 und $S_3M_3 = p$ und beschreibt mit p um M_1 und M_3 die Krümmungskreisbogen bei S_1 und S_3 nicht zu weit, da die Hyperbel durch die schon nahen Endpunkte P des Parameters gehen mufs. Hinter diesen macht man mit beliebiger Zirkelöffnung BC_1 einen kurzen Bogen bei C_1 und C_2 und sogleich auch von B_1 aus bei C_3 und C_4, trägt diesen Halbmesser als S_3D ab, nimmt DS_1 in den Zirkel (da $r_1 - r = 2a$ werden mufs) und schneidet von B_1 her bei C_1 und C_2, und von B aus bei C_3 und C_4 in die ersten Bogen ein. So erhält man zugleich 4 Punkte der Hyperbel. Hat man dann noch 4 Punkte bestimmt, so sind es genug; denn die Zweige der Hyperbel strecken sich weiterhin auffallend gerade.



Figur 199.

Man zeichne eine Hyperbel, bei welcher $b < a$ ist, und eine mit $b > a$, um die Änderung der Gestalt kennen zu lernen.

Anmerkung. Man beschreibe über dem Brennpunktsabstande BB_1 als Durchmesser einen Kreis und ziehe auf OX die Senkrechte in einem der Scheitel S bis zum Schnitt mit dem Kreise. Die nach den beiden Schnittpunkten gehenden Halbmesser e

geben, nach beiden Seiten bis ins Unendliche verlängert, zwei gerade Linien, an welche die Zweige der Hyperbel immer näher herangehen. Es wird nämlich die Strecke der Senkrechten, vom Scheitel bis zum Kreise, $=\sqrt{e^2 - a^2}$, also $= b$, und darum findet man für irgend einen fernen Punkt einer der beiden Geraden die Ordinate Y aus seiner Abscisse x als

$$Y = \frac{b}{a}x$$

während für das Stück der Linie Y, welches Hyperbel-Ordinate y ist, hervorgeht aus der Hyperbelgleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2.$$

Zieht man diese Gleichung von der quadrierten vorhergehenden ab, so bleibt

$$Y^2 - y^2 = b^2, \qquad \text{woraus} \qquad Y - y = \frac{b^2}{Y + y}.$$

Der Nenner dieses Bruches wächst, wenn der Punkt auf der unendlich langen Geraden in immer gröfsere Ferne rückt, sehr schnell, während der Zähler derselbe bleibt; also wird das Stückchen $Y - y$ für sehr ferne Punkte ganz aufserordentlich klein.

Wie sehr die Hyperbel an diese beiden Geraden in weiter Ferne herankommen mufs, ersieht man aus Folgendem. Man lasse die Figur um die Hauptachse OX sich drehen. Dann beschreibt das Stückchen $Y-y$ einen ebenen Kreisring, $\pi Y^2 - \pi y^2$, und dieser ist, nach obiger Gleichung, $= \pi b^2$, also stets gleich der von b um den Scheitel beschriebenen Kreisfläche. Wie aufserordentlich schmal müssen also die in der Ferne sich sehr ausweitenden Kreisringe werden, wenn sie doch nur so klein bleiben dürfen, wie diese Kreisfläche! Bei Umdrehung der Figur um die Achse OY entstehen in gleicher Weise Kreisringe, die alle $= \pi a^2$ sind.

Man sieht, dafs die beiden Geraden die Hyperbel bis ins Unendliche begleiten. Sie führen den Namen Asymptoten.*) Sie erleichtern das Zeichnen der Fortsetzung der Hyperbel, da man nur an ihnen entlang zu ziehen braucht.

6. Übungen.

1) Martus, Aufgaben 687, 689, 706. 714—718; 721, 722*A*, 723*a*—724, 735—737. 743; 745—748.

2) Der untere Rand des Trägers einer Lampenglocke hat im Innern einen Halbmesser von r cm, und h cm über der Mitte dieses Kreises beginnt das helle Leuchten der Flamme. Der Schatten des Randes fällt auf eine d cm vom Kernpunkte der Flamme entfernte Wand. Welche Gestalt hat dort die Schattengrenze und wie lautet die Mittelpunktsgleichung dieser krummen Linie?

[Die eine Halbachse ist d, die andere nur $\frac{h}{r}d$.]

3) Dreht man eine Parabel um ihre Achse, so entsteht ein Umdrehungs-Paraboloid. Eine rechtwinklig durch die Achse gelegte Ebene begrenzt als Grundfläche einen Paraboloid-Abschnitt. Man bestimme den Inhalt solches Abschnitts durch seine Grundfläche und Höhe mittels des Cavallierischen Satzes von den Querschnitten, **15**, 22, 28. — Aus dem Ergebnis folgt ebenso leicht die Inhaltsformel einer Paraboloidschicht, ausgedrückt durch ihre Grund- und Deckfläche und ihre Höhe, oder durch ihre in halber Höhe laufende Mittelfläche und die Höhe.

*) Nach der Zusammensetzung des aus dem Griechischen kommenden Wortes ist abzubrechen Asym-ptote.

[Wie das erste Ergebnis der Formel für den Dreiecksinhalt, so entspricht das zweite dem Ausdrucke für den Inhalt eines Trapezes, ist also viel einfacher als bei einem Pyramidenstumpf oder einer Kugelschicht. (**15**, 19, *b*.)]

4) Hieraus und aus **15**, 19, *b* folgt sogleich der Satz:

Beschreibt man um einen Punkt in der Achse einer Parabel einen Kreis, welcher die Parabel in vier Punkten schneidet, so liefern die entstandenen Sicheln bei Umdrehung der Figur um die Achse einen Ring, welcher gleich einer Kugel von derselben Höhe ist.

Da das Ergebnis von r und p unabhängig ist, so hat man den Satz: Zieht man durch viele um denselben Mittelpunkt beschriebene Kreise zwei gleichlaufende Gerade und legt immer durch die vier demselben Kreise angehörigen Schnittpunkte eine Parabel, so liefern alle Sicheln bei der Umdrehung Ringe von gleicher Gröfse, trotz ihrer sehr verschiedenen Weite. (Das Zeichnen des halben Parameters solcher Parabel erfolgt bequemer, als durch die Rechnungslösung, von der Mitte der Sehne aus mittels eines rechtwinkligen Dreiecks, welches deckbar wird dem Parabeldreiecke, worin $y^2 = 2x \cdot p$ ist.) Verschiebt man die zweite der gleichlaufenden Geraden so weit, dafs der Mittelpunkt der Kreise mitten zwischen beiden ist, so rückt dabei der Scheitel jeder Parabel in immer gröfsere Ferne und jede Parabel geht in zwei gleichlaufende gerade Linien über. Mithin ist dieser Satz von Ringen mit paraboloidischer Innenfläche die Verallgemeinerung des Satzes (M., Aufg. 560 *a*), bei welchem mitten durch eine Kugel ein walzenförmiger Kern herausgebohrt wird. (Bei kegelförmiger Ausbohrung kommt statt der Kugel ein Sphäroid. M. Aufg. 560 *b*.)

5) Um den Brennpunkt eines Umdrehungsparaboloides beschreibe man mit den Halbmessern r und r_1 Kugeln, welche die Paraboloidfläche schneiden, und berechne den Inhalt des Schalenstücks innerhalb des Paraboloides zwischen den Kugelkappen, deren Flächeninhalt mit G und D und deren gegenseitiger Abstand mit h bezeichnet werden soll. Bei der Deutung des Ergebnisses ist auch die in halber Höhe laufende Mittelfläche der Kugelschale zu beachten. (Man ziehe die Richtlinie der Parabel.)

Ergebnis. $J = \pi(r^2 - r_1^2) \cdot p = {}^1/_2 (G + D) \cdot h = M \cdot h$. Jeder dieser drei Ausdrücke läfst eine gute Deutung zu. Das Ergebnis entspricht dem bei einer Paraboloidschicht. Deren Grund- und Deckfläche können also auch kugelig aus- und eingebogene Flächen sein.

6) Einen geraden Paraboloidabschnitt durch eine zu seiner Höhe h rechtwinklige Ebene nach dem goldenen Schnitte zu teilen, so dafs das an der Grundfläche liegende Stück Mittelglied wird zwischen dem am Scheitel und dem Ganzen.

(Im Ergebnis überrascht die Umkehrung der Ordnung.)

7) M., Aufgaben 707 *A* bis 712.

8) Einem Umdrehungsparaboloide einen regelmäfsigen Vierflächner so einzubeschreiben, dafs ein Eckpunkt im Scheitel liegt. Wie grofs wird die Höhe des Vierflächners? Bei der entsprechenden Aufgabe für die Ellipse und Hyperbel wird man auch die Scheitelgleichung nehmen, und das Ergebnis durch die Kugel auf Richtigkeit prüfen. Auch denke man an die Ellipse schönster Form, endlich an die gleichseitige Hyperbel.

Antwort beim Paraboloide $x = 4p$. Die Ergebnisse für die beiden andern gehen in dieses über, wenn man a unendlich grofs werden läfst.

9) Diejenige Gerade durch eine Ellipse in Richtung eines von zwei zugeordneten Durchmessern zu ziehen, von welcher die Ellipse und die beiden Linien, die seine End-

punkte mit einem Scheitel des andern Durchmessers verbinden, drei gleiche Strecken abgrenzen.

(Die Bestimmungsgleichung läfst sich geschickt behandeln und ergiebt $x = 0{,}8\,a$, also unabhängig von b. Auch durch die andere Hälfte der Ellipse läuft bei $0{,}8\,a$ eine Gerade, von welcher dieselben drei Linien drei gleiche Strecken abgrenzen.)

10) In einer Ellipse zieht man von einem Endpunkte der grofsen Achse eine Sehne, welche den über der kleinen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreis berührt. Wie grofs sind die Teile, in welche diese Sehne durch den Berührungspunkt zerlegt wird, ausgedrückt durch die Halbachse a und den halben Brennpunktsabstand e? [Das Auflösen der Gleichung zweiten Grades kann vermieden werden durch Benutzung der Eigenschaft ihrer Wurzeln.]

Ergebnis: Der kleinere Teil der Sehne ist $\frac{a^2 - e^2}{a^2 + e^2} e$.

11) Durch den Mittelpunkt einer Hyperbel den Kreis zu beschreiben, welcher die Hauptachse und beide Arme berührt. (Man denke zunächst einen Kreis, welcher die Zweige der Hyperbel noch schneidet, und berechne die Ordinaten der Schnittpunkte. Deren Ausdruck läfst das Geforderte erkennen.)

Ergebnis. Das vom Brennpunkte auf eine Asymptote gefällte Lot trifft die Ordinatenachse im Mittelpunkte des gesuchten Kreises. Der Abstand der Berührungspunkte vom Mittelpunkte der Hyperbel ist $a\sqrt{2}$, also unabhängig von b. Dies lehrt? —

12) Den Parameter derjenigen Parabel zu bestimmen, welche einen Brennpunkt einer Hyperbel zum Scheitel hat und die Hyperbel zu beiden Seiten der gemeinsamen Achse berührt. (Man denke zunächst eine Parabel, welche die Hyperbel noch schneidet, und berechne die Abscissen der Schnittpunkte.)

Ergebnis. Die Abscisse der Berührungspunkte ist $x = e + b$; der halbe Parameter der Parabel, $p = \frac{b^2}{a^2}(e + b)$, wird mittels des halben Asymptotenwinkels α nach $p = x \operatorname{tg}^2 \alpha$ bequemer gezeichnet, als nach $p = \frac{b^2}{e - b}$.

Gröfste oder kleinste Werte.

13) Um einen Würfel das kleinste Umdrehungs-Ellipsoid zu beschreiben.

14) Bei einem Würfel von der Kante $2c$ das kleinste unter den Ellipsoiden zu bestimmen, welche die in der Grundfläche und in der Deckfläche liegenden Kanten in der Mitte berühren.

Ergebnis. Der Achsenschnitt des kleinsten Ellipsoides ist eine Ellipse schönster Form, deren grofse Achse auf der Grund- und Deckfläche des Würfels senkrecht steht.

15) Eine Ellipse hat sich um ihre grofse Achse gedreht. Welches ist der gröfste unter den Kegeln, die ihren Scheitel im Mittelpunkte haben und deren Grundkreis ein zur grofsen Achse senkrechter Schnitt ist? Welcher von diesen Kegeln hat den gröfsten Mantel? Wie weit steht dessen Seitenlinie vom Brennpunkte ab? (Einen Kegel mit gröfster Oberfläche giebt es nicht.)

Grenzbedingung. Für die zweite Frage mufs in der Ellipse $b < e$ sein.

16) Von einer Parabel hat man durch eine fern vom Scheitel liegende Sehne einen Abschnitt begrenzt und den die Sehne halbierenden Durchmesser gezogen. (**20**, 4, 1, Anm.) Es werden dem Abschnitte Rauten einbeschrieben, worin eine

Seite der Sehne und zwei Seiten dem Durchmesser gleichgerichtet sind. Man soll diejenige unter ihnen ermitteln, welche den gröfsten Umfang hat.

Ergebnis. $x = 2p$, unabhängig von der Entfernung der Sehne.

17) Auf der Achse einer Parabel ist in dem Abstande m vom Scheitel ein Punkt gegeben. Man soll zwischen ihm und dem Scheitel eine zur Achse senkrechte Sehne ziehen, welche die Grundseite eines mit der Spitze im gegebenen Punkte ruhenden Dreiecks wird. In welchem Punkte der Achse ist diese Sehne zu errichten, damit der Inhalt des Dreiecks am gröfsten werde, und in welchem, damit der Umfang des Dreiecks einen gröfsten oder kleinsten Wert erhalte? Man nehme die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks als Unbekannte. Beispiel: $m = 5p$.

Abschlufs. Der Umfang stellt die Grenzbedingung $m > 4^1/_2 p$.

18) Man bestimme durch ihre Ordinate diejenigen Punkte einer Hyperbel, welche einem auf der Ordinatenachse gegebenen Punkte am nächsten sind.

Ergebnis. Man fällt vom gegebenen Punkte auf beide Asymptoten die Senkrechten. Die Verbindungslinie ihrer Fufspunkte giebt verlängert auf der Hyperbel die gesuchten Punkte an.

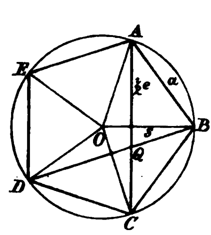
19) M., Aufgaben 707, 669 *A*.

---

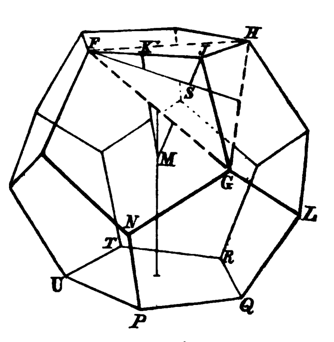
21. Glied. Anhang. Schwerer zu behandelnde Körper.

1. Der regelmäfsige Zwölfflächner. (Das regelmäfsige Dodekaeder.)

1) Herstellung. Über einer Strecke, welche so lang ist wie die Eckenlinie AC eines regelmäfsigen Fünfecks $ABCDE$ (Figur 200), beschreibe man ein gleichseitiges Dreieck FGH (Figur 201), errichte auf seiner Ebene im Mittelpunkte S die Senkrechte SJ, lege durch sie und einen Eckpunkt, F, die Ebene, beschreibe in dieser um F mit der Seite AB des regelmäfsigen Fünfecks einen Kreis, welcher SJ im Punkte J schneiden möge, und lege von J aus durch jede Seite des Dreiecks FGH eine Ebene. Ihre Schnittlinien JG und JH sind gleich JF, also auch gleich der Seite a des regelmäfsigen Fünfecks $ABCDE$.



Figur 200.



Figur 201.

Nun werde um die dreiseitige Pyramide $FGHJ$ die umbeschriebene Kugel hergestellt. Ihr in JS liegender Mittelpunkt wird gefunden, indem man auf der Kante FJ in ihrer Mitte K in der Ebene FJS die Senkrechte errichtet, welche JS im Mittelpunkte M trifft. In der Kugel liefern die drei von J aus gelegten Ebenen Schnittkreise, welche dem um $ABCDE$ beschriebenen gleich sind; denn sie sind die umbeschriebenen Kreise deckbarer Dreiecke, ABC, JFG, JGH und JHF. Vervollständigt man die Dreiecke in den Schnittkreisen zu regelmäfsigen Fünfecken, so stimmen diese mit $ABCDE$ überein. Nun sind bei F, G und H dreiseitige Ecken gewonnen, welche mit der ersten Ecke J nach dem 2. Satze übereinstimmen. (10, 17, 2.) Folglich sind die dritten Seitenwinkel, wie NGL, so grofs wie die Winkel des regelmäfsigen Fünfecks. Ihre Ebenen liefern neue Schnittkreise der Kugel, in welchen

man ebenso verfährt und mit den hinzukommenden auch, bis man unten immer wieder auf dieselbe Ebene kommt. Denn die bei P erhaltene Ebene UPQ bildet mit $NPQL$ einen Flächenwinkel, der so grofs ist, wie die Flächenwinkel der ersten deckbaren Ecken, und die bei Q entstehende Ebene PQR schliefst auch mit $NPQL$ einen Flächenwinkel von derselben Gröfse ein und darum fallen die Ebenen UPQ und PQR zusammen, und mit ihnen auch QRT und weiter bis U; so dafs die Schlufsfigur ein ebenes Fünfeck ist, welches mit den übrigen übereinstimmt.

Der entstandene, von 12 Flächen begrenzte Körper ist, da seine sämtlichen Ecken in allen Stücken übereinstimmen, ein regelmäfsiger.

2) Berechnung. Für die bei dem regelmäfsigen Körper auftretenden Gröfsen sollen nun Formeln entwickelt werden, aus welchen man dieselben mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann, unabhängig von der begrenzten Genauigkeit der Logarithmen.

Im 1. Teile, **22**, 4, 3) ist bewiesen, dafs die demselben Kreise (um O, Figur 200) angehörende Seite vom regelmäfsigen Fünfeck, Sechseck und Zehneck die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks werden können; also hat man

$$1) \quad a^2 = s^2 + z^2$$

und da der Kreishalbmesser gleich der Seite s des regelmäfsigen Sechsecks ist,

$$2) \quad z = {}^1/_2(\sqrt{5} - 1)\, s$$

(1. T., **22**, 4). Setzt man für z den Wert in 1) ein, so kommt

$$3) \quad a^2 = {}^1/_2(5 - \sqrt{5})\, s^2$$

also

$$4) \quad s^2 = {}^1/_{10}(5 + \sqrt{5})\, a^2.$$

Um die Gröfse der Eckenlinie $AC = e$ (Figur 200) durch a auszudrücken, giebt man den Inhalt des Bestimmungsdreiecks OAB auf zwei Weisen an und hat die Gleichung

$${}^1/_4\, es = {}^1/_2\, a\sqrt{s^2 - {}^1/_4\, a^2}, \quad \text{also} \quad e = a\sqrt{4 - \frac{a^2}{s^2}},$$

und wenn man den Ausdruck 3) für a^2 einsetzt,

$$e = a\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \text{ und den Bruch mit 2 erweitert, } e = {}^1/_2\, a\sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1}$$

und das ist

$$5) \quad e = {}^1/_2(\sqrt{5} + 1)\, a.$$

Von dieser Gröfse e wurde ausgegangen beim Herstellen des Körpers.

Die Seite $FG = e$ des gleichseitigen Dreiecks FGH (Figur 201) giebt zunächst $FS^2 = {}^1/_3\, e^2$, daher ist

$$JS^2 = a^2 - {}^1/_3\, e^2 = {}^1/_{12}(6 - 2\sqrt{5})\, a^2 = {}^1/_{12}(\sqrt{5} - 1)^2\, a^2$$

also

$$JS = \frac{(\sqrt{5} - 1)\, a}{2\sqrt{3}}.$$

Damit hat man für den Durchmesser $2r$ der umbeschriebenen Kugel aus dem durch F und J gehenden Hauptkreise $a^2 = 2r \cdot JS$, also

$$r = \frac{a^2}{2\, JS} = {}^1/_4(\sqrt{5} + 1) \cdot a\sqrt{3}.$$

(Hierfür könnte man nach 5) schreiben $r = {}^1/_2\, e\sqrt{3}$ und dies lehrt: der Halbmesser r der umbeschriebenen Kugel ist gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks FGH, kann also genau gezeichnet werden.) Zur bequemeren Berechnung ist zu nehmen

$$6)\quad r = {}^1/_4(\sqrt{15} + \sqrt{3})\,a = 1{,}40126\,a.$$

Den Halbmesser MK der alle Kanten berührenden Kugel findet man aus r.

$$7)\quad \varrho_1 = {}^1/_4(3 + \sqrt{5})\,a = 1{,}30\,902\,a.$$

Da der Halbmesser des um das regelmäfsige Fünfeck beschriebenen Kreises, $OB = s$, durch 4) bekannt ist, hat man den der einbeschriebenen Kugel, die alle Flächen berührt, durch

$$\varrho^2 = r^2 - s^2 = {}^1/_{40}(25 + 11\sqrt{5})\,a^2$$

also

$$8)\quad \varrho = {}^1/_2\, a\sqrt{2{,}5 + 1{,}1\sqrt{5}} = 1{,}11\,352\,a.$$

Das Bestimmungsdreieck des regelmäfsigen Fünfecks liefert für die Oberfläche

$$9)\quad F = 30\,a\sqrt{s^2 - ({}^1/_2\,a)^2} = 3\,a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20{,}64\,573\,a^2$$

und hieraus folgt mittels $J = {}^1/_3\, F\varrho$

$$J = {}^1/_4\, a^3\sqrt{470 + 210\sqrt{5}}.$$

Diese Doppelwurzel läfst sich in die Summe zweier einzelnen Wurzeln zerlegen. Man setzt

$$\sqrt{470 + 210\sqrt{5}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}.$$

Die quadrierte Gleichung, $470 + 210\sqrt{5} = u + 2\sqrt{uv} + v$ zerfällt, da das Rationale nur dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich sein kann, in zwei Gleichungen, die zur Bestimmung der beiden Unbekannten erforderlich sind:

$$u + v = 470 \quad \text{und} \quad \sqrt{uv} = 105\sqrt{5}.$$

Man findet $u = 245 = 5 \cdot 49$ und $v = 225 = 15^2$, so dafs ist

$$\sqrt{470 + 210\sqrt{5}} = 7\sqrt{5} + 15$$

daher

$$10)\quad J = {}^1/_4(15 + 7\sqrt{5})\,a^3 = 7{,}66\,312\,a^3.$$

Endlich ist noch die Gröfse des Flächenwinkels durch seinen Neigungswinkel α zu bestimmen. Es ist $\sin {}^1/_2\alpha = \frac{\varrho}{\varrho_1}$. Da aber nur deren Quadrate Zusammenziehung ermöglichen, geht man über auf

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2 {}^1/_2\,\alpha = 1 - \frac{2\varrho^2}{\varrho_1{}^2}.$$

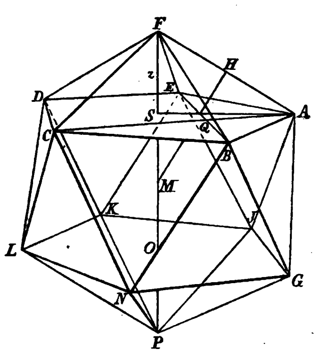
Es wird $\frac{2\varrho^2}{\varrho_1{}^2} = 1 + {}^1/_5\sqrt{5}$, mithin $\cos\alpha = -{}^1/_5\sqrt{5}$ und dazu $\sin\alpha = {}^2/_5\sqrt{5}$, daher am einfachsten

$$11)\quad \operatorname{tg}\alpha = -2, \quad \text{also} \quad \alpha = 116^0\,33'\,54''\ (54{,}18'').$$

2. Der regelmäfsige Zwanzigflächner. (Das regelmäfsige Ikosaeder.)

1) Herstellung. Ausgehend von einem regelmäfsigen Fünfeck $ABCDE$, verfährt man mit diesem ganz so, wie in Nr. 1 mit dem gleichseitigen Dreiecke FGH, bis man den Mittelpunkt M der um die fünfseitige Pyramide zu beschreibenden Kugel gefunden hat. Dann lege man von der Spitze F aus auch durch die Eckenlinie AC die Ebene; der auf der Kugelfläche entstehende Schnittkreis ist gleich dem um

$ABCDE$ beschriebenen, weil $\triangle\ AFC \cong ABC$; und darum wird auch das in ihm aus AFC weiter gezeichnete regelmäfsige Fünfeck mit dem gegebenen übereinstimmend. Durch die hinzugekommenen Seiten CN, NG und GA lege man von B her Ebenen. Die entstandene fünfseitige Pyramide läfst sich mit der ersten zur Deckung bringen; denn da die dreiseitige Ecke mit den Kanten FA, FB, FC und die mit den Kanten BC, BF, BA ganz übereinstimmen, kommt beim Aufeinanderlegen der Fünfecke mit F in B die Spitze B in F. Daher bildet das Dreieck ABG mit ABF einen Flächenwinkel von der Gröfse des an einer nach F gehenden Kante. Legt man nun durch die Eckenlinie BE von F her die Ebene und läfst eine fünfseitige Pyramide mit der Spitze A entstehen, so bildet in ihr das Dreieck ABG_1 auch mit ABF einen ebenso grofsen Flächenwinkel, so dafs das neue gleichseitige Dreieck ABG_1 mit dem alten ABG zusammenfällt. So geht man mittels der andern Eckenlinien am Fünfeck rings herum; jede folgende Pyramide findet Anschlufs an die vorhergehende. Dadurch entsteht unten ein Fünfeck $GJKLN$, an dem nachzuweisen ist, dafs seine Seiten in einer Ebene liegen. Die Grundseite GN des regelmäfsigen Fünfecks $AFCNG$ ist der Eckenlinie AC gleichgerichtet (vergl. Figur 200), ebenso GJ und BE; also haben die Winkel NGJ und CQE paarweise gleichgerichtete Schenkel; deshalb sind ihre Ebenen gleichlaufend. (**9**, 12.) Nun ist JK eine Gerade, welche einer in der Ebene $ABCDE$ liegenden Geraden, AD, gleichgerichtet ist, also ist sie der Ebene gleichlaufend (**8**, 10); sie hat den Punkt J in der andern der beiden gleichlaufenden Ebenen; folglich liegt sie ganz in dieser Ebene NGJ (**9**, 14). Dafs in der Ebene $NGJK$ auch KL liegt, wird ebenso begründet, und dann befindet sich LN mit darin, da sie zwei Punkte in der Ebene hat. So ist also $GJKLN$ ein e b e n e s Fünfeck. Es ist gleichseitig und seine Winkel sind denen des regelmäfsigen Fünfecks $ABCDE$ gleich; denn es war $\angle\ NGJ = CQE$ und dieser ist $= CDE$ als Gegenwinkel eines gleichseitigen Vierecks. (Vergl. Figur 200.) Dasselbe gilt von den übrigen Winkeln. Mithin ist das Fünfeck $GJKLN$ regelmäfsig und stimmt mit $ABCDE$ überein, deshalb auch ihre umbeschriebenen Kreise, die folglich gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte M haben; also bleibt von den Halbmessern übrig $OP = SF$. Dies macht die fünfseitige Pyramide mit der Spitze P und die mit der Spitze F deckbar. Also ist der entstandene Körper unten gestaltet wie oben.



Figur 202.

Demnach stimmen sämtliche Ecken desselben in allen Stücken überein; der Körper ist ein regelmäfsiger Zwanzigflächner.

2) B e r e c h n u n g. Da im rechtwinkligen Dreiecke AFS AF gleich der Fünfeckseite a ist und AS als Halbmesser des um das Fünfeck beschriebenen Kreises gleich der Sechseckseite s ist, so hat SF die Gröfse der Seite des regelmäfsigen Zehnecks $z = {}^1/_2(\sqrt{5} - 1)s$. [Wie in Nr. 1, 1) und 2).] Die Sehne FA und der Durchmesser FP geben $a^2 = 2rz$

also ist
$$r = \frac{a^2}{2z}$$

und durch den Wert von z
$$r = \frac{a^2}{(\sqrt{5} - 1)s}.$$

Hieraus läſst der Ausdruck in Nr. 1, 3)

$$a^2 = {}^1/_2(5 - \sqrt{5})s^2 = {}^1/_2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)s^2$$

das s^2 durch Fortheben beseitigen, wenn man die Gleichung quadriert und für das zweite a^2 den Ausdruck einsetzt,

$$r^2 = \frac{a^2 \cdot {}^1/_2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)s^2}{(\sqrt{5} - 1)^2 s^2} = \frac{{}^1/_2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}a^2 = {}^1/_8\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)a^2$$

mithin

$$1) \quad r = {}^1/_4 a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 0{,}95\,106\,a.$$

Hieraus folgt $2) \quad \varrho_1 = {}^1/_4(\sqrt{5} + 1)a = 0{,}80\,902\,a;$
also ist der Durchmesser $2\varrho_1$ der Kugel, welche alle Kanten berührt, gleich der Eckenlinie des regelmäſsigen Fünfecks. [Nr. 1, 5).]

Da die andere einbeschriebene Kugel jedes Seitendreieck im Schwerpunkte berührt, ist

$$\varrho^2 = r^2 - {}^1/_3 a^2 = {}^1/_3 \cdot {}^1/_{16}(14 + 6\sqrt{5})a^2.$$

Den Ausdruck hinter $^1/_3$ erhielten wir in Nr. 1, als zur Bestimmung von $\cos\alpha$ ϱ_1 quadriert wurde, also ist nach Formel 7)

$$\varrho^2 = {}^1/_3 \cdot {}^1/_{16}(3 + \sqrt{5})^2 a^2$$

$$3) \quad \varrho = \sqrt{{}^1/_3} \cdot {}^1/_4(3 + \sqrt{5})a = {}^1/_{12}(3\sqrt{3} + \sqrt{15})a = 0{,}75\,576\,a.$$

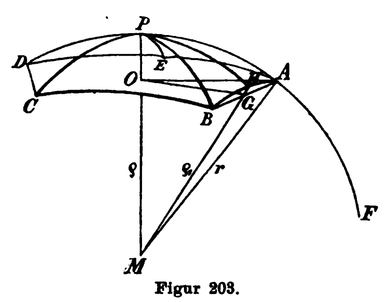
Ferner ist die Oberfläche $4) \quad F = 5a^2\sqrt{3} = 8{,}66\,025\,a^2$
und hieraus der Inhalt $5) \quad J = {}^5/_{12}(3 + \sqrt{5})a^3 = 2{,}181\,695\,a^3.$

Der Neigungswinkel des Flächenwinkels wird am bequemsten ebenso bestimmt. Hier wird

$$\frac{2\varrho^2}{\varrho_1^{\,2}} = 1 + {}^1/_3\sqrt{5}, \quad \text{also ist} \quad \cos\alpha = -{}^1/_3\sqrt{5}$$

und $6) \quad \sin\alpha = {}^2/_3, \quad \text{mithin} \quad \alpha = 138^0\,11'\,21''\ (22{,}87'').$

3. Gesamtbehandlung der regelmäſsigen Körper mit Kugeldreiecksrechnung.



Figur 203.

Legt man bei irgend einem der regelmäſsigen Körper vom Mittelpunkte aus Ebenen durch die n Seiten einer Seitenfläche, so entsteht auf der umbeschriebenen Kugel ein regelmäſsiges Kugelvieleck, dessen Mittelpunkt der Pol P des der Seitenfläche umbeschriebenen Kreises ist. Ebensolches Kugelvieleck liefert jede der s Seitenflächen, welche die Ecke A des Körpers bilden. Mithin liegen um A s gleiche Vieleckswinkel, jeder beträgt $360^0 : s$. Daher ist in dem halben Bestimmungsdreieck APH bekannt $\angle PAH = \frac{\pi}{s}$ und $\angle APH = \frac{\pi}{n}$. Die zweite Nepersche Gleichung giebt

$$\cos AP = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{s}$$

und der $\cos AP$ ist aus dem rechtwinkligen Dreieck AMO $\frac{\varrho}{r}$, mithin hat man für alle regelmäſsigen Körper

$$1) \qquad \varrho = r \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{s}.$$

Beim Achtflächner ist $n = 3$ und $s = 4$, beim Würfel umgekehrt $n = 4$ und $s = 3$; das Produkt der Kotangenten ist also für beide dasselbe. Folglich haben der regelmäfsige Achtflächner und der Würfel, welche beide derselben Kugel einbeschrieben sind, auch die Kugel gemeinsam, welche alle Flächen berührt. Vom regelmäfsigen Zwanzig- und Zwölfflächner gilt dasselbe. Bei dem einzeln dastehenden Vierflächner ist $n = s = 3$, also $\varrho = r \operatorname{ctg}^2 60^0 = {}^1/_3\, r$.

Die halbe Seite des Kugelvielecks liefert durch die erste Nepersche Gleichung, $\cos\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{s}\cdot\cos AH$, wenn man $\angle AMH$ mit γ bezeichet, den

$$\cos\gamma = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{s}}$$

und dieser ist $\varrho_1 : r$

$$2)\qquad \varrho_1 = r\,\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{s}}$$

und giebt auch die Kante des regelmäfsigen Körpers durch

$$3)\qquad a = 2r\sin\gamma.$$

Durch die Seite a hat man die Oberfläche und durch sie und ϱ auch den Inhalt der regelmäfsigen Körper in der Kugel vom Halbmesser r.

Da $\angle OGM$ der halbe Neigungswinkel eines Flächenwinkels α des regelmäfsigen Körpers ist, erhält man mittels 1) und 2)

$$4)\qquad \sin{}^1/_2\,\alpha = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\cos\frac{\pi}{s}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

für alle regelmäfsigen Körper.

---

4. Standort eines Punktes im Raume. Man denke nach allen Seiten erweitert den Fufsboden des Zimmers, die Vorderwand und die linke Seitenwand. Der Schnittpunkt der drei auf einander senkrechten Ebenen heifse O; die von O nach rechts gehende Schnittlinie werde mit OX bezeichnet, die von O nach hinten laufende mit OY und die von O nach oben gerichtete mit OZ. Dadurch hat man zugleich die Bezeichnung der drei Ebenen: die Grundebene ist XY, die Vorderwand XZ und die dritte Ebene YZ.

In dem vor uns hinter der Wand befindlichen Teile des Raumes denke man sich einen Punkt und fälle vom ihm die Senkrechte auf jede der drei Ebenen. Die wie XO gerichtete sei x Meter lang, die wie YO liegende y m und die wie ZO auf der Grundebene stehende z m. Nachdem z gemessen, kann man y bequemer finden, indem man in der Grundebene vom Fufspunkte der Senkrechten z aus rechtwinklig nach OX hin mifst, und dann hat man vom Treffpunkte aus bis O eine Strecke $= x$. Wie findet man den Punkt, für welcken $x = 3$, $y = 2$ und $z = 1$ Meter ist? — Bei entgegengesetzter Richtung der Strecken, bei Punkten in einem andern Teile des Raumes, nimmt der Wert das negative Vorzeichen an. (1. T., **21**, 14, 4.)

Der Standort eines Punktes im Raume wird durch die drei Standgröſsen x, y, z bestimmt.

5. Dreiachsiges Ellipsoid. Entsprechend der Form der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

werde für drei Raum-Standgröſsen x, y, z die Gleichung aufgestellt

$$1. \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und untersucht, was für ein Gebilde sie darstellt.

1) Da die Brüche auch bei negativen Werten stets positiv bleiben, so muſs jeder der drei Brüche echt sein; also können die Standgröſsen x, y, z die entsprechenden Linien a, b und c an Gröſse nicht überschreiten, das Gebilde muſs ein geschlossenes sein (wie unter den Linien die Ellipse). Zunächst fragt es sich, welche Punkte der Achsenebenen mit ihren Standgröſsen der gegebenen Gleichung genügen. Alle Punkte der XZ-Ebene haben $y = 0$; also wird für Punkte der XZ-Ebene die gegebene Gleichung zu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mithin genügen die Punkte der Ellipse mit den Halbachsen a und c durch ihre Standgröſsen der gegebenen Gleichung. (Man zeichne diese Ellipse ziemlich groſs hin, setze an den rechts liegenden Scheitel S_1, links S_3, oben S_2, unten S_4.) Nimmt man ebenso $z = 0$, so sind es in der Grundebene die Punkte der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die man in wagerechter Lage von den Endpunkten der schon gezeichneten $2a$-Achse aus sogleich gehörig darstellt; sowie endlich für $x = 0$ die Ellipse mit den Halbachsen b und c, die man in der von vorn nach hinten gehenden Mittelebene zur Anschauung bringen möge von einem etwas rechts gedachten Standpunkte aus. Der hinten liegende Scheitel werde mit S_5, der vorn mit S_6 bezeichnet.

Wählt man für z einen bestimmten Wert, $OQ = z_1$, selbstverständlich kleiner als c, so wird in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{{z_1}^2}{c^2}$$

die rechte Seite ein unbenannter echter Bruch, dessen Wert $= n^2$ gesetzt werde. Dividiert man die Gleichung durch n^2, so sagt

$$\frac{x^2}{(na)^2} + \frac{y^2}{(nb)^2} = 1$$

daſs in der Ebene, welche in der Höhe z_1 über der Grundebene schwebt, die Punkte der Ellipse mit den Halbachsen na und nb der gegebenen Gleichung genügen. Auf dem Ellipsenbogen S_1S_2 habe der Punkt D mit der Ordinate z_1 die Abscisse α. Sie ergiebt sich aus

$$\frac{\alpha^2}{a^2} = 1 - \frac{{z_1}^2}{c^2} = n^2$$

als $\alpha = na$; ebenso findet man durch einen Punkt auf dem Ellipsenbogen S_2S_5 die Abscisse $\beta = nb$; und diese Halbachsen des Querschnitts sind kleiner als a und b, weil n ein echter Bruch ist. Dieser Bruch wird mit wachsendem z_1 kleiner, und mit

$z_1 = c$ zu Null, also zieht sich bei S^2 der Querschnitt zum Punkte S_2 zusammen (was abzulesen ist aus der gegebenen Gleichung, nicht aus einer, welche n im Nenner hat).

Dasselbe gilt von Ebenen, welche der XZ-Ebene gleichlaufend hingestellt werden, hinter oder vor ihr, in Abständen $y_1 \leqq b$, sowie von Schnittebenen, rechtwinklig auf OX, bei denen der Abstand von O $x_1 \leqq a$ ist. Wegen der Eigenschaft, daſs solche Schnittebenen immer Ellipsen sind, heiſst die durch die gegebene Gleichung ausgedrückte krumme Fläche ein Ellipsoid.

2) Bestimmung des **Inhalts eines Ellipsoid-Abschnitts**, entstanden durch eine rechtwinklig zur c-Halbachse im Scheitelabstande h geführte Schnittebene.

Ein über der Grundebene in der Höhe z gelegter Querschnitt hat den Inhalt $Q = \pi\alpha\beta$. Es wird α aus

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \alpha = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}$$

und β aus

$$\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \beta = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}$$

mithin

$$Q = \pi\frac{ab}{c^2}(c^2 - z^2)$$

oder, wenn man statt z den Scheitelabstand $c - u$ einführt,

$$Q = \pi\frac{ab}{c^2}(2\,cu - u^2).$$

Dies gilt für jeden Querschnitt; also wird (nach dem Cavallierischen Satze **15**, 22, 28) der Inhalt des Abschnitts bis zur Höhe u

$$\pi\frac{ab}{c^2}(cu^2 - {}^1/_3\,u^3) \qquad \text{und bis zur Höhe } u = h$$

$$\textbf{2.} \qquad A = {}^1/_3\,\pi\frac{ab}{c^2}h^2(3\,c - h).$$

Daher muſste der Inhalt eines Kugelabschnitts so werden, wie er **15**, 18 angegeben wurde.

Wächst h bis c, so entsteht das halbe Ellipsoid. Daher ist der **Inhalt eines dreiachsigen Ellipsoides**

$$\textbf{3.} \qquad E = {}^4/_3\,\pi\,abc.$$

Für das r^3 der Kugel treten die drei Halbachsen ein.

3) Fügt man den Kegel hinzu, welcher unter der Grundfläche mit der Spitze im Ellipsoid-Mittelpunkte sich befindet, so erhält man den **Inhalt des Ellipsoid-Ausschnitts.**

$$\textbf{4.} \qquad S = {}^2/_3\,\pi\,ab \cdot h$$

unabhängig von der c-Halbachse. Dies lehrt: Ausschnitte um die c-Achse mit der Abschnittshöhe h aus allen Ellipsoiden, welche denselben Haupt-Achsenschnitt haben, sind gleich groſs; und zwar gleich dem halben Ellipsoide, welches h zur c-Halbachse hat.

6. Paraboloid. Um mit der Parabel in entsprechender Weise vorgehen zu können, ist die Parabelgleichung $y^2 = 2\,px$ rechts auf 1 zu bringen,

$$\frac{y^2}{2\,px} = 1.$$

In dieser Form werde sie, ganz wie die Ellipsengleichung unter Nr. 5, auf drei Raumstandgrößsen ausgedehnt

$$\frac{y^2}{2px} + \frac{z^2}{2p_1x} = 1.$$

Es soll die Gestalt des durch diese Gleichung ausgedrückten Raumgebildes wie vorhin festgestellt werden.

1) Es liefert $y = 0$ in der Zeichenebene die Parabel $z^2 = 2p_1x$ und $z = 0$ in der Grundebene die Parabel $y^2 = 2px$. Aus diesen Parabeln erhält man zu einem bestimmten x_1 die Ordinatenquadrate $\gamma^2 = 2p_1x_1$ und $\beta^2 = 2px_1$, so daſs die gegebene Gleichung bei bestimmtem x_1 wird

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

woraus man ersieht, daſs jede Ebene, welche auf der positiven Seite in beliebigem Abstande x_1 der YZ-Ebene gleichlaufend gelegt wird, das Gebilde in einer Ellipse schneidet.

Für eine in der Höhe z_1 der Grundebene gleichlaufend gelegte Ebene wird die gegebene Gleichung durch Beseitigen der Nenner zu

$$y^2 = 2px - \frac{p}{p_1} z_1{}^2.$$

Das letzte Glied hat bei dem gewählten z_1 eine feste Gröſse, gegen welche das erste Glied der rechten Seite bei kleinen Werten von x nicht aufkommt, so daſs y^2 negativ, y imaginär ist. Es wird y erst bei demjenigen Werte x_1 möglich, welcher beide Glieder gleich macht,

$$2px_1 = \frac{p}{p_1} z_1{}^2, \qquad \text{also bei} \qquad x_1 = \frac{1}{2p_1} z_1{}^2$$

da ist $y = 0$; jedes gröſsere x, also $x = x_1 + x'$, liefert zwei reelle Werte für y aus

$$y^2 = 2p(x_1 + x') - \frac{p}{p_1} z_1{}^2$$

welche Gleichung nach Einsetzen des Wertes x_1 wird

$$y^2 = 2px'.$$

Der Schnitt ist also eine Parabel, welche mit der in der Grundebene XY übereinstimmt. Da dies für jede Höhe z_1 gilt, kann man das durch die gegebene Gleichung ausgedrückte Gebilde dadurch entstehen lassen, daſs man an der in der XZ-Ebene gezeichneten Parabel als Leitlinie die Parabel der Grundebene mit ihrem Scheitel entlang laufen läſst (während ihre Achse in deren Ebene bleibt und ihre eigene Ebene, der Grundebene gleichlaufend, hinschwebt.)

Dasselbe gilt von jeder Ebene, die in einem Abstande y_1 der XZ-Ebene gleichlaufend hingestellt wird. Ihr Schnitt liefert eine Parabel, welche mit der in der XZ-Ebene gezeichneten übereinstimmt. Daher entsteht dasselbe Gebilde, wenn man diese Parabel in gleicher Weise an der in der Grundebene liegenden Parabel als Leitlinie mit ihrem Scheitel entlang gleiten läſst.

Das aus der gegebenen Gleichung gefundene Gebilde heiſst ein elliptisches Paraboloid.

2) Inhalt eines geraden **Abschnitts vom elliptischen Paraboloide.**

Der rechtwinklig zur X-Achse im Scheitelabstande x geführte Querschnitt hatte den Inhalt

$$Q = \pi\beta\gamma = \pi\sqrt{2p \cdot 2p_1} \cdot x.$$

Diese Querschnitte wachsen also wie die Abstände selbst, ebenso wie im Dreieck die der Grundseite gleichlaufenden Querlinien, während in einer Pyramide solche Schnitte zunehmen, wie die Quadrate der Entfernungen vom Scheitel.

Der Inhalt des Abschnitts wird folglich

$$J = \pi\sqrt{2p \cdot 2p_1} \cdot {}^1/_2 x^2 = {}^1/_2 \pi \sqrt{2px} \cdot \sqrt{2p_1x} \cdot x = {}^1/_2 \pi\beta\gamma \cdot x$$

darin ist $\pi\beta\gamma$ die Gröfse der Grundfläche und x die Höhe, also der Inhalt eines geraden Abschnitts vom elliptischen Paraboloide

5. $$A = {}^1/_2 Gh$$

während ein Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe ${}^1/_3\,Gh$ ist und eine Walze $1 \cdot Gh$; also verhält sich

$$W : A : K = 1 : {}^1/_2 : {}^1/_3.$$

3) Auch für eine Paraboloidschicht erhält man nun dieselben Ergebnisse wie bei **20**, 6, 3.

Anmerkung. Wird in der Gleichung 1 unter Nr. 5

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einem Bruche, dem letzten, (entsprechend der Hyperbelgleichung) das Minuszeichen gegeben, so zeigen die ebenso geführten Schnittebenen, dafs die Gleichung darstellt ein Hyperboloid mit einer Schale, welches in dem besonderen Falle, $a = b$, entsteht, wenn eine Hyperbel sich um ihre Ordinatenachse OY dreht. Giebt man zwei Brüchen, den beiden letzten, das Minuszeichen, so bedeutet die Gleichung ein Hyperboloid mit zwei Schalen, welches in dem besonderen Falle, $b = c$, geliefert wird von einer Hyperbel bei Umdrehung um ihre Abscissenachse OX. Statt der Schnittkreise der Umdrehungsfiguren haben beide Hyperboloide Ellipsen. Der in vorliegendem Buche nur noch zur Verfügung stehende Raum gestattet nicht, die Betrachtung hier auszuführen und Inhaltsbestimmungen anzuschliefsen, welche nicht so einfache Ergebnisse haben, wie die obigen. Ebenfalls mag nur noch erwähnt werden, dafs, wenn man in der unter Nr. 6 behandelten Gleichung dem zweiten Bruche das Minuszeichen giebt, die Gleichung

$$\frac{y^2}{2px} - \frac{z^2}{2p_1x} = 1$$

ein hyperbolisches Paraboloid darstellt. In der XZ-Ebene, wo $y = 0$ ist, mufs hier auftreten die Parabel $z^2 = -2p_1x$, deren Abscissen nur auf der negativen Seite der Abscissenachse sich befinden und z^2 positiv machen. In dieser mit der Öffnung nach links gewandten Lage gleitet sie mit dem Scheitel an der in der Grundebene noch wie vorhin liegenden Parabel $y^2 = 2px$ entlang und beschreibt eine krumme Fläche, bei welcher die zur X-Achse rechtwinkligen Schnitte Hyperbeln sind, von denen die auf dem positiven Teile der X-Achse stehenden ihre Hauptachse in der Grundebene XY, die auf dem negativen in der XZ-Ebene haben. Läfst man die Parabel der Grundebene mit dem Scheitel an der andern Parabel hingleiten, so entsteht dieselbe wunderbar gebogene Fläche.

7. Übungen.

a) Krystalle.

1) Die Grundform der zwei- und einachsigen Krystalle ist eine doppelt vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Von den drei in ihren Halbierungspunkten auf einander senkrecht stehenden Achsen sei die Hauptachse $= 2a$ und jede

der beiden Nebenachsen (Quadrateckenlinien) $= 2b$. Man berechne 1) die Endkanten, das sind die Kanten, welche von den Endpunkten der Hauptachse ausgehen, und 2) die Seitenkanten, sie verbinden die Endpunkte der Nebenachsen; 3) die Oberfläche und 4) den Inhalt des Körpers; dann 5) den Halbmesser der die Seitenflächen berührenden Kugel; ferner 6) und 7) die Winkel an einem Endpunkte der Hauptachse zwischen zwei benachbarten und die zwischen zwei gegenüberliegenden Endkanten; endlich 8) den Flächenwinkel an einer Seitenkante und 9) den an einer Endkante. Als Beispiel werde nachher genommen der Achtflächner von schönster Form, das ist derjenige, in welchem sich die Hauptachse zur Nebenachse verhält, wie Seite und Eckenlinie eines Quadrates.

Ergebnis bei 9) $\cos\varepsilon = -\frac{b^2}{2a^2 + b^2}$, im Beispiele $\varepsilon = 120^0$.

2) Die doppelt sechsseitige Pyramide ist die Grundform der drei und einachsigen Krystalle. Die Grundfläche der Doppelpyramide ist ein regelmäfsiges Sechseck, dessen grofse Durchmesser die drei gleichen Nebenachsen $2b$ sind; die Hauptachse $2a$ steht im Mittelpunkte auf ihnen senkrecht und wird von ihnen halbiert. Es soll diejenige Doppelpyramide bestimmt werden, in welche sich eine Kugel einbeschreiben läfst, die alle Kanten berührt. Von ihr sei die halbe Nebenachse b gegeben. Man berechne 1) die halbe Hauptachse, 2) die an ihren Endpunkten zusammenstofsenden Endkanten, 3) den Inhalt und 4) die Oberfläche des Körpers, 5) den Halbmesser der Kugel, die alle Seitendreiecke berührt; dann 6), 7) und 8) die Winkel, welchen eine Endkante mit den übrigen an dem Endpunkte der Hauptachse bildet; ferner 9) den Flächenwinkel an einer Seitenkante (einer Sechseckseite) und 10) den an einer Endkante.

Ergebnis. 4) $F = 11{,}61895\, b^2$. — Alle Flächenwinkel dieser Doppelpyramide müssen gleich grofs werden; sie betragen $126^0\, 52'\, 11''$.

3) Das Granatoëder. Die halben Eckenlinien eines Würfels sind Kanten von 6 vierseitigen Pyramiden. Setzt man diese mit der Grundfläche an die Seitenflächen eines ebenso grofsen Würfels, so entsteht ein von zwölf (nicht 24) Ebenen begrenzter Körper, welcher Granatoëder heifst. Durch die Würfelkante a bestimme man Inhalt und Oberfläche des Körpers, die Halbmesser der beiden einbeschriebenen Kugeln, von denen die eine die Flächen, die andere die Kanten berührt, endlich die Flächenwinkel des Körpers. (Für die Figur nehme man $a = 4$ cm.)

Ergebnis. Die Kugel vom Halbmesser $\varrho_1 = {}^1/_3\, a\sqrt{6} = 0{,}81\,650\, a$ berührt die Kanten nicht in der Mitte. $\alpha = 120^0$.

4) Verlängert man die Achse eines geraden Prismas, welches auf einem regelmäfsigen $2n$-Eck steht und quadratische Seitenflächen hat, über beide Endpunkte hinaus um gleich viel, und legt durch jeden der neuen Endpunkte bis zu den Seiten der ihm nächsten Grundfläche Ebenen, so entsteht eine zusammengesetzte Säule der n- und einachsigen Krystalle. Wie mufs sich die Hauptachse verhalten zu den zwischen den Seitenkanten des Prismas liegenden Nebenachsen, wenn sich dem Körper eine Kugel einbeschreiben lassen soll, die sämtliche Kanten berührt? Beispiele: 1) $n = 2$, 2) $n = 3$, 3) $n = 5$.

Ergebnis. $\frac{2a}{2b} = {}^1/_2 \left(\sin\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)$ wird bei 3) $\frac{2a}{2b} = {}^1/_8 (3 + 5\sqrt{5}) =$ 1,77254.

5) M., Aufgabe 642.

b) Archimedische Körper.

6) Ein Körperstumpf hat als Grundfläche ein regelmäfsiges Sechseck von der Seite a, als Deckfläche ein regelmäfsiges Dreieck von der Seite a und als Seitenflächen abwechselnd Quadrate und gleichseitige Dreiecke von der Seite a. Man bestimme die Flächenwinkel (durch Kugeldreiecksrechnung) und den Inhalt dieses zusammengesetzten Körpers. Darauf bringe man unter der Grundfläche ebensolchen Körperstumpf an, doch so, dafs an ein Quadrat ein Dreieck sich ansetzt. Dann entsteht ein Archimedischer Körper, weil seine Grenzflächen regelmäfsige Figuren zweierlei Art sind und alle seine Ecken übereinstimmen oder rückwärts stimmen. Es läfst sich eine Kugel um ihn beschreiben, sowie in ihm eine Kugel, die alle Kanten berührt.

Ergebnis. Der Inhalt des ganzen Körpers ist $J = {}^5/_3\sqrt{2}\cdot a^3 = 2{,}35\,702\,a^3$, jeder seiner Flächenwinkel $\gamma = 125^0\,15'\,52''$.

7) Bei dem in der Aufgabe **12**, 12, 10 behandelten Körper mache man die Grundfläche zur Deckfläche eines geraden achtseitigen Prismas, dessen Seitenflächen Quadrate mit der Seite a sind, und füge unter dessen Grundfläche ebensolchen Körperstumpf umgekehrt in entsprechender Stellung an. Der entstandene Körper, welcher von 18 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen wird, gehört, da ihn regelmäfsige Figuren zweierlei Art begrenzen und seine Ecken entweder übereinstimmen oder rückwärts stimmen, zu den Archimedischen Körpern. Man berechne den Halbmesser der einbeschriebenen Kugel, die alle Kanten berührt, den der umbeschriebenen Kugel und zeige, dafs er eine alle Flächen berührende Kugel nicht besitzt. Auch bestimme man seinen Inhalt.

Ergebnis. $\varrho_1 = a\sqrt{1 + {}^1/_2\sqrt{2}} = 1{,}30\,656\,a.$
$J = \left(4 + {}^{10}/_3\sqrt{2}\right)a^3 = 8{,}714\,045\,a^3.$

c) Ein Vierzehnflächner mit ungleichen Kanten.

8) Eine Abstumpfung des regelmäfsigen Achtflächners. Man zeichne die alle Seitenflächen eines regelmäfsigen Achtflächners berührende Kugel, und lege durch die Punkte, in welchen sie seine Eckenlinien schneidet, Berührungsebenen. Nach Fortnahme der dadurch an den Ecken abgetrennten Stücke bleibt ein vierzehnseitiger Körper. Es soll, wenn der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel $= \varrho$ gegeben ist, berechnet werden 1) die Gröfse der Kanten, 2) der Halbmesser der um die Seitenflächen zu beschreibenden Kreise, 3) der Halbmesser der um den Körper zu beschreibenden Kugel, 4) der Inhalt und 5) die Oberfläche des Körpers. (Die Vorzahlen sind auf 5 Bruchstellen auszurechnen.) [Die Figur, mit 7 cm langer Kante des Achtflächners, bringt die Gestalt des Körpers klar zur Anschauung, wenn man das Zeichenblatt in den Eckpunkten des Körpers fein durchsticht und auf der Rückseite nur die Kanten des Körpers nachzieht, mit Verstärkung der in den Vordergrund tretenden.] (Vergl. **16**, 6, 10.)

Ergebnis. 2) $r_1 = (\sqrt{3} - 1)\varrho = 0{,}73\,205\,\varrho$; 3) $r = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}\cdot\varrho = 1{,}23\,931\,\varrho$; 5) $F = 60\,(2 - \sqrt{3})\,\varrho^2 = 16{,}07\,695\,\varrho^2$.

9) Eine Abstumpfung des Würfels. Einem Würfel zeichne man die alle Seitenflächen berührende Kugel ein und lege an sie Berührungsebenen durch die Punkte, in welchen die Eckenlinien des Würfels aus ihr heraustreten. Nachdem die hierdurch an den Ecken abgeschnittenen Stücke vom Würfel weggenommen sind, bleibt ein vierzehnseitiger Körper. Es sollen, wenn der Halbmesser der einbeschrie-

benen Kugel $= \varrho$, gegeben ist, berechnet werden 1) die Länge der Kanten, 2) der Halbmesser der um die Seitenflächen zu beschreibenden Kreise, 3) der Halbmesser der Kugel, die sich um den Körper beschreiben läfst, 4) die Oberfläche und 5) der Inhalt des Körpers. (Die Vorzahlen sind auf 5 Bruchstellen auszurechnen.) [Die Zeichnung, bei einem Würfel von 6 cm langer Kante, wird gut und nahe genau, wenn man jede Würfelkante in drei gleiche Teile zerlegt und durch Verbinden der von einer Ecke entfernteren Teilpunkte die abstumpfenden Ebenen darstellt. Nach Durchstechen der gefundenen Eckpunkte des zu bestimmenden Körpers werden auf der Rückseite des Zeichenblattes nur seine Kanten, mit Verstärkung der vorderen, nachgezogen.] [Vergleich **16**, 6, 8), sowie 9) und 10).]

Beide Aufgaben, 8) und 9), führen zu demselben Vierzehnflächner.

---

d) Körper von der Gestalt eines Napfes.

10) In einer Ellipse und in einer Hyperbel ist ein Halbmesser gezogen, dessen Endpunkt die Ordinate d hat. Der von diesem Halbmesser und der Halbachse a begrenzte Ausschnitt beschreibt bei Umdrehung der Figur um die andere Achse einen Körper, dessen Inhalt durch den Cavallierischen Satz von den Querschnitten zu bestimmen ist. Statt der Umdrehungsfigur kann ein dreiachsiges Ellipsoid und ein einschaliges Hyperboloid genommen werden. Aus dem Ergebnis geht auch der Inhalt eines halben Ellipsoides hervor, und nun hat man aus $^2/_3\,\pi abc$ den Inhalt des Ausschnitts, welcher den Körper zum halben Ellipsoide ergänzt.

Ergebnis. $J = {}^2/_3\,\pi abd$, unabhängig von der Halbachse c, also gleich für alle gleich hohen über derselben Grundellipse (oder gleich grofsen Ellipsen) mit sehr verschiedener dritter Halbachse c hergestellte Ellipsoide und Hyperbolide. Der innerste dieser Körper ist ein volles halbes Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und d. Die ellipsoidisch gebogene Aufsenfläche der folgenden geht durch eine gerade Walzenfläche über in die hyperboloidische Aufsenfläche für die sich immer mehr ausbreitenden flachen Schalen, die alle mit jenen Näpfen von gleicher Gröfse sind (also zu ihrer Herstellung alle gleich viel Thon, Porzellan, erfordern würden.) — Für einen Ellipsoid-Ausschnitt erscheint $^2/_3\,\pi abh$ und zeigt, wie die Abschnittshöhe h eine bestimmende Gröfse für den Ausschnitt werden konnte.

11) In der Achse einer Parabel ist ein Punkt gegeben, dessen Abstand c vom Scheitel gröfser als der Parameter ist. Man soll durch den Punkt die Kreise beschreiben, welche die Parabel zu beiden Seiten der Achse in gleichliegenden Punkten berühren. (Man denke zunächst einen Kreis, welcher die Parabel noch schneidet, und führe am Ende der Bestimmung der Abscissen der Schnittpunkte die im gegebenen Punkte stehende Ordinate d ein.) — Hierbei begrenzen die Ordinate d und die Bogen des Kreises und der Parabel bis zum Berührungspunkte auf jeder Seite von d ein dreieckiges Flächenstück, welches bei Umdrehung der Figur um die Parabelachse einen napfförmigen Körper beschreibt. Man soll den Inhalt dieser Körper durch ihre Grundfläche und Höhe mittels des Cavallierischen Satzes bestimmen.

Ergebnis für beide $J = {}^1/_3\,\pi d^3$, also von der Form $J = {}^1/_3\,G \cdot h$. Statt des Punktes an einer Kegelspitze tritt bei diesen derselben Inhaltsformel unterworfenen Körpern eine Kreislinie auf, in welcher als Rand die Aufsen- und die Innenfläche des Napfes sich berühren. Diese Näpfe erhalten darum denselben Inhaltsausdruck wie eine Pyramide, weil auch bei ihnen die Querschnitte sich verhalten,

wie die Quadrate der Abstände von der zu einem Kreise gewordenen Spitze. — Beide verschieden gestaltete Körper haben dieselbe Grundfläche, gleiche Höhe und gleichen Inhalt; und dieser ist unabhängig von der Biegung der Parabel. Alle, auch von weit links her, um die Abscissenachse sich hinstreckenden Parabeln, welche durch die Endpunkte der Sehne $2d$ gehen, liefern gleiche Näpfe. Die aus unendlicher Ferne kommende Paraboloidfläche erscheint am Körper als Walzenfläche und ist der Übergang zu den nach der andern Seite sich öffnenden Paraboloiden. Dieser Napf mit Walzenmantel giebt eine Bestätigung für den Inhaltsausdruck. Die letzte unter den hier möglichen Parabeln ist die mit $2p = d$, in welcher der eine Kreis der Krümmungskreis an ihrem Scheitel ist. (**20**, 5, 1.) Bei ihr zieht sich der Rand des einen Napfes zum Punkt zusammen; und auch dieser ausgehöhlte Körper bestätigt die Formel. Alle diese Näpfe sind doppelt so grofs, wie eine Kugel von gleicher Höhe.

Anmerkung. Man findet auch gleich hohe und gleich grofse Näpfe mit dem Inhaltsausdrucke eines Kegels, $^1/_3\, \pi d^2 \cdot h$, bei derselben Aufgabe für die Hyperbel oder die Ellipse. Bei der Hyperbel kann der Punkt auf der Nebenachse angenommen werden oder innerhalb eines Zweiges auf der Hauptachse in einem Scheitelabstande $(c - a)$, der gröfser ist als der Parameter der Hyperbel; und unter derselben Bedingung für $(a - c)$ auf der grofsen Achse einer Ellipse, bei welcher die kleine Achse kleiner ist, als der Abstand der Brennpunkte. Die Entwicklung beider Teile der Aufgabe ist aber bedeutend länger und mufs sehr aufmerksam durchgeführt werden. Dabei empfiehlt es sich, zunächst den Versuch mit dem besonderen Falle zu machen, wo der Mittelpunkt des Kegelschnitts der gegebene Punkt sein soll. — Viel einfacher, als diese Übertragung der Hauptaufgabe, ist die hier folgende Aufgabe.

12) Auf der Nebenachse einer Hyperbel ist in der Entfernung c vom Mittelpunkte ein Punkt gegeben. Derselbe soll der Scheitel zweier entgegengesetzt liegenden Parabeln werden, welche die Nebenachse als Achse haben und beide Zweige der Hyperbel berühren. (Man bestimme die Ordinate der Berührungspunkte und den Parameter jeder Parabel für sich, und denke zunächst oberhalb des Punktes eine Parabel, welche die Hyperbel noch schneidet. Am Ende der Entwicklung wird man $\sqrt{c^2 + b^2} = h$ setzen.) — Hierbei begrenzen die durch den gegebenen Punkt in Richtung der Abscissenachse gehende halbe Hyperbelsehne d und die Bogen der Parabel und der Hyperbel auf jeder Seite von d ein dreieckiges Flächenstück, welches bei Umdrehung der Figur um die Nebenachse einen napfförmigen Körper beschreibt. Man soll den Inhalt dieser Körper durch ihre Grundfläche und Höhe ausdrücken.

Es ergiebt sich die Ordinate der Berührungspunkte für die obere Parabel $y_1' = c + h$ und für die nach unten geöffnete $y_2' = c - h = -(h - c)$, stets negativ, wie es sein mufs. Mittels des halben Asymptotenwinkels α wird der halbe Parameter bequem gezeichnet gemäfs $p = y' \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Die beiden sehr verschieden aussehenden Körper sind gleich hoch und erfordern zu ihrer Darstellung gleich viel Stoff, $J = {}^1/_3\, \pi d^2 \cdot h$. Der Inhaltsausdruck mufs die Form $^1/_3\, G \cdot h$ erhalten, weil bei diesen Körpern, wie bei den Pyramiden, die Querschnitte sich verhalten wie die Quadrate der Abstände von der hier durch einen Kreis ersetzten Spitze. — Bei einem auf der Hauptachse innerhalb eines Hyperbelzweiges durch seine Abscisse c gegebenen Punkte kann nur eine die Hyperbel berührende Parabel auftreten. Der dort entstehende Napf hat den Inhalt $J = {}^1/_3\, \pi d^2 \cdot h_1$.

Nachschlage-Verzeichnis

in Buchstabenordnung.

Zusammenstellung

der

Formeln aus der Körperlehre.

Prisma $J = G \cdot h.$

Pyramide $J = {}^1/_3 Gh.$

Pyramidenstumpf $J = {}^1/_3 h \cdot (G + \sqrt{GD} + D).$

Mantel einer geraden Walze $M = 2\pi rh.$

Inhalt einer Walze $J = \pi r^2 h.$

Mantel eines geraden Kegels $M = \pi rs = 2\pi\varrho h.$

Inhalt eines Kegels $J = {}^1/_3 \pi r^2 h.$

Mantel eines geraden Kegelstumpfs $M = \pi(r + r_1) \cdot s = 2\pi\varrho h.$

Inhalt eines Kegelstumpfs $J = {}^1/_3 h \cdot (r^2 + rr_1 + r_1{}^2).$

Kappe $= 2\pi rh = \pi s^2.$

Kugelfläche $= \pi d^2 = 4\pi r^2.$

Zone $= 2\pi rh.$

Kugelausschnitt $S = {}^2/_3 \pi r^2 h = {}^1/_3 \pi s^2 r.$

Kugel $= {}^4/_3 \pi r^3 = {}^1/_6 \pi d^3.$

Kugelabschnitt $A = {}^1/_3 \pi h^2 \cdot (3r - h).$

Inhalt eines Körpers, welchem eine alle Grenzflächen berührende Kugel einbeschrieben werden kann, $J = {}^1/_3 F\varrho.$

Inhalt eines Kugelzweiecks $Z = \frac{\alpha^0}{90^0} \pi r^2.$

Inhalt eines Kugeldreiecks $\triangle = \frac{\varepsilon^0}{90^0} \pi r^2.$ (Winkelüberschufs 2ε.)

Da die Formeln der Dreiecksrechnung, besonders die über Winkelfunktionen, nur durch wiederholtes Entwickeln sicher zu merken sind, suche man sie an der Stelle ihrer Herleitung im Buche auf.

Druck von Velhagen & Klasing in Bielefeld.

50 Aufgaben

aus der Körperlehre

zur Einübung und zum Gebrauche

bei der

Abschlufsprüfung

in Untersekunda.

Ergänzung des 2. Teiles

der

Raumlehre für höhere Schulen

von

Prof. H. C. E. Martus,

Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

Preis 20 Pf.



Bielefeld und Leipzig.

Verlag von Velhagen & Klasing.

1893.

Prisma.

1) Eine Mauer, welche 40 m lang, 3 m hoch und 0,3 m dick werden soll, ist aus Steinen aufzubauen, welche 20 cm lang, 10 cm breit und 6 cm dick sind. Wieviele Steine sind anzufahren?

2) Auf einem Rechteck mit den Seiten a und b soll ein Quader entstehen, welcher gleichen Inhalt hat mit einem Würfel von der Kante c. Wie hoch mufs derselbe werden? und um wieviel wird seine Oberfläche gröfser als die des Würfels? Beispiele: 1) $a = 12$, $b = 2$, $c = 6$ m. 2) $a = 18$, $b = 4$, $c = 12$ m.

3) Auf einem rechtwinkligen Dreiecke, bei welchem die kleinen Seiten 28 und 45 cm lang sind, steht ein gerades Prisma, dessen Höhe dem Umfange des Grunddreiecks gleich ist. Wie grofs ist der Inhalt und die Oberfläche dieses Prismas?

Ergebnis. $J = 79\,380$ ccm, $F = 17\,136$ qcm.

4) Ein Quader hat die Grundkanten a und b und die Seitenkanten von der Länge c. Wie grofs sind sein Inhalt, seine Oberfläche, seine Eckenlinien und deren Neigungswinkel gegen die Grundebene? Beispiele: 1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$ cm; 2) 8, 9 und 12 cm; 3) 3, 4 und 12; 4) 6, 9, 2. 5) 1, 8, 4; 6) 4, 7, 4. 7) 5, 14, 2; 8) 10, 11, 2. 9) 8, 19, 4; 10) 13, 16, 4 cm.

Ergebnis. Es ist der Neigungswinkel bei 1) $58^0\,59'\,45''$, bei 2) $44^0\,54'\,0''$, 3) $67^0\,22'\,48''$, 4) $10^0\,28'\,33''$, bei 5) und 6) $26^0\,23'\,17''$, bei 7) und 8) $7^0\,39'\,44''$, bei 9) und 10) $10^0\,58'\,50''$.

5) Ein Würfel mit der Kante a ist durch eine der Grundfläche gleichlaufende Ebene mitten durchgeschnitten. Wie grofs ist bei einem der erhaltenen Quader die Oberfläche, jede Eckenlinie und unter wie grofsen Winkeln schneidet eine Eckenlinie die beiden folgenden?

Ergebnis. Die Schnittwinkel sind $83^0\,37'\,17''$ und $38^0\,56'\,33''$.

6) Wie grofs sind die Kante, die Oberfläche und der Inhalt eines Würfels, dessen Eckenlinie ein Meter lang ist? (Bis auf Tausendstel des Metermafses anzugeben.) Wieviel solche Würfel geben 1 cbm?

Ergebnis. $3\sqrt{3} = 5{,}196$ solche Würfel geben 1 cbm.

---

7) Das Eigengewicht des Bleies ist 11,35, das des Aluminiums nur 2,56. Wie grofs wird die Kante von 4 einander gleichen Würfeln aus Aluminium, die zusammen so viel wiegen sollen, wie ein bleierner Würfel mit 3 cm langer Kante?

Ergebnis. Die Kanten der 4 Würfel werden noch um 1 mm länger als die des bleiernen Würfels.

8) Aus $p = 223{,}4$ g Blei vom Eigengewichte $s = 11{,}35$ soll ein Würfel gegossen werden. Wie grofs ist die Kante des Holzwürfels zu nehmen, der zum Herstellen der Thonform für den Gufs dienen soll? Zweites Beispiel: $p = 138{,}1$.

---

9) Auf einem gleichseitigen Vierecke mit den Eckenlinien d und e steht ein gerades Prisma von der Höhe h. Man bestimme seinen Inhalt, seine Oberfläche und die Neigungswinkel seiner Eckenlinien gegen die Grundebene. Beispiele: 1) $d = 4$, $e = 4{,}2$, $h = 5$ cm; 2) $d = 5{,}6$, $e = 9$, $h = 10$ cm.

Ergebnis. $F = de + 2h\sqrt{d^2 + e^2}$.

1. $J = 42$ ccm, $F = 74{,}8$ qcm, $\delta = 51^0\,20'\,25''$, $\varepsilon = 49^0\,58'\,12''$.

2. $J = 252$ ccm, $F = 262{,}4$ qcm, $\delta = 60^0\,45'\,4''$, $\varepsilon = 48^0\,0'\,46''$.



10) Ein gerades Prisma von 8 cm Höhe steht auf einem geraden Trapeze mit den Hauptseiten von 14 und 4 cm und den Nebenseiten von 13 cm. Man berechne den Inhalt, die Oberfläche, die Eckenlinien des Prismas und deren Neigungswinkel gegen die Grundebene. [Für die gegebenen Gröfsen sollen bei dieser Aufgabe **nicht** Buchstaben a, b, c eingeführt werden.]

Ergebnis. $J = 864$ ccm, $F = 568$ qcm, $e = 17$ cm, $\varepsilon = 28^0\,4'\,20''$ (oder $21''$).

11) Zwei rechtwinklige Dreiecke, worin die kleinen Seiten bei dem einen 13 und 16 cm, bei dem andern 19 und 8 cm lang sind, werden mit ihren gleichen gröfsten Seiten an einander geschoben, so dafs die zuerst angegebenen Seiten der beiden rechtwinkligen Dreiecke zusammenstofsen. Über dem Vierecke wird ein 4 cm hohes gerades Prisma errichtet. Man berechne Inhalt und Oberfläche und die Eckenlinie des Körpers, welche ausgeht von einem Eckpunkte der Grundfläche, der nicht die Spitze eines rechten Winkels ist. Wie grofs sind der Neigungswinkel dieser Eckenlinie gegen die Grundfläche und die beiden unbekannten Winkel des Grundvierecks? Zweites Beispiel: 15 und 30 cm, 6 und 33 cm, $h = 10$ cm.

Ergebnis. Neigungswinkel bei 1) $10^0\,58'\,50''$, bei 2) $16^0\,36'\,6''$. Der gröfste Winkel des Vierecks bei 1) $106^0\,15'\,35''$, bei 2) $143^0\,7'\,48''$.

---

12) Auf einem gleichseitigen Dreiecke mit der Seite a steht ein gerades Prisma, dessen Höhe gleich der Höhe des Grunddreiecks ist. Inhalt und Oberfläche dieses Prismas sind zu bestimmen. Beispiel: $a = 2$ cm.

Ergebnis. $F = 2\sqrt{3} \cdot a^2 = 13{,}856$ qcm.

13) In einem Quadrate mit der Seite a, welches die Grundfläche eines Würfels werden soll, verbinde man die Halbierungspunkte zweier zusammenstofsenden Seiten mit einander und mit dem der Verbindungslinie fernsten Eckpunkte des Quadrates. Wieviel lassen diese abschneidenden Verbindungslinien vom Quadrate übrig? und wie grofs ist der Inhalt und die Oberfläche des auf dem übrig behaltenen Dreiecke stehenden geraden Prismas, welches bis zur Deckfläche des Würfels reicht?

Ergebnis. $F = ({}^3/_4 + \sqrt{5} + {}^1/_2\sqrt{2})\, a^2 = 3{,}693\, a^2$.

14) Von zwei Würfeln mit den Kanten a wird der eine durch die beiden auf der Grundfläche senkrechten Kantenebenen in vier dreiseitige Prismen zerlegt. Jedes derselben wird mit seiner quadratischen Fläche an ein Seitenquadrat des andern Würfels angesetzt. Welche Gestalt erhält die Grundfläche des ganzen Körpers? Wie grofs ist sein Inhalt und seine Oberfläche und unter wie grofsem Neigungswinkel steigt eine Kantenebene an, welche von einer Grundkante nach der gegenüberliegenden der Deckfläche hinaufgeht? (Man zeichne nur die Grundfläche.)

Ergebnis. $F = 9{,}657\, a^2$; $\alpha = 35^0\,15'\,52''$.

15) Ein Prisma mit quadratischen Seitenflächen hat zur Grundfläche ein regelmäfsiges Sechseck mit der Seite a. Wie grofs sind der Inhalt, die Oberfläche und die drei Eckenlinien des Körpers, welche von einem Eckpunkte ausgehen, und wie grofs sind deren Neigungswinkel gegen die Grundfläche?

Ergebnis. $\alpha = 26^0\,33'\,54''$, $\beta = \gamma = 30^0$.

16) Auf einem Dreiecke mit den Seiten a, b und c steht ein Prisma, dessen Höhe gleich dem Halbmesser ϱ des dem Grunddreiecke einbeschriebenen Kreises ist. Welchen Inhalt hat dasselbe?

Ergebnis. $J = (s-a)\,(s-b)\,(s-c)$.

17) Ein gerades dreiseitiges Prisma mit lauter gleichen Kanten soll mit einem Würfel von der Kante a gleichen Inhalt haben, und ein ebenso gestaltetes gleiche Oberfläche mit dem Würfel. Man berechne die Länge der Kanten dieser beiden Prismen.

Ergebnis. $x = 1{,}3218\ a$, $y = 1{,}2458\ a$.

---

18) Auf einem regelmäſsigen Achtecke von $a = 22$ cm Seite steht ein $h = 42{,}79$ cm hohes gerades Prisma. Wie groſs sind dessen Inhalt und Oberfläche?

19) Auf einem regelmäſsigen Fünfecke von 20 cm Seite soll ein gerades Prisma entstehen, dessen Oberfläche ein Quadratmeter groſs wird. Wieviel bleibt für den Mantel und wie groſs wird die Höhe und der Inhalt des Prismas?

Ergebnis. $J = 59\,347$ ccm.

20) Auf einem regelmäſsigen n-Eck, welches um den Kreis mit dem Halbmesser $\varrho = {}^1/_2$ m zu beschreiben ist, soll ein gerades Prisma stehen, dessen Inhalt $J = 1$ cbm beträgt. Wieviel Quadratmeter bekommt sein Mantel? Wie hoch wird das Prisma, wenn das Vieleck 9 oder 12 oder 24 oder 100 Seiten hat? (Probe mit $n = 4$.)

Ergebnis. Es wird h bei 1) 1,2211 m, 2) 1,244, 3) 1,266, 4) 1,2728 m.

---

21) Ein Würfel mit der Kante a wird durch eine der Vorderfläche gleichlaufende Ebene halbiert. Die vordere Hälfte wird herumgedreht und mit der schmalen Seite mitten gegen die hintere Hälfte gestellt. Jeder der rechts und links entstandenen Winkelräume wird ausgefüllt mittels eines hineinpassenden dreiseitigen Prismas. Wie groſs sind Inhalt und Oberfläche des ganzen sechsseitigen Prismas und jeder der beiden gröſsten Winkel der Grundfläche? (Nur die Grundfigur ist zu zeichnen.)

Ergebnis. $F = 7{,}06\,155\ a^2$, $165^0\ 57'\ 50''$.

22) Ein Würfel mit der Kante a wird durch drei einer Seitenfläche gleichlaufende Ebenen in vier gleiche Quader zerlegt. Diese Platten werden mit den Kanten a so an einander gestellt, daſs die inneren Grundkanten ein Quadrat von der Seite a bilden. Die auſsen entstandenen Winkelräume werden durch hineinpassende dreiseitige Prismen, sowie auch das Innere des Körpers ausgefüllt. Wie groſs ist Inhalt und Oberfläche des ganzen achtseitigen Prismas? Wie lang sind die beiden Höhen des Grundachtecks und wie groſs folglich der Neigungswinkel gegen die Grundfläche von der Kantenebene, welche von einer groſsen oder einer kleinen Grundkante zur gegenüberliegenden der Deckfläche aufsteigt? (Nur die Grundfigur ist zu zeichnen.)

Ergebnis. $F = 9{,}664\ a^2$, $\alpha = 33^0\ 41'\ 24''$, $\beta = 29^0\ 29'\ 48''$.

23) Die Platten der vorhergehenden Aufgabe werden so zusammengestellt, daſs die kleinen Grundkanten ${}^1/_4\ a$ im Innern ein Quadrat bilden. Dieselben Fragen sind zu beantworten.

Ergebnis. $F = 12{,}782\ a^2$, $\alpha = 23^0\ 57'\ 46''$, $\beta = 29^0\ 29'\ 48''$.

24) Ein Würfel mit der Kante a wird durch zwei einer Seitenfläche gleichlaufende Ebenen in drei gleiche Quader zerlegt. Diese werden mit ihren Kanten von der Länge a so an einander gestellt, daſs die inneren Grundkanten a ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die auſsen entstandenen Winkelräume werden durch hineinpassende dreiseitige Prismen, sowie auch das Innere des Körpers ausgefüllt. Wie groſs ist Inhalt und Oberfläche des ganzen sechsseitigen Prismas? Wie lang ist die Höhe im Grundsechseck und wie groſs folglich der Neigungswinkel der Kantenebene, welche von einer Seite der Grundfläche nach der gegenüberliegenden der Deckfläche hinaufgeht?

Ergebnis. Zwei ungleiche Seitenflächen sind zusammen so groſs wie das Grundsechseck. $F = 5\,(1 + {}^1/_3\sqrt{3})\ a^2 = 7{,}887\ a^2$; $\alpha = 36^0\ 12'\ 21''$.

25) Die drei Platten der vorhergehenden Aufgabe werden so zusammengestellt, dafs die kurzen Grundkanten $^1/_3\,a$ ein gleichseitiges Dreieck bilden. Wie lauten nun die 4 Antworten?

Ergebnis. $J = (1 + {}^7/_9\sqrt{3})\,a^3 = 2{,}347\,a^3$, $F = (3 + {}^{41}/_9\sqrt{3})\,a^2 = 10{,}890\,a^2$; $h = ({}^3/_2 + {}^1/_6\sqrt{3})\,a = 1{,}789\,a$, $\alpha = 29^0\,12'\,30''$.

Pyramide.

26) Bei einer Turmspitze, deren Grundfläche ein regelmäfsiges Sechseck mit 4,6 m langen Seiten ist, hat jede Seitenkante 26,5 m Länge. Was kostet ihre Schieferdeckung, wenn das Quadratmeter mit 8 M. berechnet wird? und wie grofs ist der Neigungswinkel jeder Seitenkante gegen die Grundfläche? — Zweites Beispiel: Grundseite 5,4 m, Seitenkante 36,5 m.

Ergebnis. 1) 2914,56 M., $\alpha = 80^0\,0'\,13''$; 2) 4717,44 M., $\alpha = 81^0\,29'\,32''$.

27) Auf einem Quadrate mit der Seite a steht eine gerade Pyramide, bei welcher jedes Seitendreieck die Höhe b hat. Wie grofs sind die Oberfläche, der Inhalt und die Neigungswinkel der Seitendreiecke und der Seitenkanten gegen die Grundebene? Beispiele: 1) $a = 14$, $b = 25$ cm; 2) $a = 32$, $b = 65$ cm; 3) $a = 40$, $b = 101$ cm.

Ergebnis. 1) $\alpha = 73^0\,44'\,23''$, $\beta = 67^0\,35'\,6''$; 2) $\alpha = 75^0\,45'\,0''$, $\beta = 70^0\,14'\,37''$; 3) $\alpha = 78^0\,34'\,44''$, $\beta = 74^0\,3'\,20''$.

28) Auf einem Quadrate mit der Seite a steht eine gerade Pyramide mit den Seitenkanten b. Man berechne die Oberfläche, den Inhalt und die Neigungswinkel der Seitendreiecke und der Seitenkanten gegen die Grundebene. Beispiele: 1) $a = 10$, $b = 13$ cm; 2) $a = 18$, $b = 41$ cm.

Ergebnis. 1) $\alpha = 65^0\,22'\,32''$, $\beta = 57^0\,2'\,52''$; 2) $\alpha = 76^0\,59'\,50''$, $\beta = 71^0\,54'\,52''$.

29) Eine auf quadratischer Grundfläche stehende 17,1 cm hohe gerade Pyramide hat 4468,8 ccm Inhalt. Wie grofs sind die Grundkanten, die Oberfläche und die Winkel, welche eine Seitenkante mit der nächsten und mit der gegenüberliegenden an der Spitze bildet?

Ergebnis. $F = 2021{,}6$ qcm, $\alpha = 62^0\,26'\,13''$, $\beta = 98^0\,22'\,2''$.

30) Auf einem regelmäfsigen Funfzehnecke von $a = 1{,}1293$ m Seite soll eine gerade Pyramide von 1 cbm Inhalt entstehen. Wie hoch wird dieselbe? wie lang ist der Halbmesser des der Grundfläche einbeschriebenen Kreises? wie grofs wird der Neigungswinkel der Seitendreiecke gegen die Grundebene? und wie viele Quadratmeter beträgt der Mantel dieser 1 cbm enthaltenden Pyramide? — Zweites Beispiel: $a = 1$ m.

Ergebnis. 1) $\alpha = 36^0\,58'\,30''$, $M = 28{,}163$ qm; 2) $\alpha = 47^0\,18'\,58''$, $M = 26{,}023$ qm.

---

31) Einem Kreise vom Halbmesser r ist ein regelmäfsiges Zwölfeck eingezeichnet. Dieses ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Höhe gleich r ist. Wie grofs ist der Inhalt der Pyramide? (Man bestimme den Inhalt des Zwölfecks durch Zerlegen in gleichschenklige Vierecke.) [Das Ergebnis ist überraschend einfach.]

32) Auf der Ebene eines Dreiecks, dessen Inhalt $= G$ gegeben ist, steht in einem Durchmesser des einbeschriebenen Kreises ein gleichseitiges Dreieck senkrecht, welches diesen Durchmesser als Seite hat. Seine Spitze ist die Spitze einer auf dem Grunddreiecke stehenden Pyramide. Wie grofs ist der Mantel derselben?



Ergebnis. $M = 2\,G$. Die auf den sehr verschieden gestalteten Dreiecken vom Inhalte G in solcher Weise hergestellten Pyramiden haben alle gleiche Mäntel.

---

33) Das Grundquadrat eines Würfels mit der Kante a ist die Grundfläche einer Pyramide, welche ihre Spitze in einem der oberen Eckpunkte des Würfels hat. Wie grofs sind der Inhalt, die Oberfläche und die Seitenkanten der Pyramide und wie grofs ist der Winkel, welchen die längste mit der nächsten Seitenkante an der Spitze bildet, und ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche?

Ergebnis. $F = (2 + \sqrt{2})\, a^2 = 3{,}414\, a^2$. Beide Winkel sind $35^0\, 15'\, 52''$.

34) Im Mittelpunkte eines Quadrates mit der Seite a steht die Strecke $^1/_2\, a$ senkrecht. Durch ihren Endpunkt und jede Seite des Quadrates wird eine Ebene gelegt. Wie grofs ist bei der entstandenen Pyramide der Inhalt, die Oberfläche, jede Seitenkante, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche und der Winkel, welchen sie mit der nächsten an der Spitze bildet?

Ergebnis. $F = (1 + \sqrt{2})\, a^2 = 2{,}414\, a^2$; Neigungswinkel $\alpha = 35^0\, 15'\, 52''$, der Winkel an der Spitze ist $2\,\alpha$.

35) Im Schnittpunkte der Eckenlinien eines Quadrats errichte man auf dessen Ebene nach jeder Seite eine Strecke, gleich der Hälfte r einer Eckenlinie des Quadrates, und verbinde die Endpunkte mit den Quadratecken. Zunächst ist zu beweisen, dafs jede Verbindungslinie gleich der Quadratseite a wird. Dann ist der Inhalt und die Oberfläche der so bestimmten Doppelpyramide durch die Kante a anzugeben. Nachdem man von den Endpunkten einer Eckenlinie $2r$ des Körpers auf eine Kante die Höhen h gefällt hat, welche die Schenkel des Neigungswinkels zweier Seitendreiecke sind, ist dieser zu berechnen durch Anwendung des Kosinussatzes auf jene Eckenlinie; in welcher Gleichung dann die Quadrate der Dreiecksseiten durch a^2 auszudrücken sind.

Ergebnis. $J = {}^1/_3\, a^3 \sqrt{2} = 0{,}471\, a^3$; $F = 2a^2\sqrt{3} = 3{,}464\, a^2$; $\cos\alpha = -{}^1/_3$, $\alpha = 109^0\, 28'\, 17''$.

---

36) Auf der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a steht in einem Eckpunkte die Strecke $^1/_2\, a$ senkrecht. Ihr Endpunkt ist mit den Endpunkten der Gegenseite des Grunddreiecks verbunden. Von der dadurch bestimmten Pyramide ist zu berechnen der Inhalt, die Oberfläche, der Neigungswinkel des gleichschenkligen Seitendreiecks gegen die Grundfläche und der Grundwinkel im gleichschenkligen Seitendreieck.

Ergebnis. $J = 0{,}072\, a^3$, $F = 1{,}433\, a^2$; $\alpha = 30^0$ und $\beta = 63^0\, 26'\, 6''$.

37) Dem Kreise vom Durchmesser d ist ein regelmäfsiges Sechseck eingezeichnet. Auf dieser Ebene wird in einem Eckpunkte eine dem Durchmesser gleiche Senkrechte errichtet und ihr Endpunkt mit allen Eckpunkten verbunden. Wie grofs sind die Verbindungslinien und ihre Neigungswinkel gegen die Grundebene?

Ergebnis. $x_1 = 1{,}1180\, d = x_5$, $\alpha_1 = 63^0\, 26'\, 12'' = \alpha_5$,
$x_2 = 1{,}3228\, d = x_4$, $\alpha_2 = 49^0\, 6'\, 24'' = \alpha_4$,
$x_3 = 1{,}4142\, d$, $\alpha_3 = 45^0$.

38) Dieselbe Aufgabe für ein regelmäfsiges Fünfeck.

Ergebnis. $x_1 = 1{,}1599\, d = x_4$, $\alpha_1 = 59^0\, 33'\, 12'' = \alpha_4$,
$x_2 = 1{,}3800\, d = x_3$, $\alpha_2 = 46^0\, 26'\, 12'' = \alpha_3$.

39) Dieselbe Aufgabe für ein regelmäfsiges Achteck.

Ergebnis. $x_1 = 1{,}0707\, d = x_7$, $\alpha_1 = 69^0\, 3'\, 32'' = \alpha_7$,
$x_2 = 1{,}2247\, d = x_6$, $\alpha_2 = 54^0\, 44'\, 7'' = \alpha_6$,
$x_3 = 1{,}3615\, d = x_5$, $\alpha_3 = 47^0\, 15'\, 55'' = \alpha_5$,
$x_4 = 1{,}4142\, d$, $\alpha_4 = 45^0$.

40) Auf einem regelmäfsigen Sechsecke mit der Seite a steht eine gerade Pyramide, in deren Seitendreiecken die auf der Grundkante stehende Höhe auch gleich a ist. Wie grofs sind die Oberfläche und der Inhalt der Pyramide und die Neigungswinkel der Seitendreiecke gegen die Grundebene?

Ergebnis. $F = 5{,}598\, a^2$, $J = 0{,}433\, a^3$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 26^0\, 33'\, 54''$.

41) Auf einem regelmäfsigen Sechsecke mit dem Halbmesser ϱ des einbeschriebenen Kreises steht eine gerade Pyramide, deren Seitendreiecke die auf der Grundkante stehende Höhe gleich $2\,\varrho$ haben. Wie grofs sind der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide und die Neigungswinkel der Seitendreiecke und der Seitenkanten gegen die Grundebene?

Ergebnis. $J = 2\,\varrho^3$, $F = 10{,}392\,\varrho^2$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 56^0\, 18'\, 36''$.

42) Im Mittelpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a steht senkrecht auf dessen Ebene eine Strecke, die gleich der Höhe des Grunddreiecks ist. Durch ihren Endpunkt und jede Seite des Dreiecks ist eine Ebene gelegt. Von der so begrenzten Pyramide sind zu bestimmen der Inhalt, die Oberfläche, der Neigungswinkel der Seitenkanten und der Seitendreiecke gegen die Grundfläche und der Grundwinkel in einem Seitendreiecke.

Ergebnis. $J = (^1/_2 a)^3$, $F = {}^1/_4(\sqrt{3} + \sqrt{30})\, a^2 = 1{,}802\, a^2$; $\alpha = 56^0\, 18'\, 36''$, $\beta = 71^0\, 33'\, 54''$, $\gamma = 61^0\, 17'\, 22''$.

43) Auf der Ebene eines regelmäfsigen Sechsecks mit der Seite a steht in einer mitten hindurch gehenden Eckenlinie ein gleichseitiges Dreieck senkrecht, welches diese Eckenlinie zur Grundseite hat. Seine Spitze ist auch mit den 4 andern Eckpunkten verbunden. Von der hierdurch bestimmten Pyramide sind zu berechnen der Inhalt, die Oberfläche und der Neigungswinkel eines Seitendreiecks gegen die Grundebene.

Ergebnis. $F = {}^3/_2\, (\sqrt{3} + \sqrt{15})\, a^2 = 8{,}40\,755\, a^2$; $\alpha = 63^0\, 26'\, 6''$.

---

44) Man verlängere die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks über die Grundseite a um sich selbst und denke im Endpunkte auf der Zeichenebene eine Strecke senkrecht stehen, die gleich der halben Dreiecksseite ist. Ihr Endpunkt ist die Spitze einer auf dem Dreiecke stehenden Pyramide. Wie grofs sind die Neigungswinkel der Seitendreiecke gegen die Grundebene und die Inhalte der Seitendreiecke? Man ziehe vom Standpunkte der Pyramidenhöhe aus die Grundschenkel von den Neigungswinkeln der Seitendreiecke, um deren Höhenfufspunkte zu finden.

Ergebnis. Jedes Seitendreieck hat den Inhalt $^1/_2\, a^2$.

45) Man zeichne ein regelmäfsiges Sechseck, denke in einem Eckpunkte eine Strecke, die gleich der Sechseckseite a ist, auf der Zeichenebene senkrecht stehen, und denke durch ihren Endpunkt und jede Sechseckseite eine Ebene gelegt. Von der so begrenzten Pyramide ist zu berechnen der Inhalt und der Mantel. Man ziehe vom Standpunkte der Pyramidenhöhe aus die Grundschenkel von den Neigungswinkeln der Seitendreiecke, um deren Höhenfufspunkte zu finden.

Ergebnis. $M = (3 + {}^1/_2\sqrt{7})\, a^2 = 4{,}3229\, a^2$.

46) Ein um den Kreis vom Halbmesser ϱ beschriebenes Vieleck ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Höhe h im Mittelpunkte des Kreises senkrecht steht. Nachdem man die auf der Grundkante stehende Höhe jedes Seitendreiecks durch ϱ und ihren Neigungswinkel angegeben hat, bestimme man die Gröfse des Mantels der Pyramide durch den Inhalt G des Grundvielecks, dessen Ecken mit dem Kreismittel-

punkte zu verbinden sind. Beispiele: 1) $h = 48{,}99$ und $\varrho = 10$ cm; 2) $h = 14{,}79$ und $\varrho = 2{,}5$ cm; 3) $h = 37{,}9$ und $\varrho = 13{,}4$ cm.

Ergebnis. $M = \frac{G}{\cos\alpha}$. 1) $M = 5\,G$, 2) $M = 6\,G$, 3) $M = 3\,G$.

---

47) Die Ecke O, welche (wie eine Ecke am Fufsboden des Zimmers) von drei rechten Seitenwinkeln gebildet wird, hat die Kanten $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Durch das Dreieck ABC wird eine dreiseitige Pyramide abgegrenzt. Für den Inhalt des Seitendreiecks ABC ist eine Höhe zu bestimmen durch die Höhe des an ihre Grundseite stofsenden rechtwinkligen Dreiecks. Dann ist der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide anzugeben. Beispiele: 1) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ cm; 2) $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$ cm; 3) $a = 6$, $b = 8$, $c = 9$ cm.

Ergebnis. $F = \frac{1}{2}\,[ab + ac + bc + \sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}]$.
1) $J = 1$ ccm, $F = 9$ qcm; 2) $J = 2$ ccm, $F = 16$ qcm; 3) $J = 72$ ccm, $F = 138$ qcm.

48) Bei einem Würfel mit der Kante a wird durch die Endpunkte der drei von einem Eckpunkte auslaufenden Kanten eine Ebene gelegt. Wie grofs ist der Inhalt des Schnittdreiecks? Und wenn die gegenüberliegende Ecke des Würfels ebenso abgeschnitten wird, wie grofs ist der Inhalt und die Oberfläche des übrig bleibenden Körpers? Wie grofs ist das Rechteck, welches den Körper in zwei deckbare Pyramiden zerlegt? Aus dem Inhalte einer dieser Pyramiden und aus ihrer Grundfläche ist ihre Höhe zu berechnen. Wo liegt deren Fufspunkt?

Ergebnis. $J = \frac{2}{3}\,a^3$, $F = (3 + \sqrt{3})\,a^2 = 4{,}732\,a^2$. Der Fufspunkt der Pyramidenhöhe liegt mitten in der Eckenlinie einer Seitenfläche des Würfels.

49) Auf der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks steht in jeder seiner Seiten a ein ebensolches Dreieck senkrecht, und deren obere Spitzen sind mit einander verbunden. Von dem hierdurch bestimmten Körper läfst sich der Inhalt und die Oberfläche dadurch finden, dafs man die Höhenfufspunkte des Grunddreiecks mit einander verbindet und das auf dem erhaltenen Dreiecke stehende Prisma als den mittleren Teil des Körpers zuerst berechnet. (Nur das Grunddreieck ist zu zeichnen.)

Ergebnis. $J = \frac{9}{32}\,a^3$, $F = \frac{1}{16}\,(17\sqrt{3} + 3\sqrt{15})\,a^2 = 2{,}56\,649\,a^2$.

---

50) Von der Vorderfläche eines Würfels mit 10 cm langer Kante haben die Augen eines Zeichners 40 cm Abstand. Von den Endpunkten einer Kante der Hinterfläche des Würfels gehen in dasselbe Auge Strahlen und schneiden die (auch erweiterte) Vorderfläche in zwei Punkten, die zu verbinden sind, wenn die Zeichnung des Würfels in dieser Ebene gemacht werden soll. Wie lang ist die Verbindungslinie? Ändert sich das Verhältnis der Länge der Verbindungslinie zur Darstellung der Kante der Vorderfläche, wenn die Zeichnung des Würfels in irgend einer der Vorderfläche gleichlaufenden Ebene ausgeführt wird?

Ergebnis. In jeder dieser Zeichnungen ist die Seite des Quadrates, welches die Hinterfläche des Würfels darstellt, nur $\frac{4}{5}$ der Seite des für die Vorderfläche gezeichneten Quadrates. Dies ändert sich nicht in der Zeichnung für das andere Auge. Da tritt nur eine seitliche Verschiebung des kleineren Quadrates gegen das grofse ein, wie es bei den Darstellungen für ein Stereoskopbild sein mufs.



Druck von Velhagen & Klasing in Bielefeld.




Raumlehre

für

höhere Schulen.

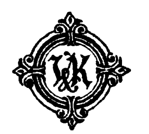
Von

Prof. **H. C. E. Martus,**
Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.



2. Teil.

Dreiecksrechnung und Körperlehre.



Bielefeld und Leipzig.
Verlag von Velhagen & Klasing.
1892.




Preis geheftet 3 M. 50 Pf.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06705 9363



